This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

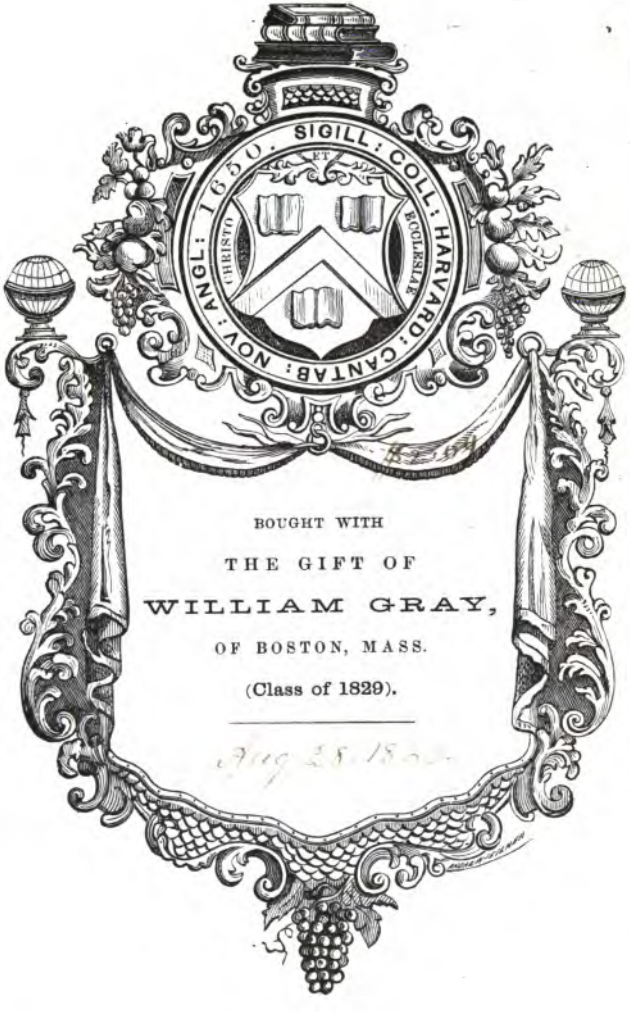
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 1858.62



BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).

Aug 28. 1858

TER LIBRARY

Die

Ausdehnungslehre.

Vollständig und in strenger Form

bearbeitet

von

Hermann Grassmann,
Professor am Gymnasium zu Stettin.

BERLIN, 1862.
VERLAG VON TH. CHR. FR. ENSLIN.
(ADOLPH ENSLIN.)

Math 1858.62

1863, Aug. 27.
$2.09
Gray Fund.

Vorrede.

Das vorliegende Werk umfasst die gesammte Ausdehnungslehre, eine mathematische Wissenschaft, von welcher ich schon vor 17 Jahren den ersten Theil unter dem besonderen Titel: „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik — Leipzig 1844, Verlag von Otto Wigand“ herausgegeben habe. Ausserdem habe ich in der Vorrede des genannten Werkes die wesentlichsten Gegenstände angedeutet, welche nach meinem Plane den Inhalt des zweiten Theiles ausmachen sollten. Statt nun diesen zweiten Theil als Fortsetzung jenes ersteren zu veröffentlichen, und dadurch jenem Plane gemäss das begonnene Werk abzuschliessen, habe ich es vorgezogen, den in jenem behandelten Stoff auch in dies neue Werk mit aufzunehmen, und so ein zusammenhängendes Ganze zu liefern. Der Hauptgrund, der mich dazu bewogen hat, ist die Schwierigkeit, welche nach dem Urtheile aller Mathematiker, deren Urtheil ich zu hören Gelegenheit fand, das Studium jenes Werkes wegen seiner, wie sie meinen, mehr philosophischen als mathematischen Form dem Leser bereitet. Und in der That muss diese Schwierigkeit sehr bedeutend gewesen sein, da zwar wohl die geometrischen Abhandlungen, welche ich zur Erläuterung jenes Werkes geschrieben habe (Crelle B. 36, 42, 44, 49, 52; Geometrische Analyse Leipzig 1847) mehrfach von andern Mathematikern erwähnt und benutzt sind, aber das in jenem Werk selbst verarbeitete Gebiet nirgends, wenn ich eine interessante kleine Abhandlung von Kysaeus (Bedeutung und Anwendung der Zahlen in der Geometrie, Siegen 1850) ausnehme, berührt oder zu weiteren Forschungen verwandt ist. Damit hängt auch zusammen, dass nie eine Beurtheilung des Werkes, ja nicht einmal eine Anzeige desselben, ausser im Messkatalog, oder eine Inhaltsangabe, ausser einer von mir selbst verfassten (in Grunert's Archiv B. VI.) erschienen ist. Jene Schwierigkeit nun zu heben, war daher eine wesentliche Aufgabe für mich, wenn ich wollte, dass das Buch nicht nur von mir, sondern auch von andern gelesen und verstanden werde. Es konnte aber diese

Schwierigkeit nicht gehoben werden, ohne den Plan des Ganzen wesentlich zu ändern. Denn sie liegt nicht in einer willkürlich gewählten Form, sondern in dem Plane, den ich vor Augen hatte: die Wissenschaft unabhängig von andern Zweigen der Mathematik von Grund aus aufzubauen. Die Ausführung gerade dieses Planes, wenn gleich sie für die Wissenschaft an sich die förderndste sein musste, wie sie es denn auch subjectiv gewesen ist, musste bei jeder Form der Darstellung bedeutende Schwierigkeiten bieten, zumal in einer Wissenschaft, wie die Ausdehnungslehre ist, welche die sinnlichen Anschauungen der Geometrie zu allgemeinen, logischen Begriffen erweitert und vergeistigt, und welche an abstrakter Allgemeinheit es nicht nur mit jedem andern Zweige, wie der Algebra, Kombinationslehre, Funktionenlehre, aufnimmt, sondern sie durch Vereinigung aller in diesen Zweigen zu Grunde liegenden Elemente noch weit überbietet, und so gewissermassen den Schlussstein des gesammten Gebäudes der Mathematik bildet.

Ich musste daher diesen ganzen Plan aufgeben, und habe nun für das vorliegende Werk die übrigen Zweige der Mathematik, wenigstens in ihrer elementaren Entwickelung vorausgesetzt. Ebenso habe ich in der Form der Darstellung gerade den entgegengesetzten Weg eingeschlagen, wie dort, indem ich die strengste mathematische Form, die wir überhaupt kennen, die Euklidische, für das vorliegende Werk angewandt, und alles, was zur Erläuterung oder zur Begründung des gewählten Ganges diente, in Anmerkungen verwiesen habe. Eine nothwendige Folge des so veränderten Planes war es, dass die sämmtlichen Resultate des ersten Theiles, so weit sie nicht Anwendungen auf die Physik enthielten, mit in die neue Bearbeitung aufgenommen und nach dem veränderten Plane neu abgeleitet werden mussten (wie dies in No. 1—136, 216—329 geschehen ist). Dennoch sind durch die Verschiedenheit der Methoden die beiden Bearbeitungen desselben Stoffes einander so unähnlich geworden, dass man, mit Ausnahme der abgeleiteten Resultate selbst, welche der Natur der Sache nach keine Abweichung zeigen, kaum eine Uebereinstimmung herausfinden wird. Es ist daher auch die alte Bearbeitung durch die neue durchaus nicht überflüssig gemacht. Denn auch die neue Methode ist an sich keineswegs der älteren vorzuziehen, da vielmehr die bis auf die ersten Ideen hinabsteigende und von hier aus ganz unabhängig fortschreitende Methode der ersten Bearbeitung tiefer in das Wesen der Sache hineinführt, und daher in rein wissenschaftlicher Beziehung entschiedene Vorzüge vor der letzteren hat. Diese dagegen wird auf der andern Seite für den Mathematiker, der die anderweitig gewonnenen Schätze mathematischen Wissens bei seinen Studien nicht gerne müssig liegen sieht, annehmlicher und jedenfalls leichter verständlich sein. So ergänzen und erläutern sich beide Darstellungen gegenseitig. Die hier gewählte schliesst sich am engsten an die Arithmetik an, doch

in der Weise, dass sie die Zahlgrösse schon als eine stetige voraussetzt. Wie nun die Arithmetik alle übrigen Grössen aus einer einzigen, im Uebrigen willkürlichen Grösse, die als Einheit gesetzt wird, und mit e bezeichnet sein mag, entwickelt (vergleiche mein Lehrbuch der Arithmetik, 1860 Berlin bei Enslin), so setzt die Ausdehnungslehre in der hier gegebenen Fassung mehrere solche Grössen, e_1, e_2, ..., von denen keine aus den übrigen ableitbar ist, z. B. e_2 sich nicht aus e_1 dadurch entwickeln lässt, dass e_1 mit irgend einer Zahlgrösse multiplicirt wird, voraus, und betrachtet zunächst die aus jenen Einheiten durch Multiplikation mit Zahlgrössen und Addition dieser Produkte entstandenen Grössen, welche ich extensive Grössen (oder Ausdehnungsgrössen) genannt habe. Hieraus ergeben sich denn leicht die in Kap. 1 vorgetragenen Gesetze der Addition, Subtraktion, Vielfachung (Multiplikation mit Zahlen) und Theilung (Division durch Zahlen). Es mag auffallend erscheinen, dass diese so einfache Idee, welche im Grunde genommen in weiter nichts besteht, als dass eine Vielfachensumme verschiedener Grössen (als welche hiernach die extensive Grösse erscheint) als selbstständige Grösse behandelt wird, in der That zu einer neuen Wissenschaft sich entfalten soll; und man hat mir denn auch, hieran anknüpfend, den Einwurf gemacht, dass die ganze Ausdehnungslehre nur eine abgekürzte Schreibart sei, ja dass es fehlerhaft sei, Ausdrücke als Grössen zu behandeln, welche gar keine Grössen seien. Allein dieser Einwurf beruht auf einem gänzlichen Verkennen des Wesens der Mathematik und der Grössen. Auf diese Weise würde die ganze Arithmetik, ja, man kann sagen, die ganze reine Mathematik, bloss eine abgekürzte Schreibart sein; denn die Zahl ist nur ein abgekürzter Ausdruck für eine Summe von Einheiten, das Produkt für eine Summe gleicher Zahlen, die Potenz für ein Produkt solcher u. s. w.; dennoch würde ohne diese abgekürzte Schreibart, oder, um es richtiger auszudrücken, ohne diese Zusammenfassung zu einer Einheit des Begriffes kein Fortschritt denkbar sein. Es würde zum Beispiel ohne diese Zusammenfassung nicht möglich sein, zu dem Begriffe der wegnehmenden Rechnungsarten (Subtrahiren, Dividiren, Radiciren, Logarithmiren), und zu den durch sie neu sich entwickelnden Zahlformen: der negativen, gebrochenen, irrationalen und imaginären, zu gelangen. Es kommt überall nur darauf an, dass man auch wirklich dasjenige zusammenfasse, was seinem Wesen nach eine Einheit bildet, und was daher auch zu neuen Resultaten führen muss, zu denen man ohne jene Zusammenfassung nicht gelangen würde. Die Ausdehnungslehre führt nun in der That zu einem unerschöpflichen Reichthum solcher Beziehungen, welche ohne Bildung jener Begriffseinheit, welche in der extensiven Grösse erscheint, auf keine Weise aufzufassen oder abzuleiten wären. Ob man diesem Begriffe den Namen einer Grösse zugesteht, ist an und für sich von sehr untergeordneter Bedeutung, da es hier auf Namen wenig ankommt. Die Frage

ist nur die, ob dieſer neue Begriff mit dem allgemeinen Begriffe der Grösse wirklich ſo zuſammenhänge, dass ſie ihrem Weſen nach zu einem Geſammtbegriffe ſich zuſammenschliessen, und dass eine zwischen beiden Gebieten gezogene Gränzlinie das Zuſammengehörige willkürlich und der Sache widersprechend zertrennen würde. Ist letzteres der Fall, ſo wäre es ſogar fehlerhaft, dieſem neuen Begriffe nicht den Namen der Grösse beizulegen. Nun glaube ich in der That, dass zwischen dem, was ich extenſive Grösse genannt habe, und zwischen allgemeinen Zahlgrössen und namentlich der imaginären Grösse $(a+bi)$ eine ſo innige Beziehung herrscht, dass es wiederſinnig wäre, die eine als Grösse zu betrachten und die andere nicht, da ja in der That die imaginäre Grösse ebenſo aus 2 Einheiten 1 und $i=\sqrt{-1}$ durch reelle Zahlkoefficienten ableitbar ist, wie die extenſiven Grössen aus 2 oder mehr Einheiten ableitbar ſind (ſ. u. No. 413 Anm.) So scheint es mir alſo vollständig gerechtfertigt, wenn ich die extenſive Grösse als Grösse bezeichne. Aber ich gehe noch weiter, indem ich ſie nicht nur als Grösse überhaupt, ſondern auch als einfache Grösse bezeichne. Ihr treten nämlich gegenüber andere Grössen, welche den Charakter zuſammengeſetzter Grössen ebenſo entschieden an ſich tragen, wie jene den der einfachen, und welche erst durch Addition höherer Gebilde und beſonders durch die Betrachtung der Quotienten und der Funktionen hineintreten (vergl. Nr. 77, 377 und 364). Ich fahre nun fort, den Gang der Entwickelung in dem vorliegenden Werke überſichtlich zu verfolgen. An die Addition, Subtraktion, Vielfachung und Theilung schliesst ſich nun (in Kap. 2) der allgemeine Begriff der Multiplikation extenſiver Grössen an, welcher auf die Beziehung der Multiplikation zur Addition (nämlich darauf, dass man statt der Summe die Summanden multipliciren darf) gegründet ist. Hiernach führt die Multiplikation der genannten Grössen auf die ihrer Einheiten $(e_1, e_2, \cdots)$ zurück, und aus der Betrachtung der Produkte dieſer Einheiten ergeben ſich dann verschiedene Gattungen der Multiplikation. Es gelingt nun, aus dieſen Gattungen zwei auszuſondern, auf welche ſich alle übrigen zurückführen lassen. Die eine derſelben fällt in ihren Geſetzen ganz zuſammen mit der gewöhnlichen Multiplikation in der Algebra und ist daher von mir die algebraische genannt worden. Aber ſie ist in Bezug auf die durch ſie erzeugten Grössen bei weitem die verwickeltste und kann nur durch Betrachtung der Funktionen zur vollen Klarheit gebracht werden, weshalb ich ſie auf den zweiten Abschnitt dieſes Werkes verwieſen habe. Die Bezeichnung für dieſe algebraische Multiplition muss der Natur der Sache nach mit der gewöhnlichen Bezeichnung der Multiplikation zuſammenfallen, da es widerſinnig wäre, Verknüpfungen, welche in allen Beziehungen denſelben Geſetzen unterliegen, verschieden zu bezeichnen. Die zweite jener Multiplikationen, welche im dritten Kapitel behandelt ist, zeigt ſich als die für die Ausdehnungslehre charakteriſtische, und ſie weſentlich weiter fördernde, indem ſie die

verschiedenen Stufen einfacher Grössen liefert, welche in der Ausdehnungslehre hervortreten. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass zwei einfache Faktoren des Produktes nur vertauscht werden dürfen, wenn man zugleich das Vorzeichen (+ —) des Produktes umkehrt. Da zwar für diese Multiplikation die Beziehung zur Addition dieselbe ist, wie bei jeder Multiplikation, aber die übrigen Gesetze derselben wesentlich von denen der gewöhnlichen Multiplikation abweichen, so war es nothwendig, sie durch die Bezeichnung zu unterscheiden. Ich habe in diesem Werke dafür die Bezeichnung durch eckige Klammern, die das Produkt umschliessen, gewählt, so dass also $[ab] = -[ba]$ ist, wenn a und b einfache Faktoren dieses Produktes sind. Es entfaltet sich dies Produkt zu einer ausserordentlichen Mannigfaltigkeit von Erscheinungsformen, und lässt in reicher Fülle Beziehungen hervor treten, welche auf alle Zweige der Mathematik ein unerwartet neues Licht werfen, so dass es den eigentlichen Mittelpunkt der neuen Wissenschaft bildet. Nachdem der Begriff der Grössen-Ergänzung hinzugekommen ist, tritt jenes Produkt in einer ganz neuen Eigenthümlichkeit, als inneres Produkt (Kap. 4) hervor, so dass es in dieser Form aus dem Bereiche der in der ersten Bearbeitung dargestellten Gegenstände ganz heraustritt. (Vergleiche jedoch die Vorrede zu jenem Werke p. XI.) Mit Anwendungen auf die Geometrie (Kap. 5) schliesst der erste Abschnitt des Werkes. In dem zweiten Abschnitte treten nun die zusammengesetzten Grössen hervor, welche wir im Ganzen als Funktionen einfacher Grössen charakterisiren können. Das erste Kapitel dieses Abschnittes behandelt die Funktionen im Allgemeinen, woran sich die algebraische Multiplikation und Division anschliesst, das zweite die Lehre von den Reihen, das dritte die Differenzialrechnung und das vierte endlich die Integralrechnung, und zwar alle diese nur in sofern als extensive Grössen in Betracht gezogen werden. Doch glaube ich, dass auch die entsprechenden Zweige der gewöhnlichen (auf Zahlgrössen sich beziehenden) Mathematik und namentlich die Integralrechnung durch diese Darstellung nicht nur wesentlich vereinfacht, sondern auch mannigfach ergänzt und weiter gefördert sind. Da der Stoff seit der ersten Bearbeitung bedeutend angewachsen ist, so habe ich die Anwendungen auf die Physik ganz weglassen müssen; doch hoffe ich, wenn mir Zeit und Kraft dazu gestattet ist, eine mathematische Bearbeitung der wichtigsten Zweige der Physik in selbstständigen Werken folgen zu lassen, in denen ich von der hier vorgetragenen Wissenschaft Anwendung machen werde. Ich habe mich eifrig bemüht, überflüssige Kunstausdrücke zu vermeiden und mich auf das möglichst geringste Maass neuer Kunstausdrücke zu beschränken; aber da man nun einmal ohne Worte nicht reden kann, und daher auch zu neuen Begriffen entweder neue Wortbildungen oder neue Wortverbindungen gebraucht, oder alten Worten ein neues Gepräge verleihen muss, so blieb doch noch eine ziemliche Menge unvermeidlicher Kunst-

ausdrücke übrig. Um dass Verständniss zu erleichtern, habe ich zunächst die Kunstausdrücke so gewählt, dass sie, wie ich hoffe, durch ihre Bildung selbst unmittelbar an den durch sie dargestellten Begriff erinnern, und dann habe ich am Schlusse ein alphabetisches Verzeichniss derselben mit Hinweisung auf die Stellen, wo sie erklärt sind, gegeben. Es bleibt mir noch übrig, auf verwandte Bestrebungen anderer Mathematiker hinzuweisen. Es beziehen sich diese fast ohne Ausnahme auf diejenigen Gegenstände, welche ich als Anwendungen der Ausdehnungslehre auf die Geometrie bezeichnet habe (also auf die §§. 24, 28—30, 37—40, 56, 74—79, 91, 92, 101, 102, 114—119, 144—148, 159—170 der Ausdehnungslehre von 1844 und auf die Nrn. 216—347 des vorliegenden Werkes). Bei der ersten Bearbeitung (1844) war mir unter den hier einschlagenden Arbeiten nur das berühmte Werk des Begründers der geometrischen Analyse: der barycentrische Calcul von Moebius, bekannt, welches die Addition der Punkte lehrte. Hingegen waren mir die Arbeiten über die geometrische Addition der Strecken (von gegebener Länge und Richtung), sowie über die Bedeutung der imaginären Grössen unbekannt geblieben. Die letztere wurde in ihrer Vollständigkeit zuerst in einer Abhandlung von Gauss (Göttinger gelehrte Anzeiger 1831) dargestellt, auf welche mich Gauss auf Veranlassung der den gleichen Gegenstand behandelnden Stelle in der Vorrede zur Ausdehnungslehre (pag. XI bis XIV) brieflich aufmerksam machte. Schon in dieser Darstellung des Imaginären lag der Begriff der geometrischen Addition von Strecken in Einer Ebene. Der erste, welcher die geometrische Addition der Strecken in ihrer ganzen Allgemeinheit gelehrt hat, scheint Bellavitis gewesen zu sein, indem er schon 1835 (Annali delle scienze de regno Lombardo-Veneto, 3° volume) den hier gehörigen Calcul aufstellte (vergl. unten p. 149 Anm.) Unabhängig davon entwickelte Möbius (1843) in seiner Mechanik des Himmels die Gesetze der geometrischen Addition der Strecken und wandte sie auf die Probleme der Mechanik des Himmels an. Nach dem Erscheinen meiner Ausdehnungslehre (von 1844) mehrten sich die Arbeiten auf dem Gebiete der geometrischen Analyse. Ins Besondere waren es wieder Moebius und Bellavitis, welche die Wissenschaft wesentlich weiter förderten und auch zum Verständniss und zur weiteren Verbreitung der von mir vorgetragenen geometrischen Rechnungsmethode in bedeutender Weise beitrugen. Dazu kamen nun noch meine eigene Arbeiten über diesen Gegenstand, welche theils in meiner Schrift: „Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibnitz erfundene Charakteristik, gekrönte Preisschrift, Leipzig 1847," welche Moebius durch eine daran angeschlossene lichtvolle Darstellung den Mathematikern zugänglicher zu machen suchte, theils in Crelle's Journal (Band 36, 42, 44, 49, 52) niedergelegt sind. Ferner trat ein Jahr nach dem Erscheinen meiner linealen Ausdehnungslehre Saint-Venant mit der geometrischen Multiplikation der Strecken hervor (Comptes

rendus, Tome XXI p. 620 sq., 15. Septembre 1845), welche identisch ist mit der von mir in jenem Werke dargestellten äusseren Multiplikation der Strecken (pag. 28—40). Offenbar kannte er dies Werk nicht, und ich schickte daher 2 Exemplare desselben an Cauchy mit der Bitte, eins davon an Saint-Venant abzugeben, dessen Adresse mir unbekannt war. Späterhin veröffentlichte Cauchy in mehreren Aufsätzen, welche in den Comptes rendus von 1853 abgedruckt sind, eine Methode, um vermittelst gewisser symbolischer Grössen, welche er clefs algébriques nennt, algebraische Gleichungen und verwandte Probleme zu lösen; eine Methode, welche genau mit der in meiner Ausdehnungslehre von 1844 (§. 45, 46 und 93) dargestellten übereinstimmt. Ich bin weit davon entfernt, den berühmten Mathematiker eines Plagiats beschuldigen zu wollen, doch glaubte ich es mir und der Sache schuldig zu sein, dass ich deshalb eine Prioritätsreclamation an die Pariser Akademie richtete. Allein die Commission, welcher diese Reclamation im April 1854 zur Prüfung und Berichterstattung übergeben wurde (Comptes rendus Tome 38 p. 741), hat nie etwas von sich hören lassen, und auch Cauchy hat seitdem über den Gegenstand nichts mehr veröffentlicht. Es sind die erwähnten Abhandlungen Cauchy's die einzigen, welche ausserhalb des Gebietes der Geometrie einen Berührungspunkt mit meiner Ausdehnungslehre (von 1844) darbieten. Und da auch diese Abhandlungen einen selbstständigen Ursprung beanspruchen, so scheint es, als ob der eigentliche Kern meines Werkes, abgesehen von dem geometrischen Beiwerk desselben, nirgends zu verwandten Bestrebungen angeregt habe. Und dennoch bin ich an dies neue Werk, welches das alte in sich aufnehmen und zum Abschlusse bringen sollte, mit frischem Muthe herangegangen. Denn ich bin der festen Zuversicht, dass die Arbeit, welche ich auf die hier vorgetragene Wissenschaft verwandt habe, und welche einen bedeutenden Zeitraum meines Lebens und in demselben die gespannteste Anstrengung meiner Kräfte in Anspruch genommen hat, nicht verloren sein werde. Zwar weiss ich wohl, dass die Form, die ich der Wissenschaft gegeben, eine unvollkommene ist und sein muss. Aber ich weiss auch und muss es aussprechen, auch auf die Gefahr hin, für anmaassend gehalten zu werden, — ich weiss, dass wenn auch dies Werk noch neue 17 Jahre oder länger hinaus müssig liegen bleiben sollte, ohne in die lebendige Entwickelung der Wissenschaft einzugreifen, dennoch eine Zeit kommen wird, wo es aus dem Staube der Vergessenheit hervorgezogen werden wird, und wo die darin niedergelegten Ideen ihre Frucht tragen werden. Ich weiss, dass wenn es mir auch nicht gelingt, in einer bisher vergeblich von mir ersehnten Stellung einen Kreis von Schülern um mich zu sammeln, welche ich mit jenen Ideen befruchten und zur weiteren Entwickelung und Bereicherung derselben anregen könnte, dennoch einst diese Ideen, wenn auch in veränderter Form, neu erstehen und mit der Zeitentwickelung in lebendige Wech-

felwirkung treten werden. Denn die Wahrheit ist ewig, ist göttlich; und keine Entwickelungsphase der Wahrheit, wie geringe auch das Gebiet sei, was sie umfasst, kann spurlos vorübergehen; sie bleibt bestehen, wenn auch das Gewand, in welches schwache Menschen sie kleiden, in Staub zerfällt.

Stettin, den 29. August 1861.

Inhalt.

	No.	pag.
Erster Abschnitt. Die einfachen Verknüpfungen extenſiver Grössen		1
Kap. 1. Addition, Subtraktion, Vielfachung und Theilung extenſiver Grössen		1
§. 1. Begriffe und Rechnungsgeſetze	1	
§. 2. Zuſammenhang zwischen den aus einem System von Einheiten ableitbaren Grössen	14	
§. 3. Erſetzung durch Zahlgleichungen; die Zahl als Quotient	27	
Kap. 2. Die Produktbildung im Allgemeinen		20
§. 1. Produkt zweier Grössen	37	
§. 2. Produkt mehrerer Grössen	43	
§. 3. Die verschiedenen Arten der Produktbildung	48	
Kap. 3. Kombinatorisches Produkt		31
§. 1. Allgemeine Geſetze der kombinatorischen Multiplikation	52	
§. 2. Das kombinatorische Produkt als Grösse	69	
§. 3. Aeussere Multiplikation von Grössen höherer Stufe	78	
§. 4. Ergänzung der Grössen	86	
§. 5. Produkt in Bezug auf ein Hauptgebiet	94	
§. 6. Vertauschung der Faktoren und Auflöſung der Klammern	114	
§. 7. Zurückleitung und Erſetzung	127	
§. 8. Elimination der Unbekannten aus algebraischen Gleichungen	134	
Kap. 4. Inneres Produkt		107
§. 1. Grundgeſetze der inneren Multiplikation	137	
§. 2. Begriff des Normalen und ſeine Correlaten	151	
§. 3. Geſetze der inneren Multiplikation, an den Begriff des Normalen geknüpft	164	
§. 4. Inneres Produkt zweier Grössen erster Stufe	188	
§. 5. Einführung der Winkel	195	

	No.	pag.
Kap. 5. Anwendung auf die Geometrie		142
§. 1. Addition u. f. w. von Punkten und Strecken	216	
§. 2. Räumliche Gebiete	228	
§. 3. Kombinatorische Multiplikation der Punkte	239	
§. 4. Addition von Linien und Flächen	272	
§. 5. Planimetrische u. stereometrische Multiplikation	287	
§. 6. Gleich Null gesetztes planimetrisches Produkt, ebene Kurven	306	
§. 7. Innere Multiplikation in der Geometrie	330	
Zweiter Abschnitt. Funktionenlehre		223
Kap. 1. Funktionen im Allgemeinen		223
§. 1. Reduktion auf eine Variable	348	
§. 2. Ganze Funktionen und Darstellung derselben durch lückenhaltige Produkte	353	
§. 3. Algebraische Multiplikation	364	
§. 4. Ganze Funktionen ersten Grades und Darstellung derselben als Quotienten	377	
§. 5. Die Funktionen als extensive Grössen	392	
§. 6. Verwandtschaften von dem Gesichtspunkte der Funktionsverknüpfung aus betrachtet	401	
§. 7. Normale Einheiten und Stetigkeit der Funktionen	419	
Kap. 2. Differenzialrechnung		293
§. 1. Differenzial erster Ordnung	428	
§. 2. Differenzialquotient erster Ordnung	435	
§. 3. Differenziale höherer Ordnung	443	
Kap. 3. Unendliche Reihen		309
§. 1. Unendliche Reihen im Allgemeinen	454	
§. 2. Die Reihen als Funktionen einer Zahlgrösse	460	
§. 3. Entwickelung der Funktion einer extensiven Grösse in Reihen	468	
Kap. 4. Integralrechnung		328
§. 1. Integration von Differenzialausdrücken	471	
§. 2. Integration von Differenzialgleichungen, wenn die unabhängige Variable eine Zahlgrösse ist	491	
§. 3. Integration von Differenzialgleichungen, wenn die unabhängige Variable eine extensive Grösse ist	500	

Erster Abschnitt.

Die einfachen Verknüpfungen extensiver Größen.

Kap. 1. Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung extensiver Größen.

§. 1. Begriffe und Rechnungsgesetze.

1. Erklärung. Ich sage, eine Grösse a sei aus den Grössen b, c, ··· durch die Zahlen $\beta, \gamma, \cdots$ **abgeleitet**, wenn

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

ist, wo $\beta, \gamma, \cdots$ reelle Zahlen sind, gleichviel ob rational oder irrational, ob gleich null oder verschieden von null. Auch sage ich, a sei in diesem Falle **numerisch abgeleitet** aus b, c, ···

2. Erklärung. Ferner sage ich, dass zwei oder mehrere Grössen a, b, c ··· in einer **Zahlbeziehung** zu einander stehen, oder dass der Verein der Grössen a, b, c, ··· einer Zahlbeziehung unterliege, wenn irgend eine derselben sich aus den übrigen numerisch ableiten lässt, also wenn sich z. B.

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

setzen lässt, wo $\beta, \gamma, \cdots$ reelle Zahlen sind. Besteht der Verein nur aus **Einer** Grösse a, so soll nur in dem Falle gesagt werden, der Verein unterliege einer Zahlbeziehung, wenn $a = o$ ist. Wenn zwei Grössen a und b, von denen keine null ist, in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so bezeichne ich dies durch

$$a \equiv b,$$

und sage a sei **kongruent** b.

Anmerkung. Zwei reelle Zahlen stehen also immer, zwei verschieden benannte Grössen stehen nie in einer Zahlbeziehung zu einander. Null ist aus jeder Grössenreihe numerisch ableitbar, nämlich durch die Zahlen 0, 0, ··· Mehrere Grössen also, unter denen eine null ist, stehen stets in einer Zahlbeziehung zu einander.

Das Zeichen ($\equiv$) ist in ähnlichem Sinne von Möbius (in seinem barycentrischen Calcül) gebraucht. Die Benennung (kongruent) gründet sich auf geometrische Betrachtungen. Zur Bezeichnung abstrakter Beziehungen ist sie von Gauss gebraucht.

3. Erklärung. Einheit nenne ich jede Grösse, welche dazu dienen soll, um aus ihr eine Reihe von Grössen numerisch abzuleiten, und zwar nenne ich die Einheit eine ursprüngliche, wenn sie nicht aus einer anderen Einheit abgeleitet ist. Die Einheit der Zahlen, also die Eins, nenne ich die absolute Einheit, alle übrigen relative. Null soll nie als Einheit gelten.

4. Erklärung. Ein System von Einheiten nenne ich jeden Verein von Grössen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und welche dazu dienen sollen, um aus ihnen durch beliebige Zahlen andere Grössen abzuleiten.

Anmerk. Hierher gehört auch der Fall, wo der Verein nur aus einer Einheit besteht (die jedoch nach Nr. 3 nicht null sein darf).

5. Erklärung. Extensive Grösse nenne ich jeden Ausdruck, welcher aus einem Systeme von Einheiten (welches sich jedoch nicht auf die absolute Einheit beschränkt) durch Zahlen abgeleitet ist, und zwar nenne ich diese Zahlen die zu den Einheiten gehörigen Ableitungszahlen jener Grösse; z. B. ist das Polynom

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots, \text{ oder } \sum a e \text{ oder } \sum a_r e_r$$

wenn $a_1, a_2, \cdots$ reelle Zahlen sind, und $e_1, e_2, \cdots$ ein System von Einheiten bilden, eine extensive Grösse, und zwar ist dieselbe aus den Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ durch die zugehörigen Zahlen $a_1, a_2, \cdots$ abgeleitet. Nur wenn das System blos aus der absoluten Einheit (1) besteht, ist die abgeleitete Grösse keine extensive, sondern eine Zahlgrösse. Den Ausdruck Grösse überhaupt werde ich nur für diese beiden Gattungen derselben festhalten. Wenn die extensive Grösse aus den ursprünglichen Einheiten abgeleitet werden kann, so nenne ich jene Grösse eine extensive Grösse erster Stufe.

Anmerk. Aus der Elementarmathematik setzen wir die Rechnungsgesetze für Zahlen, und auch für die sogenannten „benannten Zahlen", d. h. für die aus Einer Einheit abgeleiteten extensiven Grössen voraus; jedoch nur für den Fall, dass jene Einheit eine ursprüngliche ist.

6. Erklärung. Zwei extensive Grössen, die aus demselben System von Einheiten abgeleitet sind, addiren, heisst, ihre zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen addiren, d. h.

$$\sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} = \sum \overline{(\alpha + \beta) e}$$

7. Erklärung. Eine extensive Grösse von einer andern, aus demselben Systeme von Einheiten abgeleiteten subtrahiren, heisst die Ableitungszahlen der ersteren von den zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen der letzteren subtrahiren, d. h.

$$\sum \overline{\alpha e} - \sum \overline{\beta e} = \sum \overline{(\alpha - \beta) e}$$

Anmerk. In Bezug auf die Klammerbezeichnung halte ich die Bestimmung fest, dass ein ohne Klammern geschriebenes Polynom oder Produkt aus mehreren Faktoren gleichbedeutend ist dem mit Klammern geschriebenen Ausdruck, in welchem alle Klammern gleich zu Anfang eintreten, also $a + b + c = (a + b) + c$, $abc = (ab) c$ u. s. w.

8. Erklärung. Für extensive Grössen a, b, c gelten die Fundamentalformeln:

$$1)\ a + b = b + a,$$
$$2)\ a + (b + c) = a + b + c,$$
$$3)\ a + b - b = a,$$
$$4)\ a - b + b = a.$$

Beweis. Es sei $a = \sum \overline{\alpha e}$, $b = \sum \overline{\beta e}$, $c = \sum \overline{\gamma e}$, so ist

$$1)\ a + b = \sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} = \sum \overline{(\alpha + \beta) e} \quad \text{[nach 6]}.$$
$$= \sum \overline{(\beta + \alpha) e} = \sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\alpha e} \quad \text{[6]}.$$
$$= b + a.$$

$$2)\ a + (b + c) = \sum \overline{\alpha e} + \left(\sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\gamma e}\right)$$
$$= \sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{(\beta + \gamma) e} \quad \text{[6]}.$$
$$= \sum \overline{(\alpha + (\beta + \gamma))\, e} \quad \text{[6]}.$$
$$= \sum \overline{(a + \beta + \gamma)\, e}$$
$$= \sum \overline{(\alpha + \beta) e} + \sum \overline{\gamma e} \quad \text{[6]}.$$
$$= \sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\gamma e} \quad \text{[6]}.$$
$$= a + b + c$$

*

3) $a + b - b = \sum \overline{\alpha c} + \sum \overline{\beta e} - \sum \overline{\beta e}$

$= \sum \overline{(\alpha + \beta) e} - \sum \overline{\beta e}$ [6].

$= \sum \overline{(\alpha + \beta - \beta) e}$ [7].

$= \sum \overline{\alpha e} = a$

4) $a - b + b = \sum \overline{\alpha e} - \sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\beta e}$

$= \sum \overline{(\alpha - \beta) e} + \sum \overline{\beta e}$ [7].

$= \sum \overline{(\alpha - \beta + \beta) e}$ [6].

$= \sum \overline{\alpha e} = a$

9. Für extensive Grössen gelten die sämmtlichen Gesetze algebraischer Addition und Subtraktion.

Beweis. Denn diese Gesetze können, wie bekannt, aus den 4 Fundamentalformeln in No. 8 abgeleitet werden.

10. Erklärung. Eine extensive Grösse mit einer Zahl multipliciren heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen mit dieser Zahl multipliciren, d. h.

$$\sum \overline{\alpha e} \cdot \beta = \beta \cdot \sum \overline{\alpha e} = \sum \overline{(\alpha\beta) \cdot e}$$

11. Erklärung. Eine extensive Grösse durch eine Zahl, die nicht gleich null ist, dividiren, heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen durch diese Zahl dividiren, d. h.

$$\sum \overline{\alpha e} : \beta = \sum \overline{\frac{\alpha}{\beta} e}$$

12. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen (a, b) durch Zahlen (β, γ) gelten die Fundamentalformeln:

1) $a\beta = \beta a$,
2) $a\beta\gamma = a(\beta\gamma)$,
3) $(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma$,
4) $a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$,
5) $a \cdot 1 = a$,
6) $a\beta = 0$ dann und nur dann, wenn entweder $a = 0$, oder $\beta = 0$,
7) $a : \beta = a \frac{1}{\beta}$, wenn $\beta \gtrless 0$ ist *).

Beweis. Es sei $a = \sum \overline{\alpha e}$, $b = \sum \overline{\beta e}$, wo die Summe sich auf das System der Einheiten $e_1 \ldots e_n$ bezieht, so ist

*) Das Zeichen $\gtrless$ zusammengesetzt aus $>$ und $<$ soll ungleich bedeuten.

1) $a\beta = \beta a$ nach der Definition [s. Formel in No. 10].

2) $a\beta\gamma = \sum\overline{\alpha e}\ \beta\gamma = \sum\overline{(\alpha\beta)e}\,\gamma$ [10].
$= \sum\overline{(\alpha\beta\gamma)e}$ [10].
$= \sum\overline{\alpha(\beta\gamma)\cdot e} = \sum\overline{\alpha e}\,(\beta\gamma)$ [10].
$= a(\beta\gamma)$

3) $(a+b)\gamma = (\sum\overline{\alpha e} + \sum\overline{\beta e})\,\gamma = \sum\overline{(\alpha+\beta)e}\,\gamma$ [6].
$= \sum\overline{(\alpha+\beta)\gamma\cdot e}$ [10].
$= \sum\overline{(\alpha\gamma+\beta\gamma)\cdot e} = \sum\overline{(\alpha\gamma)e} + \sum\overline{(\beta\gamma)e}$ [6].
$= \sum\overline{\alpha e}\cdot\gamma + \sum\overline{\beta e}\cdot\gamma$ [10].
$= a\gamma + b\gamma$

4) $a(\beta+\gamma) = \sum\overline{\alpha e}(\beta+\gamma) = \sum\overline{\alpha(\beta+\gamma)\cdot e}$. [10].
$= \sum\overline{(\alpha\beta+\alpha\gamma)e} = \sum\overline{\alpha\beta\cdot e} + \sum\overline{\alpha\gamma\cdot e}$ [6].
$= \sum\overline{\alpha e}\cdot\beta + \sum\overline{\alpha e}\cdot\gamma$ [10].
$= a\beta + a\gamma$

5) $a\cdot 1 = \sum\overline{\alpha e}\cdot 1 = \sum\overline{\alpha e}$ [10].
$= a$

6) a) wenn $a = 0$ ist, so ist
$a\beta = 0\cdot\beta = 0$

b) wenn $\beta = 0$ ist, so ist
$a\beta = a\cdot 0 = \sum\overline{\alpha e}\cdot 0 = \sum\overline{0\cdot e}$ [10].
$= \sum\overline{0}$ [5. Anm.]
$= 0$

c) wenn $a\beta = 0$, so hat man
$0 = a\beta = \sum\overline{\alpha e}\,\beta = \sum\overline{\alpha\beta\cdot e}$ [10].

Hieraus folgt nun, dass alle Podukte $\alpha\beta$ d. h. $\alpha_1\beta$, $\alpha_2\beta$, $\cdots$ $\alpha_n\beta$ null sein müssen. Denn gesetzt, es wäre eins derselben, z. B. $\alpha_1\beta$ nicht null, so hätte man aus der Gleichung

$$0 = \alpha_1\beta\ e_1 + \alpha_2\beta e_2 + \cdots\cdots \alpha_n\beta\ e_n$$

durch Mult. mit $\frac{1}{\alpha_1\beta}$ die Gleichung

$$0 = e_1 + \frac{\alpha_2\beta}{\alpha_1\beta}e_2 + \cdots \frac{\alpha_n\beta}{\alpha_1\beta}\ e_n \text{ oder}$$

$$e_1 = \left(-\frac{\alpha_2\beta}{\alpha_1\beta}\right)e_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n\beta}{\alpha_1\beta}\right)e_n$$

d. h. e_1 wäre aus $e_2 \cdots e_n$ numerisch ableitbar, oder zwischen den Einheiten $e_1 \cdots e_n$ bestände eine Zahlbeziehung,

was gegen die Annahme ist, da e_1, $e_2, \cdots e_n$ ein System von Einheiten bilden sollen. Somit ist

$$0 = \alpha_1\beta = \alpha_2\beta = \cdots \alpha_n\beta,$$

also entweder $\beta = 0$, oder wenn $\beta \gtrless 0$ ist,

$$0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_n$$

also $a = \sum \overline{\alpha e} = \sum \overline{0 e} = \sum \overline{0}$ [5. Anm.]

$= 0$

d. h. wenn $a\beta = 0$ ist, so muss entweder β oder a gleich null sein.

7) $a : \beta = \sum \overline{\alpha e} : \beta = \sum \overline{\frac{\alpha}{\beta} e}$ [11], da β nicht null ist.

$= \sum \overline{\left(\alpha \frac{1}{\beta}\right) \cdot e} = \sum \overline{\alpha e} \frac{1}{\beta}$ [10].

$= a \frac{1}{\beta}$

13. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen durch Zahlen gelten die algebraischen Gesetze der Multiplikation und Division.

Beweis. Denn aus den Fundamentalformeln (1 bis 6) des vorhergehenden Satzes folgen in bekannter Weise die sämmtlichen algebraischen Gesetze der Multiplikation, und durch Formel (7) desselben Satzes wird die Division, ebenso wie in der Algebra, auf die Multiplikation zurückgeführt. Also gelten auch die algebraischen Gesetze der Division für die Division extensiver Grössen durch Zahlen.

§. 2. Zusammenhang zwischen den aus einem System von Einheiten ableitbaren Grössen.

14. Erklärung. Die Gesammtheit der Grössen, welche aus einer Reihe von Grössen a_1, $a_2, \cdots a_n$ numerisch ableitbar sind, nenne ich das aus jenen Grössen ableitbare Gebiet (das Gebiet der Grössen $a_1, \cdots a_n$), und zwar nenne ich es ein Gebiet n-ter Stufe, wenn jene Grössen von erster Stufe (d. h. aus n ursprünglichen Einheiten numerisch ableitbar) sind, und sich das Gebiet nicht aus weniger als n solchen Grössen ableiten lässt. Ein Gebiet, welches ausser der Null keine Grösse enthält, heisst ein Gebiet nullter Stufe.

Anmerk. Das Gebiet erster Stufe ist also die Gesammtheit der Vielfachen einer Grösse erster Stufe, wenn man nämlich unter Vielfachem einer Grösse jedes Produkt der Grösse mit einer reellen Zahlgrösse versteht.

15. Erklärung. Zwei Gebiete heissen identisch, wenn jede Grösse des ersten Gebietes zugleich Grösse des zweiten ist und umgekehrt. Wenn jede Grösse eines Gebietes (A) zugleich Grösse eines andern (B) ist (ohne dass das Umgekehrte nothwendig stattfindet), so nenne ich beide Gebiete einander incident, und sage dann, das erste Gebiet (A) sei dem zweiten untergeordnet, das zweite dem ersten übergeordnet. Die Gesammtheit der Grössen, welche zweien oder mehreren Gebieten zugleich angehören, heisst ihr gemeinschaftliches Gebiet, und die Gesammtheit der Grössen, welche sich aus den Grössen zweier oder mehrerer Gebiete numerisch ableiten lassen, ihr verbindendes Gebiet.

Anmerk. Ist z. B. das Gebiet A aus den Einheiten e_1, e_2, e_3 abgeleitet und das Gebiet B aus den Einheiten e_2, e_3, e_4, so ist das den Gebieten A und B gemeinschaftliche Gebiet das aus den Einheiten e_2, e_3 abgeleitete, und das A und B verbindende Gebiet das aus den Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4 abgeleitete.

16. Erklärung. Zwischen n Grössen $a_1, \cdots a_n$ herrscht dann und nur dann eine Zahlbeziehung, wenn sich eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n = 0$$

aufstellen lässt, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ nicht alle zugleich null sind.

Beweis. Denn wenn in der Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n = 0$$

auch nur Eine der Zahlen $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ von null verschieden ist, z. B. α_1, so ist die mit dieser Zahl verbundene Grösse a_1 aus den übrigen numerisch ableitbar; denn dann ist

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} a_n.$$

Umgekehrt, wenn irgend eine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_n$ herrscht, z. B.

$$a_1 = \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \cdots \beta_n a_n$$

so wird

$$-a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \cdots + \beta_n a_n = 0,$$

eine Gleichung, in welcher wenigstens der Koefficient von a_1 ungleich null ist.

17. Wenn n Grössen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und sie nicht alle null sind, so muss sich aus ihnen ein Verein von weniger als n Grössen aussondern lassen, welcher keiner Zahlbeziehung unterliegt, und aus dem die übrigen Grössen numerisch ableitbar sind.

Beweis. Es seien $a_1 \cdots a_n$ die in einer Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen, so muss [nach No. 2] sich eine derselben aus den übrigen numerisch ableiten lassen; dies sei a_n und sei etwa

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

Herrscht nun zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_{n-1}$ abermals eine Zahlbeziehung, so wird wieder eine derselben etwa a_{n-1} aus den übrigen $a_1, \cdots a_{n-2}$ numerisch ableitbar sein müssen. Es sei

$$a_{n-1} = \beta_1 a_1 + \cdots \beta_{n-2} a_{n-2}.$$

Führt man diesen Ausdruck für a_{n-1} in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_{n-1}\beta_1) a_1 + \cdots (a_{n-2} + \alpha_{n-1}\beta_{n-2}) a_{n-2},$$

also ist dann auch a_n aus $a_1, \cdots a_{n-2}$ numerisch ableitbar.

Dies Verfahren wird man fortsetzen können, so lange als noch zwischen den jedesmal übrig bleibenden Grössen eine Zahlbeziehung stattfindet. Man wird also zuletzt entweder zu einer Schaar von mehreren Grössen kommen, die in keiner Zahlbeziehung mehr zu einander stehen, und aus denen die übrigen numerisch ableitbar sind, oder es bleibt zuletzt nur Eine Grösse, etwa a_1, übrig, aus der alle übrigen numerisch ableitbar sind. Im letztern Falle darf diese Eine Grösse a_1 nicht null sein, weil sonst alle übrigen Grössen, als numerisch daraus ableitbar, auch null sein würden, was der Annahme widerstreitet. In beiden Fällen gelangt man also (No. 2) zu einem Vereine, der keiner Zahlbeziehung mehr unterliegt und aus dem alle übrigen der n Grössen $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableitbar sind.

18. Erklärung. Wenn in einem Verein von Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ die erste a_1 nicht null ist, und keine der fol-

genden ſich aus den vorhergehenden numerisch ableiten lässt, ſo unterliegt der Verein keiner Zahlbeziehung.

Beweis. Denn geſetzt, er unterliege einer Zahlbeziehung, ſo müsste (nach 16) zwischen den Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_n a_n = 0$$

aufgestellt werden können, in welcher nicht alle Koefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ zugleich null ſind. Es ſei α_r der letzte unter dieſen Koefficienten, welcher von null verschieden ist, ſo erhält man

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_r a_r = 0,$$

alſo, wenn r grösser als 1 ist,

$$a_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r} a_2 \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} a_{r-1},$$

d. h. a_r ist aus den vorhergehenden Grössen $a_1 \cdots a_{n-1}$ numerisch ableitbar, gegen die Voraussetzung. Ist aber $r = 1$, ſo hat man

$$\alpha_1 a_1 = 0;$$

alſo, da dann α_1 ungleich null angenommen ist,

$$a_1 = 0,$$

was gleichfalls der Voraussetzung widerstreitet. Alſo kann keine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_n$ herrschen.

19. Wenn eine Grösse a_1 aus n Grössen $b_1, b_2 \cdots b_n$ numerisch ableitbar ist, und dabei die zu b_1 gehörige Ableitungszahl ungleich null ist, ſo ist das aus den n Grössen $b_1, b_2 \cdots b_n$ ableitbare Gebiet identisch mit dem aus den n Grössen $a_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbaren.

Beweis. Es ſei $a_1 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots \beta_n b_n$, wo β_1 ungleich null ist, ſo ist

$$b_1 = \frac{1}{\beta_1} a_1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} b_2 \cdots - \frac{\beta_n}{\beta_1} b_n.$$

Ist nun c numerisch ableitbar aus $b_1, b_2, \cdots b_n$, etwa

$$c = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_n b_n,$$

ſo erhält man c als aus $a_1, b_2, \cdots b_n$ abgeleitet, indem man hier statt b_1 den gefundenen Werth ſetzt, nämlich

$$c = \frac{\gamma_1}{\beta_1} a_1 + \left(\gamma_2 - \frac{\gamma_1 \beta_2}{\beta_1}\right) b_2 + \cdots + \left(\gamma_n - \frac{\gamma_1 \beta_n}{\beta_1}\right) b_n.$$

Umgekehrt ist c numerisch ableitbar aus $a_1, b_2, \cdots b_n$, etwa

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n,$$

so erhält man c als aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ abgeleitet, indem man statt a_1 seinen Werth $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots \beta_n b_n$ setzt, nämlich

$$c = \alpha_1\beta_1 b_1 + (\alpha_2 + \alpha_1\beta_2) b_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_1\beta_n) b_n.$$

Also, jede Grösse, die einem der beiden Gebiete angehört, gehört auch dem andern an, d. h. beide Gebiete sind identisch.

20. Wenn m Grössen $a_1, \cdots a_m$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus n Grössen $b_1, \cdots b_n$, numerisch ableitbar sind, so kann man stets zu den m Grössen $a_1, \cdots a_m$ noch (n-m) Grössen $a_{m+1}, \cdots a_n$ von der Art hinzufügen, dass sich die Grössen $b_1, \cdots b_n$ auch aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten lassen, und also das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch ist dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_n$; auch kann man jene (n-m) Grössen aus den Grössen $b_1 \cdots b_n$ selbst entnehmen.

Beweis. Nach der Annahme ist a_1 aus $b_1 \cdots b_n$ ableitbar. Von den Zahlen, durch welche diese Ableitung erfolgt, muss mindestens Eine von null verschieden sein, weil sonst a_1 selbst null wäre, also der Verein der m Grössen (nach 2) einer Zahlbeziehung unterläge.

Es sei die zu b_1 gehörige Zahl von null verschieden, und dies wird man immer annehmen können, da man ja die Indices beliebig wählen kann. Dann ist nach 19 das aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbare Gebiet identisch dem aus $a_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbaren. Man habe nun für irgend ein r, welches $< m$ ist, gefunden, dass das Gebiet der Grössen $b_1, b_2, \cdots b_n$ identisch sei dem Gebiete der Grössen $a_1, a_2, \cdots a_r, b_{r+1}, \cdots b_n$, so wird nun, da nach der Hypothesis a_{r+1} aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbar ist, es auch (vermöge der Gebiets-Identität) aus $a_1, a_2, \cdots a_r, b_{r+1} \cdots b_n$ ableitbar sein. In dem Ausdrucke dieser Ableitung $a_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \cdots \beta_n b_n$ muss nothwendig einer der Koefficienten, die zu $b_{r+1}, \cdots b_n$ gehören, von null verschieden sein, weil sonst zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_{r+1}$ eine Zahlbeziehung stattfände, gegen die Hypothesis; es sei dies etwa β_{r+1}, so ist, nach 19, das aus $a_1, \cdots a_r, b_{r+1} \cdots b_n$ ableit-

bare Gebiet identisch dem aus $a_1, \cdots a_{r+1}, b_{r+2} \cdots b_n$ ableitbaren; alſo auch dies letztere Gebiet identisch dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_n$. Dieſen Schluss kann man alſo von $r = 1$ an verfolgen, bis $r = m$ wird; d. h. es wird dann das Gebiet $a_1 \cdots a_m b_{m+1} \cdots b_n$ identisch dem Gebiete $b_1 \cdots b_n$; und bezeichnet man dann die ſo übrig gebliebenen Grössen $b_{m+1}, \cdots b_n$ beziehlich mit $a_{m+1}, \cdots a_n$, ſo wird das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_n$.

21. Wenn n Grössen $(a_1, \cdots a_n)$, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus n andern Grössen $(b_1, \cdots b_n)$ numerisch ableitbar ſind, ſo ist das Gebiet der ersten Grössenreihe identisch dem der letzteren.

Beweis. Man hat nur in dem vorhergehenden Satze $m = n$ zu ſetzen, ſo erfolgt der zu erweiſende Satz.

22. Wenn n Grössen $(a_1, \cdots a_n)$ aus weniger als n Grössen $(b_1, \cdots b_m)$ numerisch ableitbar ſind, ſo stehen jene n Grössen stets in einer Zahlbeziehung zu einander.

Beweis. Es ſeien $a_1, \cdots a_n$ aus $b_1 \cdots b_m$ ableitbar, wo $m < n$ ist. Nun können $a_1 \cdots a_m$ entweder in einer Zahlbeziehung zu einander stehen oder nicht. Im ersteren Falle stehen auch $a_1, \cdots a_n$, da unter ihnen die Grössen $a_1, \cdots a_m$ vorkommen, in einer Zahlbeziehung zu einander. Im zweiten Falle ist das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_m$ (nach 21) identisch dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_m$, alſo ist jede aus $b_1, \cdots b_m$ numerisch ableitbare Grösse auch aus $a_1, \cdots a_m$ numerisch ableitbar, alſo ſind namentlich die Grössen $a_{m+1}, \cdots a_n$, welche nach der Hypotheſis aus $b_1, \cdots b_m$ ableitbar ſind, auch aus $a_1, \cdots a_m$ ableitbar, d. h. auch im zweiten Falle besteht zwischen $a_1 \cdots a_n$ eine Zahlbeziehung.

23. Wenn ein Gebiet n-ter Stufe aus n Grössen erster Stufe ableitbar ist, ſo stehen dieſe in keiner Zahlbeziehung zu einander, und umgekehrt: Wenn n Grössen erster Stufe in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, ſo ist das aus ihnen ableitbare Gebiet ein Gebiet n-ter Stufe.

Beweis. Es ſei A das aus den n Grössen erster Stufe

$a_1 \cdots a_n$ ableitbare Gebiet. Wenn nun zuerst A ein Gebiet n-ter Stufe ist, fo können $a_1 \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen; denn dann würde ſich eine dieſer Grössen aus den übrigen $n-1$ numeriſch ableiten laſſen, alſo auch das Gebiet aus dieſen $n-1$ Grössen ableitbar ſein, was dem Begriffe des Gebietes n-ter Stufe [nach 14] widerſtreitet. Zweitens umgekehrt, wenn $a_1, \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, ſo können ſie [nach 22] nicht aus weniger als n Grössen numeriſch abgeleitet werden, alſo auch das aus $a_1, \cdots a_n$ ableitbare Gebiet nicht, alſo iſt dies Gebiet [nach 14] von n-ter Stufe.

24. Jedes Gebiet n-ter Stufe kann aus n Grössen erſter Stufe, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, abgeleitet werden, und zwar aus beliebigen n ſolcher Grössen des Gebietes.

Beweis. Denn es ſeien $a_1, \cdots a_n$ die Grössen, aus denen urſprünglich das betrachtete Gebiet hervorgegangen iſt, und ſeien $b_1, \cdots b_n$ n Grössen dieſes Gebietes, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen. Da $b_1, \cdots b_n$ dem aus $a_1, \cdots a_n$ abgeleiteten Gebiete angehören, ſo werden ſich [nach 14] die Grössen $b_1 \cdots b_n$ aus $a_1 \cdots a_n$ numeriſch ableiten laſſen, und da zugleich jene Grössen $b_1 \cdots b_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen [Vorausſetzung], ſo wird [nach 21] das aus $b_1 \cdots b_n$ ableitbare Gebiet identiſch dem aus $a_1 \cdots a_n$ ableitbaren.

Anmerk. Durch dieſen Satz iſt jeder ſpecifiſche Unterſchied zwiſchen den urſprünglichen Einheiten und den daraus numeriſch abgeleiteten Grössen aufgehoben, indem man jedes Gebiet, ſtatt aus den urſprünglich zu Grunde gelegten n Einheiten, auch aus beliebigen n Grössen dieſes Gebietes, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, ableiten, und dieſe Grössen alſo ſtatt jener erſteren als Einheiten ſetzen kann. Es hätte ſich dieſer wichtige Satz auch direkt aus der Theorie der Elimination ableiten laſſen. In der That iſt unſer Satz nur eine Transformation des Satzes: Wenn n Grössen $y_1 \cdots y_n$ ganze homogene Funktionen erſten Grades von n anderen $x_1 \cdots x_n$ ſind, und die erſteren in keinem anderen Falle alle zugleich null werden können, als wenn auch die letzteren alle null werden, ſo laſſen ſich auch die letzteren $(x_1 \cdots x_n)$ als ganze homogene Funktionen erſten Grades von den erſteren $(y_1 \cdots y_n)$ darſtellen.

Doch ist der hier gelieferte Beweis nicht nur elementarer, sondern hat auch den Vorzug, dass dabei die wesentlichsten einfachen Beziehungen zwischen den extensiven Grössen klarer hervortreten.

25. Die Stufenzahlen zweier Gebiete sind zusammengenommen ebenso gross als die Stufenzahlen ihres gemeinschaftlichen und ihres verbindenden Gebietes zusammengenommen, d. h. wenn m und n die Stufenzahlen der gegebenen Gebiete sind, r die ihres gemeinschaftlichen, v die ihres verbindenden Gebietes, so ist

$$m + n = r + v.$$

Beweis. Es seien A und B die beiden gegebenen Gebiete m-ter und n-ter Stufe, und sei A aus den Grössen $a_1 \cdots a_m$, B aus den Grössen $b_1 \cdots b_n$ ableitbar. Dann kann [nach 23] weder zwischen $a_1 \cdots a_m$, noch zwischen $b_1 \cdots b_n$ eine Zahlbeziehung herrschen. Ferner möge sich ein Verein von r, aber auch nicht von mehr, Grössen finden lassen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und welche beiden Gebieten zugleich angehören. Diese Annahme wird immer zulässig sein, da r auch null sein darf. Es seien $c_1 \cdots c_r$ diese Grössen. Dann wird man [nach 20] in die Reihe der Grössen $a_1 \cdots a_m$ statt r derselben, etwa statt $a_1 \cdots a_r$ die Grössen $c_1 \cdots c_r$ in der Art einführen können, dass das aus dieser neuen Grössenreihe ableitbare Gebiet identisch sei dem Gebiete A. Ebenso wird man in die Reihe der Grössen $b_1 \cdots b_n$ statt r derselben, etwa statt $b_1 \cdots b_r$ die Grössen $c_1 \cdots c_r$ in der Art einführen können, dass das aus dieser neuen Grössenreihe ableitbare Gebiet dem Gebiete B identisch sei. Dann ist also A aus den m Grössen $c_1 \cdots c_r, a_{r+1} \cdots a_m$ ableitbar, und B aus den n Grössen $c_1 \cdots c_r, b_{r+1} \cdots b_n$. Keine dieser Grössenreihen unterliegt [nach 23] einer Zahlbeziehung. Dann ist klar, dass alle aus $c_1 \cdots c_r$ ableitbaren Grössen den Gebieten A und B gemeinschaftlich sind; aber auch keine andern, da es sonst, wider die Annahme, mehr als r in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen geben würde, die beiden Gebieten A und B gemeinschaftlich wären. Das den Gebieten A und B gemeinschaftliche Gebiet ist also das aus $c_1 \cdots c_r$ abgeleitete Gebiet, also [nach 23] ein

Gebiet r-ter Stufe. Nun bilden ferner alle Grössen $c_1 \cdots c_r$, $a_{r+1} \cdots a_m$, $b_{r+1} \cdots b_n$ eine Reihe von Grössen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Denn gesetzt, es herrschte zwischen ihnen eine Zahlbeziehung, so müsste diese von der Form

$$a + b + c = 0$$

sein, wo a aus $a_{r+1} \cdots a_m$, b aus $b_{r+1} \cdots b_n$, c aus $c_1 \cdots c_r$ abgeleitet ist. Hier können weder a noch b null sein. Denn wäre a null, so wäre $b + c = 0$, und es bestände also eine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $b_{r+1} \cdots b_n$, $c_1 \cdots c_r$, was, wie bewiesen, unmöglich ist; und wäre b null, so bestände eine Zahlbeziehung zwischen $a_{r+1} \cdots a_m$, $c_1 \cdots c_r$, was gleichfalls als unmöglich nachgewiesen ist. Stellen wir die obige Gleichung in der Form dar

$$a = -b - c,$$

so ist die linke Seite aus $a_{r+1} \cdots a_m$ numerisch abgeleitet, gehört also dem Gebiete A an, die rechte Seite ist aus $b_{r+1} \cdots b_n$, $c_1 \cdots c_r$ numerisch abgeleitet, gehört also dem Gebiete B an, folglich gehört a dann beiden Gebieten zugleich an. Da aber a aus $a_{r+1} \cdots a_m$ numerisch abgeleitet ist, und zwischen $a_{r+1} \cdots a_m$, $c_1 \cdots c_r$ keine Zahlbeziehung herrscht (wie oben gezeigt wurde), so ist a nicht aus $c_1 \cdots c_r$ ableitbar. Also würden dann die Gebiete A und B mehr als r in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen gemeinschaftlich haben, was gegen die Voraussetzung ist. Somit folgt, dass der ganze Verein der Grössen $c_1 \cdots c_r$, $a_{r+1} \cdots a_m$, $b_{r+1} \cdots b_n$ keiner Zahlbeziehung unterliegt. Das aus diesen Grössen ableitbare Gebiet besteht aber aus den sämmtlichen Grössen, welche sich aus den Grössen der Gebiete A und B ableiten lassen, d. h. ist ihr verbindendes Gebiet. Die Stufenzahl desselben sei v, so ist [nach 22] v gleich der Anzahl der Grössen $c_1 \cdots c_r$, $a_{r+1} \cdots a_m$, $b_{r+1} \cdots b_n$, d. h.

$$v = m + n - r, \text{ oder}$$
$$m + n = r + v.$$

26. Zwei Gebiete (A und B), welche beziehlich von α-ter und β-ter Stufe sind und in einem Gebiete n-ter Stufe liegen, haben, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, mindestens ein Gebiet von $(\alpha + \beta - n)$-ter Stufe gemein.

Beweis. Das A und B verbindende Gebiet sei von v-ter Stufe; das ihnen gemeinschaftliche von r-ter Stufe, so ist [nach 25]

$$\alpha + \beta = r + v, \text{ oder } r = \alpha + \beta - v,$$

d. h. Da A und B in einem Gebiete n-ter Stufe liegen, so liegt auch ihr verbindendes Gebiet in diesem Gebiete n-ter Stufe, also ist v entweder ebenso gross oder kleiner als n, also $r = \alpha + \beta - v$ entweder ebenso gross als $\alpha + \beta - n$ oder grösser.

Anmerk. Die bisher entwickelten Sätze finden sich schon, wenn gleich meist in anderen Formen, in meiner ersten Bearbeitung der Ausdehnungslehre vom Jahre 1844, und zwar Satz 18 und 23 sind genau in der entsprechenden Form in §. 20 jenes Werkes, Satz 24 in §. 126 enthalten, und auch die Idee des Beweises für diese Sätze ist hier und dort dieselbe.

§. 3. Die Zahl als Quotient extensiver Grössen und Ersetzung der Gleichungen zwischen extensiven Grössen durch Zahlgleichungen.

27. Erklärung. Ich nenne zwei Vereine von Gleichungen einander erfetzend, wenn sich jeder von beiden Vereinen aus dem andern ableiten lässt.

Anmerk. Hierbei ist auch der Fall eingeschlossen, in welchem einer der beiden Vereine oder jeder von beiden nur aus einer Gleichung besteht.

28. Eine Grösse x, welche aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen $a_1 \cdots a_n$ abgeleitet ist, ist dann und nur dann null, wenn ihre n Ableitungszahlen null sind, d. h. die Gleichung

$$(a) \quad x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = 0$$

wird erfetzt durch die n Gleichungen:

$$(b) \quad 0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Beweis. Denn wäre irgend eine der Ableitungszahlen von null verschieden, so würde vermöge der Gleichung (a) nach 16 zwischen $a_1 \cdots a_n$ eine Zahlbeziehung herrschen, gegen die Annahme. Gilt also die Gleichung (a), so gilt auch der Gleichungsverein (b). Umgekehrt, gilt der letzte Verein, so folgt daraus die Gleichung (a). Also wird diese Gleichung durch jenen Verein erfetzt.

29. Zwei Grössen eines Gebietes n-ter Stufe sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre n zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen einander gleich sind, d. h. die Gleichung

(a) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots \beta_n e_n$

wird ersetzt durch die n Gleichungen

(b) $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \cdots,\ \alpha_n = \beta_n.$

Beweis. Denn die Gleichung (a) wird ersetzt durch die Gleichungen

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0,$$

und diese (nach 26) durch die n Gleichungen

$$0 = \alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n,$$

d. h. durch die n Gleichungen

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \cdots,\ \alpha_n = \beta_n.$$

30. Erklärung. Wenn eine extensive Grösse a aus einer andern b, die nicht null ist, sich numerisch ableiten lässt, so verstehe ich unter $\frac{b}{a}$ die Zahl, durch welche b aus a abgeleitet werden kann, d. h.

$$\frac{\alpha a}{a} = \alpha, \text{ wenn } a \gtrless 0.$$

31. Wenn 2 Grössen (a und b) aus derselben Grösse (c) numerisch abgeleitet sind, und die zweite nicht null ist, so kann man, statt die erste durch die zweite zu dividiren, die Ableitungszahlen entsprechend dividiren, d. h.

$$\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ wenn } \beta c \gtrless 0.$$

Beweis. Wenn $\beta c \gtrless 0$ ist, so ist (nach 12, 6) auch $\beta \gtrless 0$ und $c \gtrless 0$. Dann ist $\alpha c = \frac{\alpha}{\beta}(\beta c)$ nach 13, also

$$\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}(\beta c)}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad [30].$$

32. Eine Gleichung, deren Glieder alle aus derselben Grösse (a) numerisch ableitbar sind, wird durch eine Gleichung ersetzt, die man erhält, indem man alle Glieder der ersteren durch eine beliebige aus jener Grösse (a) numerisch ableit-

bare, aber von null verschiedene Grösse dividirt, d. h. die Gleichung

(a) $\alpha a + \beta a + \cdots = \alpha_1 a + \beta_1 a + \cdots$

wird erfetzt durch die Gleichung

(b) $\frac{\alpha a}{\varrho a} + \frac{\beta a}{\varrho a} + \cdots = \frac{\alpha_1 a}{\varrho a} + \frac{\beta_1 a}{\varrho a} + \cdots$, wenn $\varrho a \gtrless 0$.

Beweis. Wenn $\varrho a \gtrless 0$, fo muss [nach 12, 6] fowohl $\varrho \gtrless 0$ als $a \gtrless 0$ fein. Somit kann man a auch, da es von null verschieden ist, als Einheit betrachten. Dann wird, nach 29, die Gleichung (a) erfetzt durch

$$\alpha + \beta + \cdots = \alpha_1 + \beta_1 + \cdots,$$

oder, wenn man durch $\varrho \gtrless 0$ dividirt, durch die Gleichung

$$\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta}{\varrho} + \cdots = \frac{\alpha_1}{\varrho_1} + \frac{\beta_1}{\varrho_1} + \cdots,$$

d. h. (nach 31) durch die Gleichung

$$\frac{\alpha a}{\varrho a} + \frac{\beta a}{\varrho a} + \cdots = \frac{\alpha_1 a}{\varrho_1 a} + \frac{\beta_1 a}{\varrho_1 a} + \cdots.$$

33. Erklärung. Wenn die Grössen $a_1 \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und die Grösse

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

ist, fo nennen wir, wenn m kleiner als n ist, die Grösse

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_m a_m$$

„die Zurückleitung der Grösse a auf das Gebiet $a_1 a_2 \cdots a_m$, unter Ausschliessung des Gebietes $a_{m+1} a_{m+2} \cdots a_n$.“ Wir fagen, die Zurückleitungen mehrerer Grössen feien in demfelben Sinne genommen, wenn die Grössen auf dasselbe Gebiet und unter Ausschliessung desselben Gebietes zurückgeleitet sind.

Anmerk. Wenn ins Befondere $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_n a_n$ ist, fo ist z. B. $\alpha_1 a_1$ die Zurückleitung von a auf das Gebiet a_1, unter Ausschliessung des Gebietes $a_2 \cdots a_n$, ferner: wenn $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ ist, fo ist $\alpha_1 a_1$ die Zurückleitung auf das Gebiet a_1, unter Ausschliessung des Gebietes a_2.

34. Jede Gleichung, deren Glieder Produkte je einer extenfiven Grösse mit einer Zahl find, wird, wenn die extenfiven Grössen einem Gebiet n-ter Stufe angehören, erfetzt durch n Zahlengleichungen, die man erhält, indem man in der gegebenen Gleichung statt aller extenfiven Grössen ihre

zu derſelben Einheit gehörigen Ableitungszahlen ſetzt; und zwar gilt dies, welche n in keiner Zahlbeziehung ſtehende Grössen des Gebietes man auch als System von Einheiten annehmen mag, d. h. die Gleichung

$$(a)\quad \alpha a' + \beta b + \cdots = \varkappa k + \lambda l + \cdots$$

in welcher

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_n e_n,\quad k = \varkappa_1 e_1 + \cdots \varkappa_n e_n$$
$$b = \beta_1 e_1 + \cdots \beta_n e_n,\quad l = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

ist, wird erſetzt durch die n Gleichungen

$$(b)\begin{cases} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots = \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots = \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots = \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots \end{cases}$$

vorausgeſetzt, dass $e_1 \cdots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen.

Beweis. Setzt man in die Gleichung (a) die Ausdrücke für a, b, ···· k, l, ·· ein, ſo erhält man

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots)e_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots)e_2 + \cdots (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots)e_n = (\varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots)e_1 + \cdots (\varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots)e_n.$$

Dieſe Gleichung wird (nach 29) erſetzt durch die n Gleichungen

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots = \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots$$
$$\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots = \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots = \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots.$$

35. Jede Gleichung, deren Glieder Produkte je einer extenſiven Grösse mit einer Zahl ſind, bleibt bestehen, wenn man ſtatt aller extenſiven Grössen ihre in demſelben Sinne genommenen Zurückleitungen ſetzt.

Beweis. Man nehme an, die gegebene Gleichung ſei die Gleichung (a) des vorhergehenden Satzes, in welcher a, b, ···· k, l ·· dieſelbe Bedeutung haben wie vorher, ſo ist zu zeigen, dass dieſe Gleichung auch fortbesteht, wenn man ſtatt der Grössen a, b, ··· k, l ihre Zurückleitungen auf das Gebiet $e_1 \cdots e_m$, unter Ausſchliessung des Gebietes $e_{m+1} \cdots e_n$, ſetzt, d. h. dass auch

$$(c)\quad \alpha a' + \beta b' + \cdots = \varkappa k' + \lambda l' + \cdots$$

sei, wo $a' = \alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_m e_m$, $k = \varkappa_1 e_1 + \cdots \varkappa_m e_m$,
$b' = \beta_1 e_1 + \cdots \beta_m e_m$, $l = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_m e_m$
$\vdots$ $\vdots$

ist. In der That wird die Gleichung (a) erfetzt durch die n Gleichungen (b) der vorigen Nummer. Multiplicirt man nun die erften m dieser n Gleichungen beziehlich mit $e_1, e_2, \cdots e_m$ und addirt die fo erhaltenen Gleichungen, fo erhält man die zu erweifende Gleichung (c).

Anmerk. Es liegt hierin zugleich der speciellere Satz, dass gleiche Grössen, in gleichem Sinne zurückgeleitet, auch gleiche Zurückleitungen geben, oder anders ausgedrückt, dass die Zurückleitung einer gegebenen Grösse bestimmt ist, wenn das Gebiet, auf welches, und das Gebiet, unter dessen Ausschliessung zurückgeleitet werden foll, gegeben ist.

36. Wenn die Zahlen $x_1 \cdots x_n$, durch welche eine extenfive Grösse x aus einem System von n Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ abgeleitet wird, einer Gleichung m-ten Grades genügen, fo genügen auch die Zahlen $y_1 \cdots y_n$, durch welche diefelbe Grösse aus einem System von n andern dasselbe Gebiet liefernden Einheiten $a_1, a_2 \cdots a_n$ abgeleitet wird, einer Gleichung m-ten Grades, und zwar ist die letzte homogen, wenn die erste es ist.

Beweis. Es ist nach der Annahme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n,$$

und zwischen diefen Ableitungszahlen bestehe die Gleichung

$$f(x_1, \cdots x_n) = 0,$$

in welcher f das Zeichen einer Funktion m-ten Grades ist. Nun müssen die neuen Einheiten $a_1 \cdots a_n$, da fie dem Gebiete $e_1 \cdots e_n$ angehören, aus diefen Einheiten $e_1, \cdots e_n$ ableitbar fein. Es fei

$$a_1 = \sum \alpha_{1,r} e_r = \alpha_{1,1} e_1 + \alpha_{1,2} e_2 + \cdots \alpha_{1,n} e_n,$$
$$a_2 = \sum \alpha_{2,r} e_r = \alpha_{2,1} e_1 + \alpha_{2,2} e_2 + \cdots \alpha_{2,n} e_n,$$
$$\vdots$$
$$a_n = \sum \alpha_{n,r} e_r = \alpha_{n,1} e_1 + \alpha_{n,2} e_2 + \cdots \alpha_{n,n} e_n.$$

Ferner, da $y_1 \cdots y_n$ die Ableitungszahlen in Bezug auf diefe neuen Einheiten fein follen, fo hat man auch

$$x = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots y_n a_n, \text{ also}$$

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$$
$$= y_1a_1 + y_2a_2 + \cdots y_na_n,$$
$$= y_1\sum\alpha_{1,r}e_r + y_2\sum\alpha_{2,r}e_r + \cdots y_n\sum\alpha_{n,r}e_r,$$
$$= \sum(y_r\alpha_{r,1})e_1 + \sum(y_r\alpha_{r,2})\cdot e_2 + \cdots + \sum(y_r\alpha_{r,n})\cdot e_n.$$

Alſo nach 29

$$x_1 = \sum\alpha_{r,1}y_r = \alpha_{1,1}y_1 + \alpha_{2,1}y_2 + \cdots \alpha_{n,1}y_n,$$
$$x_2 = \sum\alpha_{r,2}y_r = \alpha_{1,2}y_1 + \alpha_{2,2}y_2 + \cdots \alpha_{n,2}y_n,$$
$$\vdots$$
$$x_n = \sum\alpha_{r,n}y_r = \alpha_{1,n}y_1 + \alpha_{2,n}y_2 + \cdots \alpha_{n,n}y_n,$$

d. h. $x_1, \cdots x_n$ ſind ganze homogene Funktionen ersten Grades von $y_1 \cdots y_n$, folglich, ſetzt man in

$$f(x_1, \cdots x_n) = 0$$

ſtatt $x_1, \cdots x_n$ dieſe Werthe, ſo erhält man eine Funktion m-ten Grades von $y_1 \cdots y_n$ und zwar eine homogene, wenn die erstere eine ſolche war.

Kap. 2. Die Produktbildung im Allgemeinen.

§. 1. Produkt zweier Grössen.

37. Erklärung. Unter dem Produkte [ab] einer extenſiven Grösse a in eine andere b, verſtehe ich diejenige extenſive Grösse (oder auch Zahlgrösse), die man erhält, indem man zuerſt jede der Einheiten, aus denen die erſte Grösse a numeriſch abgeleitet iſt, mit jeder der Einheiten, aus denen die zweite b numeriſch abgeleitet iſt, zu einem Produkte verknüpft, deſſen erſter Faktor die Einheit der erſten Grösse und deſſen zweiter Faktor die Einheit der zweiten Grösse iſt, dann dies Produkt mit dem Produkte derjenigen Ableitungszahlen multiplicirt, mit welchen jene Einheiten verknüpft waren, und die ſämmtlichen ſo gewonnenen Produkte addirt, d. h. es iſt

$$[\sum\alpha_r e_r \cdot \sum\beta_s e_s] = \sum\alpha_r\beta_s [e_r e_s],$$

wo e_r, e_s die Einheiten, aus denen die Grössen numeriſch abgeleitet ſind, α_r, α_s die zugehörigen Ableitungszahlen bezeichnen, und die Summe ſich auf die verſchiedenen Werthe der Indices r und s bezieht.

Anmerk. Da das Produkt extenſiver Grössen nach der Erklärung wieder entweder eine extenſive Grösse oder eine Zahlgrösse iſt,

so muss dasselbe [nach 5] aus einem System von Einheiten numerisch ableitbar sein. Welches dies System von Einheiten sei, und wie aus ihnen die Produkte $e_r e_s$, aus denen jenes Produkt zusammengesetzt ist, numerisch abzuleiten seien, darüber sagt die Definition nichts aus. Soll also der Begriff eines besonderen Produktes genau festgestellt werden, so müssen noch über jenes System von Einheiten und über diese Ableitungen die nöthigen Bestimmungen getroffen werden. Sobald diese Bestimmungen getroffen sind, so geht aus der allgemeinen Gattung der Produktbildungen, wie sie oben festgestellt wurde, eine besondere Art der Produktbildung hervor. Hat man z. B. das Produkt $P = [(x_1 e_1 + x_2 e_2)(y_1 e_1 + y_2 e_2)]$, so ist dasselbe [nach 37] gleich $x_1 y_1 [e_1 e_1] + x_1 y_2 [e_1 e_2] + x_2 y_1 [e_2 e_1] + x_2 y_2 [e_2 e_2]$. Besondere Arten der Produktbildung würden nun hervorgehen, wenn noch die Einheiten festgesetzt würden, aus denen dies Produkt numerisch abgeleitet werden soll, und die Art bestimmt würde, wie die vier Produkte $[e_1 e_1]$, $[e_1 e_2]$, $[e_2 e_1]$, $[e_2 e_2]$ aus jenen Einheiten numerisch abzuleiten sind; so z. B. könnte festgesetzt werden, dass diese vier Produkte selbst das System der Einheiten bildeten, aus denen P numerisch abzuleiten ist, dann sind $x_1 y_1$, $x_1 y_2$, $x_2 y_1$, $x_2 y_2$ die Ableitungszahlen von P; und wir hätten eine besondere Art der Produktbildung, die sich dadurch auszeichnen würde, dass zu ihrer Feststellung keine Gleichungen erforderlich wären. Oder man könnte drei unter ihnen, etwa $[e_1 e_1]$, $[e_1 e_2]$, $[e_2 e_2]$ als Einheiten festsetzen, und die Bestimmung hinzufügen, dass $[e_2 e_1] = [e_1 e_2]$ sein sollte; dann würden die Ableitungszahlen von P sein $x_1 y_1$, $(x_1 y_2 + x_2 y_1)$, $x_2 y_2$; eine Art der Produktbildung, die sich dadurch auszeichnen würde, dass ihre Gesetze mit denen der algebraischen Multiplikation identisch sein würden. Oder man könnte eine unter ihnen, z. B. $[e_1 e_2]$, als Einheit festsetzen, aus welcher das Produkt P numerisch abzuleiten sein soll, und für die übrigen etwa die Bestimmungen treffen, dass $[e_1 e_1] = 0$, $[e_2 e_1] = -[e_1 e_2]$, $[e_2 e_2] = 0$ sein soll. Dann würde das Produkt P nur eine Ableitungszahl haben, nämlich $x_1 y_2 - x_2 y_1$; eine Produktbildung, die ich unten kombinatorische genannt habe. Ja man könnte auch ein System von anderen Einheiten, unter denen $[e_1 e_1]$, $[e_1 e_2]$, $[e_2 e_1]$, $[e_1 e_2]$ nicht vorkämen, zu Grunde legen, und dann bestimmen, wie diese vier Produkte aus ihnen abzuleiten seien, z. B. könnte man etwa die absolute Einheit zu Grunde legen, und etwa festsetzen, es solle $[e_1 e_1] = 1$, $[e_1 e_2] = 0$, $[e_2 e_1] = 0$, $[e_2 e_2] = 1$ sein, in diesem Falle würde P eine Zahl, nämlich $= x_1 y_1 + x_2 y_2$ sein; eine Produktbildung, die ich unten innere genannt habe. Gegenwärtig werde ich nur diejenigen Gesetze behandeln, welche aus der allgemeinen Erklärung des Produktes in 37 hervorgehen, und welche also für alle Arten der Produkte gelten. Ich habe das Produkt durch eine Klammer umschlossen, um es von dem gewöhnlichen Produkte der Algebra zu unterscheiden.

38. Statt zu einer Grösse a einen Faktor b hinzuzufügen, kann man ihn in dem Ableitungsausdruck der ersteren jeder Einheit auf entsprechende Weise hinzufügen, d. h.

$$[\sum \alpha_r e_r\, b] = \sum \alpha_r [e_r b].$$

Beweis. Es sei $b = \sum \beta_s e$, so ist

$$\begin{aligned}
[\sum \alpha_r e_r b] &= [\sum \alpha_r e_r \sum \beta_s e_s] = \sum \alpha_r \beta_s [e_r e_s] && [37]\\
&= \sum \alpha_1 \beta_s [e_1 e_s] + \sum \alpha_2 \beta_s [e_2 e_s] + \cdots && [9]\\
&= \alpha_1 [e_1 \sum \beta_s e_s] + \alpha_2 [e_2 \sum \beta_s e_s] + \cdots && [37]\\
&= \alpha_1 [e_1 b] + \alpha_2 [e_2 b] + \cdots = \sum \alpha_r [e_r b].
\end{aligned}$$

39. Ein Produkt zweier Faktoren, dessen einer Faktor eine Summe ist, ist gleich einer Summe von Produkten, die man erhält, indem man in dem ursprünglichen Produkte, statt des zerstückten Faktor's, nach und nach jedes Stück setzt, d. h.

$$[(a + b + \cdots)p] = [ap] + [bp] + \cdots$$
$$[p(a + b + \cdots)] = [pa] + [pb] + \cdots.$$

Insbesondere ist

$$[(a + b)c] = [ac] + [bc]$$
$$[c(a + b)] = [ca] + [cb].$$

Beweis. Es sei $a = \sum \alpha_r e_r$, $b = \sum \beta_r e_r + \cdots$, so ist

$$\begin{aligned}
&[(a + b + \cdots)p]\\
&= [(\sum \alpha_r e_r + \sum \beta_r e_r + \cdots)p] = [\sum (\alpha_r + \beta_r + \cdots) e_r p] && [9]\\
&= \sum (\alpha_r + \beta_r + \cdots)[e_r p] && [38]\\
&= \sum \alpha_r [e_r p] + \sum \beta_r [e_r p] + \cdots && [9]\\
&= [\sum \alpha_r e_r p] + [\sum \beta_r e_r p] + \cdots && [38]\\
&= [ap] + [bp] + \cdots.
\end{aligned}$$

Somit ist die erste Formel bewiesen. Den Beweis der zweiten Formel erhält man aus dem der ersten, wenn man den Faktor p überall als ersten Faktor einsetzt.

40. Statt den einen Faktor eines Produktes (zweier Faktoren) mit einer Zahl zu multipliciren, kann man das ganze Produkt mit dieser Zahl multipliciren, d. h.

$$[(\alpha a)b] = \alpha[ab]$$
$$[b(\alpha a)] = \alpha[ba].$$

Beweis. Es sei $a = \sum \alpha_r e_r$, so ist

$$[(\alpha a)b] = [(\alpha\sum\alpha_r e_r)b] = [\sum\alpha\alpha_r\cdot e_r\, b] \quad [10]$$
$$= \sum\alpha\alpha_r[e_r b] \quad [38]$$
$$= \alpha\sum\alpha_r[e_r b] \quad [13]$$
$$= \alpha[\sum\alpha_r e_r\, b] \quad [38]$$
$$= \alpha[ab].$$

Der Beweis der zweiten Formel ergiebt sich, wenn man b überall als den ersten der beiden Faktoren setzt.

41. Statt zu einer Grösse, die aus beliebigen Grössen a, b, ··· numerisch abgeleitet ist, einen Faktor p hinzuzufügen, kann man ihn in dem Ausdruck dieser Ableitung zu jeder der Grössen a, b, ··· auf entsprechende Weise hinzufügen, d. h.

$$[(\alpha a + \beta b + \cdots)p] = \alpha[ap] + \beta[bp] + \cdots \text{ und}$$
$$[p(\alpha a + \beta b + \cdots)] = \alpha[pa] + \beta[pb] + \cdots.$$

Beweis. $[(\alpha a+\beta b+\cdots)p]=[(\alpha a)p]+[(\beta b)p]+\cdots$ [39]
$$=\alpha[ap]+\beta[bp]+\cdots \quad [40].$$

42. Das Produkt zweier Faktoren, welche aus beliebigen Grössen numerisch abgeleitet sind, erhält man, indem man zuerst statt jedes Faktors eine der Grössen setzt, aus denen er abgeleitet ist, das so gewonnene Produkt mit dem Produkte der zu den substituirten Grössen gehörigen Ableitungszahlen multiplicirt, und die sämmtlichen Produkte, welche sich auf diese Weise bilden lassen, addirt, d. h.

$$[\sum\alpha_r a_r \sum\beta_s b_s] = \sum\alpha_r\beta_s[a_r b_s],$$

wo a_r, b_s beliebige Grössen, α_r, β_s beliebige Zahlen sind.

Beweis. $[\sum\alpha_r a_r \sum\beta_s b_s]=\sum\alpha_r[a_r\sum\beta_s b_s]$ [41]
$$=\sum\alpha_r(\beta_s[a_r b_s]) \quad [41]$$
$$=\sum\alpha_r\beta_s[a_r b_s] \quad [13].$$

§. 2. Produkt mehrerer Grössen.

43. Erklärung. Wenn aus einem Produkte ein anderes dadurch abgeleitet worden kann, dass man statt jedes Faktors, der in dem ersten Produkte vorkommt, einen andern (ihm gleichen oder von ihm verschiedenen) Faktor setzt, so nenne ich die beiden Produkte einander **entsprechend**, und nenne

jeden Faktor des ersten Produktes entsprechend dem für ihn substituirten des andern Produktes. Zweien Grössen oder zweien entsprechenden Produkten beziehungsweise zwei Faktoren in entsprechender Weise hinzufügen, heisst sie so hinzufügen, dass die entstehenden Produkte wieder einander entsprechend werden, und zwar so, dass der in dem einen und der in dem andern Produkte hinzugefügte Faktor entsprechende Faktoren werden, und die bisher einander entsprechenden Faktoren auch entsprechend bleiben. Ein Produkt, in welchem die Faktoren a, b, ··· irgend wie enthalten sind, werde ich, wo es angemessen scheint, mit $P_{a, b, \ldots}$ bezeichnen; dann drückt innerhalb derselben Entwickelung $P_{h, i, \ldots}$ das entsprechende Produkt aus, in welchem die Faktoren h, i, ··· der Reihe nach den Faktoren a, b, ··· entsprechen.

Anmerk. Diese Bestimmungen sind unentbehrlich, wenn man allen Zweideutigkeiten entgehen will. Denn da die Faktoren eines Produktes extensiver Grössen weder unter allen Umständen vertauscht, noch zu besonderen Produkten vereinigt werden dürfen, so ist die Art, wie ein Faktor in das Produkt eingeht, bestimmt zu fixiren. Als Beispiel zweier entsprechender Produkte seien die Produkte a(bc) und d(ef) gewählt, wo die Faktoren sich der Reihe nach entsprechen. Sollen zu ihnen noch beziehlich die Faktoren g und h in entsprechender Weise hinzugefügt werden, so kann dies auf verschiedene Arten geschehen, z. B. so, dass die Produkte a(bc)g und d(ef)h hervorgehen, oder a(bgc) und d(ehf) u. s. w. Was die Bedeutung ausgelassener Klammern betrifft, so verweise ich auf No. 7 Anmerkung.

44. Wenn ein gegebenes Produkt einen Faktor p enthält, der aus beliebigen Grössen a, b, c, ··· durch die Zahlen q, r, s abgeleitet ist, und man setzt in jenem Produkte statt des Faktors p nach und nach die Grössen a, b, c, ···, multiplicirt die so erhaltenen Produkte beziehlich mit q, r, s, ··· und addirt diese Ausdrücke, so ist ihre Summe gleich dem gegebenen Produkte, d. h.

$$P_{qa+rb+\ldots} = qP_a + rP_b + \cdots.$$

Beweis. Wie das Produkt auch beschaffen sei, immer kann man es so entstanden denken, dass zu dem Faktor p die übrigen Faktoren fortschreitend in bestimmter Weise hinzugetreten seien, nämlich so, dass zu p zuerst ein anderer Faktor (sei es als erster oder als zweiter Faktor des Produkts)

hinzugetreten sei, zu diesem Produkte wieder ein anderer und so fort. Statt nun aber einen Faktor zu einer numerisch abgeleiteten Grösse hinzuzufügen, kann man ihn, nach 41, in dem Ausdruck jener Ableitung zu jeder der Grössen, aus denen jene erstere abgeleitet war, auf entsprechende Weise hinzufügen. Folglich statt zu $p = qa + rb + \cdots$ die übrigen Faktoren in der genannten Weise fortschreitend hinzuzufügen, kann man sie in dem Ableitungsausdruck in entsprechender Weise zu jeder der Grössen a, b, ·· hinzufügen, d. h.

$$P_p = qP_a + rP_b + \cdots, \text{ wenn } p = qa + rb + \cdots.$$

45. Der Satz 42 gilt auch für mehr als zwei Faktoren, d. h.

$$[\sum q_r a_r \sum r_s b_s \cdots] = \sum q_r r_s \cdots [a_r b_s \cdots].$$

Beweis. Gilt der Satz für irgend eine Anzahl von Faktoren, z. B. für $[\sum q_r a_r \sum r_s b_s \cdots \sum \varkappa_m k_m]$, so dass also

(a) $$[\sum q_r a_r \sum r_s b_s \cdots \sum \varkappa_m k_m] = \sum q_r b_s \cdots \varkappa_m [a_r b_s \cdots k_m].$$

ist, so gilt er auch, wenn noch ein Faktor, z. B. $\lambda_n l_n$, hinzutritt; denn es ist

$$\begin{aligned}
&[\sum q_r a_r \sum r_s b_s \cdots \sum \varkappa_m k_m \sum \lambda_n l_n] \\
&= \sum q_r r_s \cdots \varkappa_m [a_r b_s \cdots k_m] \sum \lambda_n l_n && \text{(nach a)} \\
&= \sum q_r r_s \cdots \varkappa_m \lambda_n [a_r b_s \cdots k_m l_n] && [42].
\end{aligned}$$

Also wenn die Formel 45 für irgend eine Anzahl von Faktoren gilt, so gilt sie auch, wenn noch ein Faktor hinzutritt. Nun gilt sie aber, nach 42, für zwei Faktoren, also auch für drei, vier u. s. w., also für beliebig viele.

46. Statt die Faktoren eines Produktes mit einer Reihe von Zahlen zu multipliciren, kann man das ganze Produkt mit dem Produkte dieser Zahlen multipliciren, d. h.

$$P_{qa, rb, \ldots} = qr \cdots P_{a, b, \ldots}.$$

Beweis. Nach 44 ist $P_{qa} = qP_a$, also auch

$$\begin{aligned}
P_{qa, rb, sc \ldots} &= qP_{a, rb, sc, \ldots} && [44] \\
&= qrP_{a, b, sc, \ldots} && [44] \\
&\quad \text{u. s. w., endlich} \\
&= qrs \cdots P_{a, b, c, \ldots} && [44].
\end{aligned}$$

47. Zwei in einem Produkte vorkommende Faktoren, welche in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, kann man ohne Werthänderung des Produktes vertauschen, d. h.

$$P_{qa, ra} = P_{ra, qa}.$$

Beweis. Es ist

$$P_{qa,ra} = qrP_{a,a} \quad [46]$$
$$= rqP_{a,a} = P_{ra,qa} \quad [46].$$

§. 3. Die verschiedenen Arten der Produktbildung.

48. Erklärung. Wenn die Produktbildung dadurch näher bestimmt wird, dass zwischen den Produkten der Einheiten Zahlbeziehungen bestehen, so nenne ich jede Gleichung, welche eine solche Zahlbeziehung ausdrückt, eine zu jener Art der Produktbildung gehörige Bestimmungsgleichung. Einen Verein von p Bestimmungsgleichungen, von denen keine aus den übrigen gefolgert werden kann, nenne ich, wenn zwischen den Produkten keine andere Zahlbeziehung herrscht, als die aus jenen Gleichungen gefolgert werden kann, ein zu jener Produktbildung gehöriges System von Bestimmungsgleichungen.

49. Jedes System von m Bestimmungsgleichungen zwischen den n Einheitsprodukten $E_1, \cdots E_n$ kann auf die Form gebracht werden, dass jede der Gleichungen ausdrückt, wie aus $n - m$ jener Einheitsprodukte, z. B. aus $E_1 \cdots E_{n-m}$ die übrigen m numerisch ableitbar sind. Dann bilden $E_1 \cdots E_{n-m}$ ein System von Einheiten, aus denen alle Produkte, die zu dieser Produktbildung gehören, ableitbar sind.

Beweis. Nach 48 soll jede Gleichung des Systems der m Bestimmungsgleichungen eine Zahlbeziehung zwischen $E_1, \cdots E_n$ ausdrücken. Jede solche Zahlbeziehung wird sich, nach 16, auf die Form

$$\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_n E_n = 0$$

bringen lassen, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ nicht alle zugleich null sind. Es sei eine derselben betrachtet, und sei in ihr etwa α_n ungleich null, so kann man E_n durch $E_1, \cdots E_{n-1}$ ausdrücken. Substituirt man diesen Ausdruck in die übrigen $(m - 1)$ Gleichungen, so werden sie von der Form

$$\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_{n-1} E_{n-1} = 0.$$

In keiner der so erhaltenen Gleichungen dürfen die Zahlen $\alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}$ alle zugleich null werden, weil sonst diese Bestimmungsgleichung aus der ersten gefolgert werden könnte,

was dem Begriffe eines Systems von Bestimmungsgleichungen (nach 48) widerspricht. Es sei eine der so erhaltenen Gleichungen betrachtet, und sei in ihr etwa der Koefficient von E_{n-1} ungleich null; so wird E_{n-1} sich durch $E_1 \cdots E_{n-2}$ ausdrücken lassen, und wenn dieser Ausdruck in die übrigen $(m-2)$ Gleichungen eingeführt wird, so erhalten sie die Form

$$\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_{n-2} E_{n-2} = 0.$$

Da auf diese Weise durch die Anwendung jeder neuen Gleichung immer eine neue unter den Grössen $E_1 \cdots E_n$ aus den übrigen Gleichungen verschwindet, wir wollen annehmen, jedesmal die letzte unter den bis dahin vorhandenen, so behält man zuletzt nur noch die Grösse $E_1 \cdots E_{n-m}$, durch welche sich alle übrigen $E_{n-m+1} \cdots E_n$ ausdrücken lassen.

50. Erklärung. Jede Produktbildung, deren Bestimmungsgleichungen geltend bleiben, wenn man statt der darin vorkommenden Einheiten beliebige aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt, heisst eine lineale Produktbildung (Multiplikation).

51. Für Produkte aus zwei Faktoren giebt es ausser derjenigen Produktbildung, welche gar keine Bestimmungsgleichung hat, und derjenigen, deren Produkte alle null sind, nur zwei Gattungen linealer Produktbildung, und zwar ist das System der Bedingungsgleichungen für die eine

$$(1) \quad [e_r e_s] + [e_s e_r] = 0,$$

für die andere

$$(2) \quad [e_r e_s] = [e_s e_r],$$

wo für r und s, wenn $e_1, e_2, \cdots e_n$ die Einheiten sind, nach und nach jede 2 der Zahlen $1 \cdots n$ gesetzt werden sollen.

Beweis. Jede Bestimmungsgleichung wird bei zwei Faktoren, die aus den Einheiten $e_1 \cdots e_n$ abgeleitet sind, die Form haben

$$(a) \quad \sum \alpha_{r,s} [e_r e_s] = 0,$$

wo die Koefficienten $\alpha_{r,s}$ beliebige Zahlen sind, die aber nicht alle gleichzeitig null werden dürfen, und wo für r und s nach und nach je zwei der Werthe $1 \cdots n$ in die Summe eingeführt werden sollen. Wir nehmen an, die Produktbildung solle

eine lineale sein; d. h. nach 50, es soll jede Bestimmungsgleichung noch geltend bleiben, wenn man statt der Einheiten beliebige aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt. Man setze in (a) $\sum x_{r,u} e_u$ statt e_r und $\sum x_{s,v} e_v$ statt e_s, wo die Summen sich nur auf die Indices u und v beziehen, und $x_{r,u}$ und $x_{s,v}$ beliebig zu wählende Zahlen bedeuten. Dann erhalten wir

$$0 = \sum \alpha_{r,s} \left[\sum x_{r,u} e_u \sum x_{s,v} e_v \right]$$

$$= \sum \alpha_{r,s} \sum x_{r,u} x_{s,v} [e_u e_v] \qquad [45]$$

also $0 = \sum \alpha_{r,s} x_{r,u} x_{s,v} [e_u e_v]$ [13],

indem sich nun die Summe auf alle vier Werthe r, s, u, v bezieht. Vertauscht man hier r mit s und u mit v, was man kann, da r, s, u, v in jedem Gliede ganz beliebige der Zahlen $1 \cdots n$ sind, so erhält man

$$0 = \sum \alpha_{s,r} x_{s,v} x_{r,u} [e_v e_u],$$

und indem man diese Gleichung mit der obenstehenden addirt, erhält man

(b) $0 = \sum x_{r,u} x_{s,v} (\alpha_{r,s} [e_u e_v] + \alpha_{s,r} [e_v e_u])$,

eine Gleichung, welche für die Anwendung bequemer ist, als die beiden vorhergehenden. Sie muss für alle Werthe, die man den Grössen $x_{r,u}$, $x_{s,v}$ geben mag, gelten. Man setze nun in (b) irgend eine der Grössen $x_{r,u}$ etwa $x_{a,c}$ zuerst $= 1$, dann $= -1$, subtrahire die so erhaltenen zwei Gleichungen von einander, und dividire durch 2, so fallen alle Glieder weg, welche $x_{a,c}$ entweder keinmal oder zweimal enthielten, und es bleibt nur

$$\sum x_{s,v} (\alpha_{a,s} [e_c e_v] + \alpha_{s,a} [e_v e_c]) = 0,$$

wobei jedoch unter den Werthpaaren von s und v dasjenige auszulassen ist, für welches zugleich $s = a$ und $v = c$ ist. Setzt man nun hierin wieder irgend eine der Grössen $x_{s,v}$, z. B. $x_{b,d}$ zuerst gleich 1 und dann gleich -1, subtrahirt die so erhaltenen zwei Gleichungen und dividirt durch 2, so fallen wieder die Glieder weg, welche $x_{b,d}$ keinmal oder zweimal enthalten und es bleibt

(c) $\alpha_{a,b} [e_c e_d] + \alpha_{b,a} [e_d e_c] = 0$

zunächst nur für je vier Indices a, b, c, d, von denen nicht

gleichzeitig der erste dem zweiten, der dritte dem vierten gleich ist. Hierdurch reducirt sich die Gleichung (b) auf

$$0 = \sum x_{r,u} x_{r,u} \alpha_{r,r} [e_u e_u].$$

Setzt man hierin für eine der Grössen $x_{r,u}$, etwa für $x_{a,c}$, nach der Reihe zweieinander nicht entgegengesetzte Werthe, z. B. 1 und 2 ein, subtrahirt die so erhaltenen Gleichungen von einander und dividirt die Restgleichung in diesem Falle durch 3, so bleibt

$$0 = \alpha_{a,a} [e_c e_c],$$

d. h. die Gleichung (c) gilt auch für den vorher ausgeschlossenen Fall, dass $a = b$, $c = d$ ist.

Somit folgt aus der Gleichung (a), wenn sie eine lineale Bestimmungsgleichung sein, d. h. noch geltend bleiben soll, welche aus den Einheiten abgeleitete Grössen man auch statt derselben einführen mag, nothwendig die Gleichungsgruppe (c), aber auch umgekehrt, wenn die Gleichungsgruppe (c) gilt, so folgt aus ihr die Gleichung (b), welche ausdrückt, dass die Gleichung (a) lineal sei.

Setzen wir in (c) die Indices c und d einander gleich, so geht sie über in

(e) $(\alpha_{a,b} + \alpha_{b,a}) [e_c e_c] = 0,$

und setzen wir in ihr $a = b$, so geht sie über in

(f) $\alpha_{a,a} ([e_c e_d] + [e_d e_c]) = 0.$

In diesen gleich null gesetzten Produkten muss (nach 12, 6) jedesmal der eine oder der andere Faktor null sein.

Nehmen wir zuerst an $[e_c e_c]$ sei von null verschieden, so muss nothwendig für je zwei Indices a und b

$$\alpha_{a,b} + \alpha_{b,a} = 0, \text{ d. h. } -\alpha_{a,b} = \alpha_{b,a}$$

sein. Setzen wir dies in (c) ein, so erhalten wir

$$\alpha_{a,b} ([e_c e_d] - [e_d e_c]) = 0.$$

Sollte hier $[e_c e_d] - [e_d e_c]$ von null verschieden sein, so müsste der andere Faktor $\alpha_{a,b}$ für je zwei Indices a und b null sein, d. h. die Gleichung (a) würde identisch null gegen die Annahme. Somit muss in diesem Falle, wo $[e_c e_c]$ von null verschieden ist,

$$[e_c e_d] - [e_d e_c] = 0, \text{ d. h. } [e_c e_d] = [e_d e_c]$$

sein, d. h. es tritt die Gleichungsgruppe (50, 2) ein. Ist nun

im zweiten Falle $[e_c e_c] = 0$, oder, indem wir a statt c ſetzen $[e_a e_a] = 0$, ſo können wir dieſe Gleichung als Bestimmungsgleichung an die Stelle der Gleichung (a) ſetzen, dann ist $\alpha_{a,a} = 1$, während alle übrigen Koefficienten null ſind, und es folgt dann, indem wir dieſen Werth $\alpha_{a,a} = 1$ in (f) einſetzen,

$$[e_c e_d] + [e_d e_c] = 0,$$

d. h. es tritt die Gruppe (50, 1) ein. Nun wäre noch möglich, dass beide Gruppen (50, 1) und (50, 2) zugleich geltend wären. Allein dann würde folgen, dass $[e_c e_d] = 0$, alſo alle Produkte null wären, ein Fall, den wir oben ausgeschlossen hatten. Es ſind alſo keine andern linealen Produktbildungen möglich, als die im Satze genannten. Dass dieſe nun in der That lineale ſind, folgt ſogleich aus der Gleichung (c), verglichen mit (a). In der That, wenn

$$(g) \quad [e_a e_b] \mp [e_b e_a] = 0$$

die Bedingungsgleichungen ſind und man ſetzt irgend eine derſelben als die Gleichung (a), ſo ist für ſie $\alpha_{a,b} = 1$, $\alpha_{b,a} = \mp 1$, und alle übrigen Koefficienten ſind null. Dann geht die Gleichungsgruppe (c) über in

$$[e_c e_d] \mp [e_d e_c] = 0,$$

welche schon in der gegebenen Gruppe (g) enthalten waren. Alſo ſind jene beiden Gattungen der Produktbildung lineal und zwar die einzig möglichen ausser der bestimmungsloſen und der verschwindenden.

Anmerk. Soll alſo das bisher ſich von ſelbst darbietende Princip, dass nämlich jedes durch eine Gleichung ausdrückbare Geſetz auch bestehen bleibt, wenn man statt der Einheiten beliebige aus ihnen abgeleitete Grössen ſetzt, auch in der nächsten Entwickelung noch fortbestehen, ſo ist kein anderer Fortschritt möglich, als der zu den beiden genannten Produktbildungen. Nehmen wir der Einfachheit wegen nur zwei Einheiten e_1 und e_2 an, ſo ist das System der Bestimmungsgleichungen für die erste Gattung gleichzeitig

$$[e_1 e_1] = [e_2 e_2] = 0 \text{ und } [e_1 e_2] = -[e_2 e_1],$$

und für die zweite $[e_1 e_2] = [e_2 e_1]$.

In Bezug auf die Operationen ist die letztere Gattung die einfachere. Ja, da die Bestimmungsgleichungen derſelben nichts weiter ausdrücken als die Vertauschbarkeit der Faktoren, ſo ist dieſe Multiplikationsgattung, was die Operationen anlangt, identisch mit der gewöhnlichen Multiplikation der Algebra, weshalb ich ſie auch die

algebraische genannt habe*). Es versteht sich von selbst, dass ihr auch eine algebraische Division, Potenzirung u. s. w. zur Seite geht, und dass man für alle diese Verknüpfungen extensiver Grössen unmittelbar die algebraischen Gesetze als geltend annehmen darf. Hingegen ist diese Multiplikation, was die durch sie erzeugten Grössen betrifft, sehr viel komplicirter als die erstere Gattung, welche ich die kombinatorische genannt habe. In der That, betrachten wir bei zwei Einheiten e_1 und e_2 das Produkt zweier Faktoren $[(q_1 e_1 + q_2 e_2)(r_1 e_1 + r_2 e_2)] = q_1 r_1 [e_1 e_1] + q_2 r_2 [e_2 e_2] + q_1 r_2 [e_1 e_2] + q_2 r_1 [e_2 e_1]$, so reducirt sich dies bei der ersten Gattung, wo $[e_1 e_1] = [e_2 e_2] = 0$, $[e_2 e_1] = -[e_1 e_2]$ ist, auf $(q_1 r_2 - q_2 r_1)[e_1 e_2]$, also auf nur eine Einheit, nämlich $[e_1 e_2]$; ja, wenn in einer Entwickelungsreihe nie mehr als jene beiden ursprünglichen Einheiten e_1 und e_2 vorkommen, so wird man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, $[e_1 e_2] = 1$ setzen können, und erhält dann als Resultat der Multiplikation eine Zahl. Ganz anders bei der zweiten Gattung, wo sich jenes Produkt auf $q_1 r_1 [e_1 e_1] + q_2 r_2 [e_2 e_2] + (q_1 r_2 + q_2 r_1)[e_1 e_2]$ reducirt, also auf nicht weniger als drei Einheiten. Da es in der Entwickelung der Wissenschaft vor allen Dingen darauf ankommt, die nach und nach hervortretenden Grössen in ihrem einfachsten Begriffe zu erfassen, so ist hier der Uebergang zu der ersten Gattung der Multiplikation mit Nothwendigkeit geboten. Ja, da die durch algebraische Multiplikation extensiver Grössen erzeugten Gebilde nicht mehr als einfache Grössen sich darstellen, sondern vielmehr den Funktionen der Algebra sich parallel stellen, so werden wir dieser Multiplikation erst im zweiten Theile dieses Werkes wieder begegnen, welcher die Funktionen behandeln wird.

Ich verweise in Bezug auf die Entwickelung der verschiedenen Multiplikationsgattungen auf die vorher angeführte Abhandlung in Crelle's Journal. Dort habe ich für den obigen Satz einen zwar weitläuftigeren, aber elementareren Beweis gegeben. Die allgemeine Idee der Multiplikation, wie sie im ersten §. dieses Kapitels entwickelt ist, habe ich schon in der ersten Ausgabe meiner Ausdehnungslehre (§. 10–12) zu Grunde gelegt.

Kap. 3. Kombinatorisches Produkt.

§. 1. Allgemeine Gesetze der kombinatorischen Multiplikation.

52. Erklärung. Wenn die Faktoren eines Produktes P aus einem Systeme von Einheiten abgeleitet sind, und je zwei Produkte der Einheiten, welche durch Vertauschung der

*) Crelle Journal B. 49, S. 139.

beiden letzten Faktoren auseinander hervorgehen, zur Summe null geben, jedes Produkt aber, was lauter verschiedene Einheiten als Faktoren enthält, von null verschieden ist, so nenne ich jenes Produkt P ein kombinatorisches, und jene Faktoren desselben seine einfachen Faktoren; d. h. sind b und c Einheiten, A aber eine beliebige Reihe von Einheiten, so wird die angegebene Bestimmung ausgedrückt durch die Formel

$$[Abc] + [Acb] = 0.$$

Anm. Warum hier gerade mit dieser besonderen Multiplikationsgattung der Anfang gemacht wird, ist No. 50 Anmerk. entwickelt.

53. Man kann in jedem kombinatorischen Produkt die beiden letzten (einfachen) Faktoren vertauschen, wenn man nur zugleich das Vorzeichen $(\mp)$ in das entgegengesetzte verwandelt, d. h.

$$[Abc] + [Acb] = 0;$$

auch wenn A eine beliebige Reihe von Faktoren ist und b und c einfache Faktoren sind.

Beweis 1. Es seien zuerst b und c Einheiten. Da nun A eine beliebige Reihe von Faktoren ist, und die Faktoren aus den Einheiten numerisch ableitbar sind, so erhält man, indem man statt der Faktoren von A ihre Ableitungsausdrücke setzt, und die Klammern löst, (nach 45) einen Ausdruck, der aus den Produkten der Einheiten numerisch ableitbar ist, also die Form hat

$$A = \sum \alpha_r E_r,$$

wo E_r Produkte der Einheiten sind. Setzt man dies ein, so wird

$$\begin{aligned}
[Abc] + [Acb] &= [\sum \alpha_r E_r bc] + [\sum \alpha_r E_r cb] \\
&= \sum \alpha_r [E_r bc] + \sum \alpha_r [E_r cb] && [44] \\
&= \sum \alpha_r ([E_r bc] + [E_r cb]) && [12, 4] \\
&= \sum \alpha_r 0 && [52] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Es seien b und c aus den Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ numerisch abgeleitet, und sei

$$b = \sum \beta_r e_r, \quad c = \sum \gamma_r e_r,$$

so ist

$$\begin{aligned}[Abc] + [Acb] &= [A\sum\beta_r e_r \sum\gamma_r e_r] + [A\sum\gamma_r e_r \sum\beta_r e_r] \\ &= \sum\beta_r\gamma_s[Ae_r e_s] + \sum\gamma_s\beta_r[Ae_s e_r] \qquad [46] \\ &= \sum\beta_r\gamma_s([Ae_r e_s] + [Ae_s e_r]) \qquad [12] \\ &= \sum\beta_r\gamma_s \cdot 0 \qquad [\text{Beweis 1}] \\ &= 0.\end{aligned}$$

54. In einem kombinatorischen Produkte kann man beliebige zwei aufeinander folgende einfache Faktoren vertauschen, wenn man zugleich das Zeichen (∓) umkehrt, d. h.

$$[AbcD] + [AcbD] = 0,$$

wenn A und D beliebige Faktorenreihen, b und c einfache Faktoren sind.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}[AbcD] + [AcbD] &= [[Abc]D] + [[Acb]D] \qquad [38] \\ &= [([Abc] + [Acb])D] \qquad [40] \\ &= 0 \cdot D \qquad [53] \\ &= 0.\end{aligned}$$

55. In einem kombinatorischen Produkte kann man beliebige zwei einfache Faktoren vertauschen, wenn man zugleich das Zeichen (∓) umkehrt, d. h.

$$P_{a,b} = -P_{b,a}, \text{ oder } P_{a,b} + P_{b,a} = 0.$$

Beweis. Angenommen, zwischen a und b stehen in $P_{a,b}$ noch n einfache Faktoren. Vertauscht man jetzt b mit dem nächst vorhergehenden Faktor, d. h. rückt man b um eine Stelle nach links, so ändert sich (nach 54) das Zeichen; rückt man also b nach und nach über die n Faktoren hinweg, welche ursprünglich zwischen a und b standen, so ändert sich das Zeichen n-mal, jetzt folgt b unmittelbar auf a, vertauscht man jetzt a mit b, so ändert sich das Zeichen noch einmal. Jetzt steht b auf der Stelle, wo ursprünglich a stand; um nun auch a auf die Stelle zu bringen, wo ursprünglich b stand, hat man nun noch a um n Stellen nach rechts zu rücken, wobei sich das Zeichen noch n-mal ändert. Im Ganzen hat es sich $2n + 1$ mal geändert; durch die $2n$-malige Aenderung wird das Zeichen aber wieder das ursprüngliche, und da nun noch die einmalige Aenderung hinzukommt, so ist das letzte Zeichen dem ursprünglichen entgegengesetzt, also

$$P_{a,b} = P_{b,a}, \text{ oder } P_{a,b} + P_{b,a} = 0.$$

56. Erklärung. Wenn von zwei Grössenreihen jede die Grössen a und b enthält, und zwar jede derselben einmal, und in beiden Reihen a früher steht als b, oder in beiden b früher steht als a, so sage ich, diese beiden Grössen seien in jenen Reihen gleich geordnet, hingegen sie seien in jenen Reihen entgegengesetzt geordnet, wenn in der einen a früher steht als b, in der andern b früher als a.

57. Zwei kombinatorische Produkte, welche dieselben einfachen Faktoren (aber in verschiedener Folge) enthalten, sind einander gleich oder entgegengesetzt, je nachdem die Anzahl der in beiden Produkten einander entgegengesetzt geordneten Faktorenpaare gerade oder ungerade ist, d. h.

$$P = (-1)^r Q,$$

wenn P und Q kombinatorische Produkte sind, welche dieselben einfachen Faktoren enthalten, und wenn r die Anzahl der Faktorenpaare ist, welche in P entgegengesetzt geordnet sind, wie in Q.

Beweis. Wenn zuerst je zwei Faktoren, welche in dem einen Produkte, etwa in Q, unmittelbar aufeinander folgen, in beiden Produkten gleich geordnet sind, so leuchtet ein, dass dann beide Produkte identisch sind, und sie also kein entgegengesetzt geordnetes Faktorenpaar enthalten können. So lange es daher in Q noch Faktorenpaare giebt, welche entgegengesetzt geordnet sind, wie in P, so giebt es auch noch mindestens zwei Faktoren, welche in Q unmittelbar aufeinander folgen, und welche in Q entgegengesetzt geordnet sind wie in P. Angenommen, a und b seien zwei solche Faktoren. Vertauscht man sie untereinander, so erhält man ein Produkt Q_1, welches dem Produkte Q (nach 54) entgegengesetzt bezeichnet ist, und in welchem alle Faktorenpaare, mit Ausnahme des Faktorenpaares a, b, ebenso geordnet sind wie in Q, während dies Faktorenpaar a, b in Q_1 entgegengesetzt geordnet ist wie in Q, also ebenso geordnet wie in P. Also ist die Anzahl der Faktorenpaare, welche in Q_1 und P entgegengesetzt geordnet sind, um 1 kleiner, als die Anzahl derer, welche in Q und P entgegengesetzt geordnet sind. Ist diese letztere Anzahl also r, so ist die erstere r — 1. Ist

nun $r-1$ noch nicht null, d. h. giebt es noch Faktorenpaare, welche in Q_1 und P entgegengefetzt geordnet find, fo kann man mit Q_1 wieder fo verfahren wie vorher mit Q; man erhalte dadurch aus Q_1 das Produkt Q_2, fo ist $Q_2 = -Q_1$, alfo $=(-1)^2 Q$, und die Anzahl der Faktorenpaare, welche in Q_2 und P entgegengefetzt geordnet find, ist $r-2$. Fährt man in diefer Weife fort, bis man zu Q_r gelangt, fo wird $Q_r = (-1)^r Q$, und die Anzahl der Faktorenpaare, die in Q_r und P entgegengefetzt geordnet find, beträgt $r-r$, alfo null, d. h. die Faktorenpaare in Q_r und P find fämmtlich gleich geordnet, alfo $Q_r = P$, fomit $P = Q_r = (-1)^r Q$.

58. Wenn man in einem kombinatorischen Produkte eine Reihe von r einfachen Faktoren mit einer unmittelbar darauf folgenden Reihe von s einfachen Faktoren vertauscht (ohne im Uebrigen die Ordnung der Faktoren zu ändern), fo ist das fo hervorgehende Produkt dem urfprünglichen gleich oder entgegengefetzt, je nachdem rs gerade oder ungerade ist, d. h.

$$[BC] = (-1)^{rs}[CB], \quad [ABC] = (-1)^{rs}[ACB],$$

wo B eine Reihe von r, C von s einfachen Faktoren darstellt.

Beweis. Es fei $C = c_1 c_2 \cdots c_s$, alfo

$$[ABC] = [ABc_1 c_2 \cdots c_s].$$

Vertauscht man nun c_1 mit dem letzten einfachen Faktor von B, d. h. rückt man c_1 um Eine Stelle vor, fo ändert fich (nach 55) das Vorzeichen des ganzen Produktes; rückt c_1 alfo um s einfache Faktoren vor, d. h. rückt man ihn vor die Faktoren von B, fo ändert fich das Zeichen r mal, alfo wird

$$\begin{aligned}
[ABc_1 c_2 \cdots c_s] &= (-1)^r [Ac_1 Bc_2 c_3 \cdots c_s], \text{ alfo dies} \\
&= (-1)^r (-1)^r [Ac_1 c_2 Bc_3 \cdots c_s] \\
&= (-1)^{2r} [Ac_1 c_2 Bc_3 \cdots c_s] \\
&= (-1)^{3r} [Ac_1 c_2 c_3 Bc_4 \cdots c_s] \text{ u. f. w.} \\
&= (-1)^{sr} [Ac_1 c_2 \cdots c_s B] \text{ oder}
\end{aligned}$$

$$[ABC] = (-1)^{rs}[ACB],$$

und wenn man hierin $A = 1$ fetzt

$$[BC] = (-1)^{rs}[CB].$$

59. Wenn man in einem kombinatorischen Produkte eine Reihe von q einfachen Faktoren mit einer durch r ein-

fache Faktoren getrennten Reihe von s einfachen Faktoren vertauscht, so ist das so hervorgehende Produkt dem ursprünglichen gleich oder entgegengesetzt, je nachdem $rs + sq + qr$ gerade oder ungerade ist, d. h.

$$[ABC] = (-1)^{rs+sq+qr}[CBA],$$

wo A, B, C Reihen von beziehlich q, r, s einfachen Faktoren darstellen.

Beweis. Es ist

$$[ABC] = (-1)^{(q+r)s}[CAB] \qquad [57]$$
$$= (-1)^{qs+rs}(-1)^{qr}[CBA] \qquad [57]$$
$$= (-1)^{rs+sq+qr}[CBA].$$

60. Wenn zwei einfache Faktoren eines kombinatorischen Produktes einander gleich sind, so ist das Produkt null, d. h.

$$P_{a,a} = 0.$$

Beweis. Es sei $P_{a,b}$ irgend ein kombinatorisches Produkt, welches die Faktoren a und b enthält, und $P_{b,a}$ das durch Vertauschung von a und b aus ihm hervorgehende, so ist (nach 55)

$$P_{a,b} + P_{b,a} = 0,$$

also, wenn a gleich b ist,

$$P_{a,a} + P_{a,a} = 0, \text{ d. h. } 2P_{a,a} = 0,$$

somit auch $P_{a,a} = 0$.

61. Ein kombinatorisches Produkt ist null, wenn zwischen seinen einfachen Faktoren eine Zahlbeziehung herrscht, d. h.

$$[a_1 a_2 a_3 \cdots a_m] = 0,$$

wenn eine der Grössen $a_1 \cdots a_m$ sich aus den übrigen numerisch ableiten lässt, z. B.

$$a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots \alpha_m a_m$$

ist.

Beweis. Man erhält, indem man den Werth von a_1 in das Produkt einsetzt

$$[a_1 a_2 a_3 \cdots a_m] = [(\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots \alpha_m a_m) a_2 a_3 \cdots a_m], \text{ also}$$
(nach 44)
$$= \alpha_2 [a_2 a_2 a_3 \cdots a_m] + \alpha_3 [a_3 a_2 a_3 \cdots a_m] + \cdots$$
$$\alpha_m [a_m a_2 a_3 \cdots a_m]$$
$$= \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \cdots \alpha_m \cdot 0 \qquad [59]$$
$$= 0.$$

62. Erklärung. Unter der Determinante aus n Reihen von je n Zahlen versteht man, wenn man die r-te Zahl der s-ten Reihe mit $\alpha_r^{(s)}$ bezeichnet, dasjenige Polynom, welches man aus dem Produkte $\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\cdots\alpha_n^{(n)}$ dadurch erhält, dass man in ihm nach und nach die unteren Indices auf alle möglichen Arten verfetzt, während man die oberen unverändert lässt, dann jedes diefer Produkte mit dem + oder − Zeichen verfieht, je nachdem die Anzahl derjenigen Paare von Indices, welche unten entgegengefetzt geordnet find wie oben, gerade oder ungerade ist und diefe fämmtlichen Glieder addirt. Man bezeichnet diefe Determinante mit $\sum \mp \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\cdots\alpha_n^{(n)}$, d. h. man fetzt

$$\sum \mp \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\cdots\alpha_n^{(n)} = \sum (-1)^u \alpha_r^{(1)}\alpha_s^{(2)}\cdots\alpha_w^{(n)},$$

wo r, s, ···· w die Zahlen 1, 2 ···· n, in irgend einer Ordnung genommen, gleich find, wo die Summe fich auf alle möglichen Ordnungen diefer Art bezieht, und u die Anzahl der Index-Paare bezeichnet, welche unten entgegengefetzt geordnet find, wie oben.

Anmerk. Der Vollständigkeit wegen habe ich diefen Begriff der Determinante hier aufstellen zu müssen geglaubt, zumal da es zweckmässig schien, die Zeichenbestimmung in der einfachen Form, wie fie hier dargestellt ist, festzufetzen, während die fonst gebräuchliche, durch Cauchy eingeführte Form der Zeichenbestimmung ein Zurückgehen auf die Permutations-Gefetze nothwendig machen würde. Dass man übrigens statt der unteren Indices auch die oberen vertauschen kann, leuchtet ein, doch ist es unangemessen, eine folche zwiefache Bestimmung in eine strenge Definition aufzunehmen.

63. Das kombinatorische Produkt von n einfachen Faktoren, welche aus n Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ numerisch abgeleitet find, erhält man, indem man aus den n Reihen von Zahlen, durch welche jene Faktoren aus den n Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ abgeleitet find, die Determinante bildet, und diefe mit dem kombinatorischen Produkte der Grössen $a_1 \cdots a_n$ multiplicirt, wobei nämlich die Zahlen, durch welche der erste jener Faktoren aus $a_1 \cdots a_n$ abgeleitet ist, die erste Reihe bilden, u. f. f., d. h. es ist

$$[\alpha_1^{(1)}a_1 + \cdots \alpha_n^{(1)}a_n)(\alpha_1^{(2)}a_1 + \cdots \alpha_n^{(2)}a_n)\cdots(\alpha_1^{(n)}a_1 + \cdots \alpha_n^{(n)}a_n)]$$
$$= \sum \mp \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\cdots\alpha_n^{(n)} \cdot [a_1 a_2 \cdots a_n].$$

Beweis. Es ist (nach 65) das Produkt auf der linken Seite

$$= \sum \overline{\alpha_r^{(1)} \alpha_s^{(2)} \cdots \alpha_w^{(n)} [a_r a_s \cdots a^w]},$$

wo jeder der Indices r, s, ··· w nach und nach jeden der Werthe 1 ···· n annehmen soll. Sind von diesen Werthen zwei oder mehrere einander gleich, so enthält das Produkt $[a_r a_s \cdots a^w]$ gleiche Faktoren, ist also (nach 60) null. Lassen wir daher die Glieder, welche diese Produkte enthalten, weg, so bleiben nur die übrig, in denen die n Indices r, s, ··w in irgend welcher Ordnung den Werthen 1, 2, ··· n gleich sind. Es ist also dann (nach 57) das Produkt $[a_r a_s \cdots a^w]$ gleich $(-1)^u [a_1 a_2 \cdots a_n]$, wenn u die Anzahl der Faktorenpaare ist, welche in dem Produkte $[a_r a_s \cdots a^w]$ entgegengesetzt geordnet sind wie in $[a_1 a_2 \cdots a_n]$, d. h. die Anzahl derjenigen Paare von Indices, welche in dem Produkte $\alpha_r^{(1)} \alpha_s^{(2)} \cdots \alpha_w^{(n)}$ unten entgegengesetzt geordnet sind wie oben, somit ist das gegebene Produkt

$$= \sum \overline{(-1)^u \alpha_r^{(1)} \alpha_s^{(2)} \cdots \alpha_w^{(n)} [a_1 a_2 \cdots a_n]}, \text{ d. h. (nach 62)}$$
$$= \sum \mp \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \cdots \alpha_n^{n} \cdot [a_1 a_2 \cdots a_n].$$

64. Erklärung. Unter multiplikativen Kombinationen aus einer Reihe von Grössen verstehe ich die Kombinationen ohne Wiederholung aus diesen Grössen, und zwar jede Kombination aufgefasst als kombinatorisches Produkt, dessen einfache Faktoren die Elemente der Kombination sind; so z. B. sind [ab], [ac], [bc] die multiplikativen Kombinationen aus den Grössen a, b, c zur zweiten Klasse.

65. Jedes kombinatorische Produkt von m einfachen Faktoren, welche aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen $a_1 \cdots a_n$ numerisch abgeleitet sind, ist aus den multiplikativen Kombinationen dieser Grössen zur m-ten Klasse numerisch ableitbar, und zwar ist die zu irgend einer dieser Kombinationen gehörige Ableitungszahl die Determinante aus denjenigen m Ableitungszahlen jener m Faktoren, welche zu den m Elementen dieser Kombination gehören, d. h.

$$[\sum \overline{\alpha_s a_s} \sum \overline{\beta_\mathfrak{s} a_\mathfrak{s}} \cdots] = \sum \overline{\sum \mp \alpha_r \beta_s \cdots [a_r a_s \cdots]},$$

wo $r < s < \cdots$.

Beweis. Es ist

$$[\sum \alpha_a a_a \sum \beta_b a_b \cdots] = \sum (\alpha_a \beta_b \cdots)[a_a a_b \cdots] \quad [45].$$

Da (nach 60) $[a_a a_b \cdots]$ null ist, sobald zwei der Faktoren, also hier zwei der Indices a, b, $\cdots$ gleich sind, so können wir die Bedingung hinzufügen, dass a, b, $\cdots$ alle von einander verschieden seien. Nun seien a, b, $\cdots$, nachdem sie steigend geordnet sind, $= r, s, t \cdots$, also $r < s < t \cdots$, und sei u die Anzahl der Grössenpaare, welche in der Reihe a, b, c, $\cdots$ entgegengesetzt geordnet sind, wie in r, s, t, $\cdots$, so ist $[a_a a_b \cdots] = (-1)^u [a_r a_s \cdots]$, somit ist das gegebene Produkt

$$= \sum \alpha_a \beta_b \cdots (-1)^u [a_r a_s \cdots].$$

Aber nach der Definition (60) ist $\sum (-1)^u \alpha_a \beta_b \cdots$, wenn a, b, $\cdots$ in irgend einer Ordnung genommen, gleich r, s, $\cdots$ sind, gleich der Determinante $\sum \mp \alpha_r \beta_s \cdots$, also

$$[\sum \alpha_a a_a \sum \beta_b a_b \cdots] = \sum \sum \mp \alpha_r \beta_s \cdots [a_r a_s \cdots],$$

wo $r < s < \cdots$.

66. Umkehrung von 61. Wenn ein kombinatorisches Produkt null ist, so stehen seine einfachen Faktoren in einer Zahlbeziehung zu einander, d. h. wenn

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = 0$$

ist, so muss sich eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_m a_m = 0$$

aufstellen lassen, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ nicht alle zugleich null sind.

Beweis. Es sei das kombinatorische Produkt

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = 0.$$

Zu zeigen ist, dass $a_1, a_2, \cdots a_m$ in einer Zahlbeziehung stehen müssen.

Angenommen, sie ständen in keiner Zahlbeziehung zu einander. Bilden dann $e_1 \cdots e_n$ das System der Einheiten, aus denen $a_1 \cdots a_n$ numerisch abgeleitet sind, so kann man (nach 20) zu den m Grössen $a_1 \cdots a_m$ noch n − m Grössen $a_{m+1} \cdots a_n$ annehmen, so sich aus $a_1 \cdots a_n$ die Einheiten $e_1 \cdots e_n$ numerisch ableiten lassen. Führt man die Ausdrücke dieser Ableitungen in das kombinatorische Produkt $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ ein,

und löst die Klammern auf, so erhält man (nach 63) eine Gleichung der Form

$$[e_1e_2\cdots e_n] = \alpha[a_1a_2\cdots a_n],$$

wo α eine Zahl ist. Nun ist aber $[a_1a_2\cdots a_m] = 0$, also auch $[a_1a_2\cdots a_ma_{m+1}\cdots a_n] = 0$, also

$$[e_1e_2\cdots e_n] = \alpha\cdot 0 = 0.$$

Dies widerstreitet aber der Erklärung in 52, nach welcher $[e_1e_2\cdots e_n]$ von null verschieden ist. Also ist die Annahme, dass $a_1\cdots a_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, unmöglich. Sie stehen also in einer Zahlbeziehung zu einander.

67. Ein kombinatorisches Produkt ändert seinen Werth nicht, wenn man zu einem einfachen Faktor desselben ein beliebiges Vielfaches eines andern einfachen Faktors desselben Produktes addirt, d. h.

$$P_{a,b+qa} = P_{a,b},$$

wenn q eine Zahl ist und P ein kombinatorisches Produkt bezeichnet.

Beweis. Es ist

$$P_{a,b+qa} = P_{a,b} + qP_{a,a} \qquad [44]$$
$$= P_{a,b} \qquad [60].$$

68. Die sämmtlichen Sätze kombinatorischer Multiplikation bleiben noch bestehen, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten, beliebige n aus ihnen abgeleitete Grössen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, einführt.

Beweis. Erstens gelten alle in der Definition des kombinatorischen Produktes gegebenen Bestimmungen, auch wenn man statt des Systems der n ursprünglichen Einheiten n solche Grössen setzt, wie sie der Lehrsatz bestimmt. Nämlich, es ist auch für diesen Fall (nach 53)

$$[Abc] + [Acb] = 0,$$

und das Produkt der sämmtlichen n Grössen ist von null verschieden, denn wäre es gleich null, so müsste (nach 66) zwischen den n Faktoren eine Zahlbeziehung herrschen, gegen die Voraussetzung. Diese beiden Bestimmungen waren nun die einzigen in der Definition enthaltenen. Ferner gelten aber auch alle in den ersten beiden Kapiteln entwickelten Gesetze für den Fall jener Substitution. Aus jener Definition und

diesen Gesetzen waren aber die sämmtlichen Gesetze der kombinatorischen Multiplikation abgeleitet. Also gelten diese Gesetze auch nach jener Substitution.

§. 2. Das kombinatorische Produkt als Grösse.

Vorbemerkung. Wenn eine Verknüpfung von Grössen wieder als Eine Grösse erkannt werden soll, so müssen die folgenden Fragen beantwortet werden: Wann sind zwei solche Verknüpfungen einander gleich oder von einander verschieden? wann stehen sie in einer Zahlbeziehung zu einander, und in welcher? Für die Vollendung des Begriffs wird es dann noch wichtig sein, die sämmtlichen verschiedenen Grössenreihen ableiten zu können, deren jede, wenn sie der fraglichen Verknüpfung unterworfen wird, dieselbe Grösse liefert, wie die andern. Diese Fragen sollen hier für das kombinatorische Produkt beantwortet werden, wobei wir den Begriff der multiplikativen Kombinationen zu Grunde legen.

69. Wenn die Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so stehen auch ihre multiplikativen Kombinationen zu einer beliebigen Klasse in keiner Zahlbeziehung zu einander, d. h. die Gleichung

$$\text{a)} \quad \alpha A + \beta B + \cdots = 0,$$

in welcher A, B, $\cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_n$ zu irgend einer Klasse sind, und $\alpha, \beta, \cdots$ Zahlen bedeuten, wird ersetzt durch die Gleichungsgruppe

$$\text{b)} \quad \alpha = 0, \ \beta = 0, \ \cdots.$$

Beweis. Es sei die Gleichung (a) als geltend angenommen. Man multiplicire die ganze Gleichung kombinatorisch mit denjenigen unter den Grössen $a_1 \cdots a_n$, welche in dem Produkte A nicht vorkommen; es sei A_1 diese Faktorenreihe, so dass also das kombinatorische Produkt $[AA_1]$ die sämmtlichen Grössen $a_1 \cdots a_n$ als Faktoren enthält. Dann erhält man

$$\alpha[AA_1] + \beta[BA_1] + \cdots = 0.$$

Da nun A und B verschiedene Kombinationen sind, so muss B wenigstens einen Faktor enthalten, der nicht in A enthalten ist. Es sei a_r ein solcher; so muss a_r in A_1 enthalten sein, da A_1 von den Faktoren $a_1 \cdots a_n$ alle diejenigen

enthält, die in A nicht vorkommen. Somit kommt a_r sowohl in B als in A_1 vor, folglich ist das kombinatorische Produkt $[BA_1]$ (nach 60) null. Aus demselben Grunde auch CA_1 u. s. w. Somit reducirt sich die Gleichung auf

$$\alpha[AA_1] = 0.$$

Also muss (nach 12, 6) entweder α oder $[AA_1]$ null sein. Da nun $[AA_1]$ ein kombinatorisches Produkt von n Grössen $a_1 \cdots a_n$ ist, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so ist dasselbe ungleich null (nach 66). Somit muss der andere Faktor, also α, null sein. Aus demselben Grunde sind $\beta, \cdots$ null, d. h. zwischen den Kombinationen A, B, $\cdots$ herrscht keine Zahlbeziehung.

70. Zwei kombinatorische Produkte (A und B), die nicht null sind, stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn die aus ihren einfachen Faktoren ableitbaren Gebiete identisch sind; d. h.

a) $A \equiv B$

dann und nur dann, wenn die einfachen Faktoren von A dasselbe Gebiet liefern wie die von B; oder:

b) $[a_1 a_2 \cdots a_m] \equiv [b_1 b_2 \cdots b_m]$

dann und nur dann, wenn sich jede aus $a_1 \cdots a_m$ numerisch ableitbare Grösse auch aus $b_1 \cdots b_m$ ableiten lässt, also wenn stets

c) $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots x_m a_m = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots y_m b_m$

gesetzt werden kann, welche Werthe auch entweder $x_1 \cdots x_m$, oder $y_1 \cdots y_m$ haben mögen.

Beweis 1. Angenommen zuerst, das Gebiet $a_1 \cdots a_m$ sei identisch dem Gebiete $b_1 \cdots b_m$, so sind die Grössen $a_1 \cdots a_m$ aus $b_1 \cdots b_m$ numerisch ableitbar. Dann ist (nach 63)

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = \alpha[b_1 b_2 \cdots b_m],$$

wo α eine Zahl ist (nämlich die dort beschriebene Determinante). Diese Gleichung drückt aus, dass die beiden kombinatorischen Produkte in Zahlbeziehung stehen und da auch keins von beiden null ist, so gilt (nach 2) die Kongruenz:

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] \equiv [b_1 b_2 \cdots b_m].$$

2. Umgekehrt sei angenommen, diese Kongruenz gelte, also die beiden kombinatorischen Produkte stehen in einer Zahlbeziehung zu einander ohne null zu sein, und sei

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = \alpha[b_1 b_2 \cdots b_m].$$

Man füge auf beiden Seiten den kombinatorischen Faktor b_1 hinzu, so erhält man

$$[a_1 a_2 \cdots a_m b_1] = \alpha[b_1 b_2 \cdots b_m b_1].$$

Aber $[b_1 b_2 \cdots b_m b_1]$ ist, da es zwei gleiche Faktoren (b_1) enthält, (nach 60) null; also ist auch

$$[a_1 a_2 \cdots a_m b_1] = 0.$$

Folglich stehen (nach 66) die einfachen Faktoren dieses Produktes, d. h. $a_1, a_2, \cdots a_m, b_1$ in einer Zahlbeziehung zu einander. Also muss sich (nach 16) eine Gleichung der Form

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_m a_m + \beta_1 b_1 = 0$$

aufstellen lassen, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m, \beta_1$ nicht alle zugleich null sind. In dieser Gleichung kann auch β_1 nicht null sein, weil sonst zwischen den Grössen $a_1, a_2, \cdots a_m$ (nach 16) eine Zahlbeziehung herrschen, also das kombinatorische Produkt $[a_1 a_2 \cdots a_m]$ (nach 61) null sein müsste, was der Voraussetzung widerstreitet. Wenn nun aber β_1 ungleich null ist, so kann man die obige Gleichung durch β_1 dividiren, und erhält

$$b_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} a_1 - \frac{\alpha_2}{\beta_2} a_2 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\beta_m} a_m,$$

d. h. b_1 ist aus $a_1 \cdots a_m$ numerisch ableitbar. Aus demselben Grunde sind auch $b_2, b_3, \cdots b_m$ aus $a_1 \cdots a_m$ numerisch ableitbar. Nun stehen aber auch $b_1, \cdots b_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, weil sonst das kombinatorische Produkt $[b_1 b_2 \cdots b_m]$ (nach 61) null sein müsste, was der Voraussetzung widerstreitet; also sind m Grössen $b_1 \cdots b_m$, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus m Grössen $a_1 \cdots a_m$ numerisch ableitbar, folglich ist (nach 21) das aus der ersten Grössenreihe ableitbare Gebiet dem aus der zweiten ableitbaren identisch.

Anm. Da zwei gleiche Grössen immer in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so folgt aus dem vorhergehenden Satze unmittelbar, dass zwei gleiche kombinatorische Produkte immer ein und dasselbe Gebiet haben, dem seine einfachen Faktoren angehören, und dass daher ausser diesem Gebiete nur noch der durch eine Zahl darstellbare metrische Werth gegeben zu sein braucht, damit der ganze Werth des kombinatorischen Produktes genau bestimmt sei. Ist nämlich dann in dem Gebiete irgend ein kombinatorisches Produkt gegeben, aus dessen einfachen Faktoren dasselbe ableitbar ist, so wird

jedes andere kombinatorische Produkt, aus deſſen einfachen Faktoren daſſelbe Gebiet ableitbar iſt, durch eine einfache Zahl beſtimmt ſein, welche das Verhältniss dieſes Produktes zu jenem darſtellt.

71. Erklärung. Wenn man aus einer Reihe von Grössen eine zweite Reihe dadurch ableitet, dass man zu irgend einer Grösse der Reihe ein Vielfaches der benachbarten Grösse der Reihe addirt, während man alle übrigen Grössen der Reihe ungeändert lässt, ſo ſage ich, es ſei die erſte Reihe in die zweite durch eine einfache lineale Aenderung umgewandelt; leitet man aus dieſer zweiten Reihe wieder durch einfache lineale Aenderung eine dritte ab, u. ſ. f., ſo ſage ich, es ſei die erſte Reihe in die letzte durch mehrfache lineale Aenderung umgewandelt. In beiden Fällen alſo ſage ich, es ſei die erſte Reihe in die letzte durch lineale Aenderung umgewandelt.

Wenn alſo p und q irgend zwei aufeinander folgende Grössen der Reihe ſind, ſo lässt ſich durch einfache lineale Aenderung umwandeln die Reihe

$$\cdots p, q, \cdots \text{ in } \cdots p + \alpha q, q \cdots$$
$$\text{oder in } \cdots p, q + \alpha p, \cdots,$$

wo α eine beliebige Zahl ist.

Anm. Die Wahl des Ausdrucks bezieht ſich auf den Gegenſatz zu einer weiter unten zu behandelnden Aenderung, welche ich circuläre Aenderung nenne. Beide Ausdrücke gehen auf die Geometrie zurück und zwar auf die beiden Fundamentalgebilde der Geometrie, die gerade Linie und den Kreis, oder vielmehr auf das Lineal und den Zirkel, indem, wie ich ſpäter zeigen werde, die lineale Aenderung in der Geometrie ſich einfach mittelst des Lineals, die circuläre mittelst des Zirkels bewerkstelligen lässt.

72. Bei der linealen Aenderung einer Grössenreihe bleibt das kombinatorische Produkt dieſer Grössenreihe ungeändert.

Beweis. Nach 67 ändert ein kombinatorisches Produkt ſeinen Werth nicht, wenn man zu einem Faktor ein beliebiges Vielfaches eines andern Faktors desſelben addirt, alſo ändert es ſeinen Werth nicht bei einfacher linealer Aenderung ſeiner Faktoren, alſo auch nicht bei mehrfacher.

73. Man kann durch lineale Aenderung zwei beliebige Grössen einer Reihe beliebig im umgekehrten Verhältniss

ändern; d. h. es lässt sich durch lineale Aenderung umwandeln die Reihe

$$\cdots p \cdots q \cdots \text{ in } \cdots \alpha p \cdots \frac{q}{\alpha} \cdots .$$

Beweis. Erstens seien p und q zwei aufeinander folgende Grössen der Reihe, so lässt sich (nach 71) durch lineale Aenderung nach und nach verwandeln:

p, q in $p, q + (\alpha - 1)p$, dies wieder in $p + q + (\alpha - 1)p, q + (\alpha - 1)p$, d. h. in $\alpha p + q, q + (\alpha - 1)p$;

dies in $\alpha p + q, q + (\alpha - 1)p - \frac{\alpha - 1}{\alpha}(\alpha p + q)$, d. h.

in $\alpha p + q, \frac{q}{\alpha}$, und dies endlich in $\alpha p + q - q, \frac{q}{\alpha}$,

d. h. in $\alpha p, \frac{q}{\alpha}$.

Zweitens: Sind p und q durch die Grössen $p_1, p_2, \cdots p_n$ getrennt, so verwandelt sich durch lineale Aenderung, indem man die im ersten Theil als zulässig erwiesene Umwandlung anwendet,

$$p, p_1, p_2, \cdots p_n, q \text{ in } \alpha p, \frac{p_1}{\alpha}, p_2 \cdots p_n, q,$$

dies in $\alpha p, p_1, p_2 : \alpha, p_3 \cdots p_n, q$,

und, indem man so fortfährt, so erhält man zuletzt

$$\alpha p, p_1, p_2, \cdots p_n, \frac{q}{\alpha}, \text{ d. h.}$$

$$p \cdots q \cdots \text{ geht über in } \cdots \alpha p \cdots \frac{q}{\alpha} \cdots .$$

74. Aus einer beliebigen Grössenreihe kann man durch lineale Aenderung jede andere Reihenfolge derselben Grössen ableiten, vorausgesetzt, dass man für den Fall, dass das kombinatorische Produkt der abgeleiteten Grössenreihe dem der ursprünglichen entgegengesetzt ist, das Vorzeichen von einer der Grössen der neuen Reihe ändert; d. h. wenn $a', b', c', \cdots$ dieselben Grössen sind wie $a, b, c, \cdots$, nur in anderer Reihenfolge, so lässt sich durch lineale Aenderung umwandeln:

$$a, b, c, \cdots \text{ in } a', b', c', \cdots$$

wenn $[abc \cdots] = [a'b'c' \cdots]$

ist, hingegen

a, b, c, ···· in $-a'$, b', c', ···
wenn $[abc\cdots] = -[a'b'c'\cdots]$

ist.

Beweis 1. Wenn p und q zwei beliebige Grössen jener Reihe sind, so verwandeln sich durch lineale Aenderung, indem man nämlich abwechselnd zum ersten und zweiten Faktor beziehlich den zweiten und ersten addirt und subtrahirt, Schritt für Schritt

p, q in $p+q$, q, dies in $p+q$, $q-(p+q)$,
d. h. in $p+q$, $-p$, dies in q, $-p$.

2. Man kann also durch lineale Aenderung zwei aufeinander folgende Grössen der Reihe in die umgekehrte Ordnung bringen, wenn man nur das Vorzeichen der einen ändert. Somit kann man auch durch lineale Aenderung jede Grösse der Reihe auf jede Stelle bringen, bei gehöriger Zeichenänderung. Es seien nun a', b', c', ···· dieselben Grössen wie a, b, c, ··· aber in anderer Reihenfolge, so wird man die Reihe a, b, c, ··· durch lineale Aenderung in eine Reihe umwandeln können, deren Grössen der Reihe nach mit a', b', c' ··· entweder gleich oder ihnen entgegengesetzt sind. Nun kann man (nach 73) durch lineale Aenderung zwei beliebige Grössen p, q einer Reihe im umgekehrten Verhältniss ändern, d. h. so ändern, dass, wenn die eine Grösse p in αp übergeht, dann die andere q in $\frac{q}{\alpha}$ übergehe; also kann man namentlich die zuletzt gefundene Reihe so ändern, dass jede beliebige Grösse p derselben, welche einer der Grössen a, b, c, ··· entgegengesetzt ist, in $(-1)p$, d. h. in $-p$, übergeht, während die erste Grösse jener Reihe, nämlich $\mp a'$ in $\mp\frac{a'}{-1}$, d. h. in $\pm a'$ übergeht. Wendet man diese Aenderung nach und nach auf jede Grösse jener Reihe an, welche einer der Grössen a, b, c, ··· entgegengesetzt ist, nur nicht auf die erste Grösse $\mp a'$ jener Reihe, so erhält man zuletzt entweder die Reihe

a', b', c', ····· oder $-a'$, b', c' ····,

wo noch das Vorzeichen von a' zu bestimmen ist. Da nun

diese Reihe aus a, b, c, ···· durch lineale Aenderung hervorgegangen ist, so muss (nach 72) im ersten Falle

$$[abc\cdots\cdots] = [a'b'c'\cdots\cdots],$$

im zweiten

$$[abc\cdots\cdots] = [-a'b'c'\cdots\cdots] = -[a'b'c'\cdots\cdots]$$

sein.

75. Wenn man zu irgend einer Grösse (p) einer Grössenreihe ein Vielfaches einer andern Grösse (q) jener Reihe addirt, also statt p setzt $p + \alpha q$, während man alle übrigen Grössen jener Reihe unverändert lässt, so lässt sich die so hervorgehende Reihe aus der ursprünglichen durch lineale Aenderung ableiten, d. h. es lässt sich durch lineale Aenderung umwandeln

$$p, \cdots\cdots, q \text{ in } p + \alpha q, \cdots\cdots q, \text{ oder auch}$$
$$\text{in } p, \cdots\cdots\cdots, q + \alpha p.$$

Beweis. Wenn in der gegebenen Reihe zwischen p und q keine Grösse steht, so folgt das zu erweisende unmittelbar aus der Definition [71]. Stehen zwischen p und q die Grössen $p_1, p_2, \cdots p_n$, so ist (nach 73) durch lineale Aenderung umzuwandeln

$$p, p_1, p_2, \cdots p_n, q \text{ in } p, q, p_1, p_2 \cdots \mp p_n; \text{ und dies (nach 71)}$$
$$\text{in } p + \alpha q, q, p_1, p_2, \cdots \mp p_n; \text{ dies wieder (nach 74)}$$
$$\text{in } p + \alpha q, p_1, p_2, \cdots p_n, \mp q,$$

wo das Vorzeichen von q noch zu bestimmen ist. Da die letzte Reihe aus der ersten durch lineale Aenderung hervorgegangen ist, so ist das kombinatorische Produkt der ersten Reihe (nach 72) dem der letzten gleich; also

$$[p\,p_1p_2\cdots\cdots p_nq] = [(p + \alpha q)p_1p_2\cdots p_n(\mp q)]$$
$$= \mp[(p + \alpha q)p_1p_2\cdots p_nq].$$

Aber es ist (nach 65)

$$[p\,p_1p_2\cdots p_nq] = +[(p + \alpha q)p_1p_2\cdots p_nq],$$

d. h. es gilt in der vorigen Formel das +Zeichen, also haben wir statt $\mp q$, zu setzen q, d. h. die gewonnene Reihe ist $p + \alpha q, p_1, p_2, \cdots p_n, q$. Es verwandelt sich also durch lineale Aenderung

$$p\cdots\cdots q \text{ in } p + \alpha q, \cdots\cdots q,$$

und auf diefelbe Weife folgt, dass fich auch durch lineale Aenderung umwandeln lässt

$$p \cdots\cdots q \text{ in } p, \cdots\cdots q + \alpha p.$$

76. Wenn zwei von null verschiedene kombinatorische Produkte einander gleich find, fo lassen fich die einfachen Faktoren des einen aus denen des andern durch lineale Aenderung ableiten, d. h. wenn

$$(a) \quad [abc\cdots] = [ABC\cdots] \gtrless 0$$

ist, fo lässt fich durch lineale Aenderung die Grössenreihe

$$(b) \quad a, b, c, \cdots \text{ in } A, B, C, \cdots$$

umwandeln [Umkehrung von 72].

Beweis: Da die von null verschiedenen kombinatorischen Produkte $[abc\cdots]$ und $[ABC\cdots]$ einander gleich find, und fie alfo in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, fo müssen (nach 70) die aus ihren einfachen Faktoren ableitbaren Gebiete identisch fein; d. h. die aus der Grössenreihe $a, b, c, \cdots$ numerisch ableitbaren Grössen müssen auch aus $A, B, C, \cdots$ numerisch ableitbar fein und umgekehrt. Alfo müssen namentlich $A, B, C, \cdots$ felbst, aus $a, b, c, \cdots$ numerisch ableitbar fein. In den Ausdrücken diefer Ableitung darf nicht der Koefficient von irgend einer der Grössen $a, b, c, \cdots$, z. B. der von a, in allen gleichzeitig null fein; denn fonst wären die Grössen $A, B, C, \cdots$, deren Anzahl n fei, aus den $n - 1$ Grössen $b, c, \cdots$ ableitbar; alfo würde (nach 22) eine Zahlbeziehung zwischen ihnen herrschen, ihr Produkt alfo (nach 61) null fein, gegen die Annahme. Es fei a' eine der Grössen $A, B, C, \cdots$ und zwar eine folche, in deren Ableitungsausdruck der Koefficient von a nicht null fei, und fei

$$a' = \alpha_1 a + \beta_1 b + \cdots\cdots,$$

wo alfo $\alpha_1 \gtrless 0$ ist; fo lässt fich durch lineale Aenderung nach und nach umwandeln

$$a, b, c, \cdots, l \text{ in } \alpha_1 a, b, c, \cdots\cdots, \frac{l}{\alpha_1} \quad [72],$$

$$\text{dies in } (\alpha_1 a + \beta_1 b + \cdots\cdots), b, c, \cdots \frac{l}{\alpha_1} \quad [74],$$

$$\text{d. h. in } a', b, c, \cdots\cdots \frac{l}{\alpha_1}.$$

Nun muss aber (nach 19) das aus a', b, c, ···· ableitbare Gebiet identisch sein dem aus a, b, c, ··· ableitbaren, also müssen namentlich die Grössen A, B, C···· aus a', b, c, ···· ableitbar sein. Nun ist es wieder, aus demselben Grunde wie vorher, unmöglich, dass der Koefficient von b in allen Ausdrücken dieser Ableitung zugleich null sei. Es sei b' eine der Grössen A, B, C, ··· und zwar eine solche, in der jener Koefficient nicht null ist, und sei

$$b' = \alpha_2 a' + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots,$$

so lässt sich durch lineale Aenderung, auf dieselbe Weise wie vorher, $a', b, c, \cdots \frac{1}{\alpha_1}$ umwandeln

$$\text{in } a', b', c \cdots \frac{1}{\alpha_1 \beta_2}.$$

Ebenso sei $c' = \alpha_3 a' + \beta_3 b' + \gamma_3 c + \delta_3 d + \cdots$, wo γ_3 ungleich null ist, so lässt sich wieder durch lineale Aenderung $a', b', c, \cdots \frac{1}{\alpha_1 \beta_2}$ umwandeln

$$\text{in } a', b', c', d, \cdots \frac{1}{\alpha_1 \beta_2 \gamma_3}.$$

Auf diese Weise fahre man fort bis zur vorletzten Grösse. Diese sei k, so erhält man zuletzt die Grössenreihe

$$a', b', c', \cdots, k', \frac{1}{\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \cdots \varkappa_{n-1}}.$$

Da nun diese Grössenreihe aus der ursprünglichen a, b, c, ··· hervorgegangen ist; so muss (nach 72) ihr kombinatorisches Produkt gleich dem jener Grössenreihe sein; also

$$\left[a'b'c' \cdots k' \frac{1}{\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \cdots \varkappa_{n-1}}\right] = [abc \cdots kl].$$

Ferner sind die $n-1$ Grössen a', b', c', ···· k' aus der Reihe der n Grössen A, B, C, ···· K, L entnommen, und da a', b', c', ··· k' alle von einander verschieden sein müssen, weil sonst (nach 61) das kombinatorische Produkt derselben null wäre, was vermöge der so eben entwickelten Gleichung mit der Voraussetzung streitet, so kann von den Grössen A, B, C, ··· K, L nur noch eine übrig sein, welche nicht unter den Grössen a', b', c' ···· k' enthalten ist. Dies sei l' und

sei $l = \alpha_n a' + \beta_n b' + \cdots + \varkappa_n k' + \lambda_n l'$, so verwandelt sich die zuletzt gewonnene Reihe durch lineale Aenderung in

$$a', b', c' \cdots k', \frac{\lambda_n l'}{\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \cdots \varkappa_{n-1}}.$$

Die Grössenreihe $a', b', c', \cdots k', l'$ enthält aber dieselben Grössen, wie die Reihe A, B, C, $\cdots$ K, L, nur in anderer Ordnung; also ist (nach 74) $a', b', c', \cdots k', l'$ durch lineale Aenderung umzuwandeln in A, B, C, $\cdots$ K, $\mp$ L, also auch

$$a', b', c', \cdots, k', \frac{\lambda_n l'}{\alpha_1 \beta_2 \cdots \varkappa_{n+1}}$$

$$\text{in A, B, C, } \cdots, \text{ K, } \mp \frac{\lambda_n L}{\alpha_1 \beta_2 \cdots \varkappa_{n-1}},$$

indem es (nach 73) gleichgültig ist, zu welcher Grösse man den Zahlfaktor $\frac{\mp \lambda_n}{\alpha_1 \beta_2 \cdots \varkappa_{n-1}}$ hinzufügt. Es sei dieser Zahlfaktor $= \varepsilon$, so ist also durch lineale Aenderung aus a, b, c, $\cdots$ k, l schliesslich hervorgegangen A, B, l, $\cdots$ K, εL. Also ist (nach 72)

$$[abc \cdots kl] = [ABC \cdots K\varepsilon L] = \varepsilon[ABC \cdots KL].$$

Es ist aber auch nach der Hypothesis

$$[abc \cdots kl] = [ABC \cdots KL].$$

Also auch

$$\varepsilon[ABC \cdots KL] = [ABC \cdots KL],$$

d. h. $\varepsilon = 1$, also ist $\varepsilon L = L$, und somit hat sich durch lineale Aenderung umgewandelt die Reihe:

a, b, c, $\cdots$ k, l in A, B, C, $\cdots$ K, L,

eine Umwandlung, deren Möglichkeit zu erweisen war.

77. Erklärung. Die multiplikativen Kombinationen der ursprünglichen Einheiten zur m-ten Klasse, nenne ich Einheiten m-ter Stufe, eine aus diesen Einheiten numerisch abgeleitete Grösse, eine Grösse m-ter Stufe, und zwar eine einfache, wenn sie sich als kombinatorisches Produkt von m Grössen erster Stufe darstellen lässt, eine zusammengesetzte, wenn dies nicht möglich ist. Das aus den einfachen Faktoren einer einfachen Grösse ableitbare Gebiet, nenne ich das dieser Grösse zugehörige Gebiet, kurz das Gebiet dieser Grösse. Ich nenne endlich eine einfache Grösse A einer andern übergeordnet, untergeordnet,

oder mit ihr incident, je nachdem dies von den Gebieten dieſer Grössen gilt (vergl. No. 15).

77b. Zuſatz. Ein kombinatorisches Produkt aus m Grössen erster Stufe ist eine einfache Grösse m-ter Stufe, und ist aus den Einheiten m-ter Stufe numerisch ableitbar.

Anm. Als Beispiel einer zuſammengeſetzten Grösse führe ich hier die Summe (ab) + (cd) an, wenn a, b, c, d vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen ſind. Sollte nämlich (ab) + (cd) eine einfache Grösse, etwa = (pq) ſein, ſo müsste [(ab + cd) (ab + cd)] = [pq pq] = 0 ſein (nach 60); aber [(ab + cd) (ab + cd)] = (abcd) + (cdab), da [ab ab] und [cd cd] null ſind. Aber (nach 58) ist (abcd) = (cdab). Alſo [(ab + cd) (ab + cd)] = 2(abcd). Somit müsste, wenn (ab) + (cd) eine einfache Grösse wäre, (abcd) = 0 ſein, alſo (nach 66) a, b, c, d in einer Zahlbeziehung stehen, was der Vorausſetzung widerstreitet.

§. 3. Aeussere Multiplikation von Grössen höherer Stufen.

78. Erklärung. Zwei Einheiten höherer Stufe äusserlich multipliciren, heisst die einfachen Faktoren derſelben, ohne ihre Reihenfolge zu verändern, kombinatorisch multipliciren, d. h.

$$[(e_1 e_2 \cdots e_m)(e_{m+1} \cdots e_n)] = [e_1 e_2 \cdots e_n].$$

Anm. Den Namen der äusseren Multiplikation habe ich gewählt, um zu bezeichnen, dass das Produkt nur dann geltenden Werth hat, wenn der eine Faktor ganz ausserhalb des Gebietes der andern liegt. Es steht der äusseren Multiplikation die innere (ſ. Kap. 4) gegenüber.

79. Statt eine einfache Grösse A mit einer andern B äusserlich zu multipliciren, kann man nach der Reihe die einfachen Faktoren der ersten mit denen der zweiten kombinatorisch multipliciren, d. h.

$$[(ab \cdots)(c \cdot d \cdots)] = [a \cdot b \cdots c \cdot d \cdots].$$

Beweis. Es ſeien $e_1 \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, und ſei

$$a = \sum \overline{\alpha_a e_a},\ b = \sum \overline{\beta_b e_b} \cdots\ c = \sum \overline{\gamma_c e_c},\ d = \sum \overline{\delta_b e_b}, \cdots$$

ſo ist

$$\begin{aligned}[(ab \cdots)(cd \cdots)] &= [(\sum \overline{\alpha_a e_a} \sum \overline{\beta_b e_b} \cdots)(\sum \overline{\gamma_c e_c} \sum \overline{\delta_b e_b} \cdots)] \\ &= [\sum \overline{\alpha_a \beta_b \cdots [e_a e_b \cdots]} \sum \overline{\gamma_c \delta_b \cdots [e_c e_b \cdots]}] \qquad [45]\end{aligned}$$

$$= \sum \alpha_a \beta_b \cdots \gamma_c \delta_c \cdots [(e_a e_b \cdots)(e_c e_b \cdots)] \quad [42]$$
$$= \sum \alpha_a \beta_b \cdots \gamma_c \delta_c \cdots [e_a e_b \cdots e_c e_b \cdots] \quad [78]$$
$$= [\sum \alpha_a e_a \sum \beta_b e_b \cdots \sum \gamma_c e_c \sum \delta_b e_b \cdots] \quad [45]$$
$$= [ab \cdots cd \cdots].$$

79b. Zuſatz. Wenn eine einfache Grösse A, welche nicht null iſt, einer andern B, welche gleichfalls nicht null iſt, untergeordnet iſt, ſo lässt ſich die letztere als äusseres Produkt darſtellen, deſſen einer Faktor A und deſſen anderer Faktor eine einfache Grösse C iſt, alſo in der Form

$$B = [AC].$$

Beweis. Nach 77 iſt A dem B untergeordnet, wenn das Gebiet von A dem von B untergeordnet iſt, d. h. (nach 15) wenn jede Grösse des ersten Gebietes zugleich Grösse des zweiten iſt. Es ſei $A = [a_1 a_2 \cdots a_m]$, wo $a_1 \cdots a_m$ Grössen erſter Stufe ſind, ſo ſtehen dieſe, da A ungleich null ſein ſoll, in keiner Zahlbeziehung zu einander (61). Ferner ſei $B = [b_1 \cdots b_n]$. Da nun die Grössen $a_1 \cdots a_m$ dem Gebiete B angehören ſollen, ſo müſſen ſie aus $b_1 \cdots b_n$ numeriſch ableitbar ſein. Dann aber kann man (nach 20) zu den Grössen $a_1 \cdots a_m$ noch $(n - m)$ Grössen $a_{m+1} \cdots a_n$ von der Art hinzufügen, dass die Gebiete $a_1 \cdots a_n$ und $b_1 \cdots b_n$ identiſch ſind. Iſt aber dies der Fall, ſo müſſen (nach 70) die Produkte $[a_1 \cdots a_n]$ und $[b_1 \cdots b_n]$ in einer Zahlbeziehung zu einander ſtehen. Es ſei

$$[b_1 \cdots b_n] = \alpha[a_1 \cdots a_n] = \alpha[(a_1 \cdots a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n]$$
$$= [(a_1 \cdots a_m) \cdot (\alpha a_{m+1} \cdots a_n)] \quad [79].$$

Alſo wenn noch

$$\alpha[a_{m+1} \cdots a_n] = C$$

geſetzt wird, ſo wird

$$B = [AC].$$

80. Die Klammerſetzung in einem äusseren Produkt iſt gleichgültig für das Reſultat, d. h.

$$[A(BC)] = [ABC].$$

Beweis 1. Es ſeien A, B, C einfache Grössen, $A = [a_1 \cdots a_q]$, $B = [b_1 \cdots b_r]$, $C = [c_1 \cdots c_s]$, ſo iſt

$$[A(BC)] = [a_1 \cdots a_q((b_1 \cdots b_r)(c_1 \cdots c_s))]$$
$$= [a_1 \cdots a_q(b_1 \cdots b_r c_1 \cdots c_s)] \quad [79]$$

$$= [a_1 \cdots a_q b_1 \cdots b_r c_1 \cdots c_s] \quad [79]$$
$$= [(a_1 \cdots a_q)(b_1 \cdots b_r)(c_1 \cdots c_s)] \quad [79]$$
$$= [ABC].$$

2. Es seien A, B, C Summen einfacher Grössen, $A = \sum \overline{A_\alpha}$, $B = \sum \overline{B_\beta}$, $C = \sum \overline{C_\gamma}$, so ist

$$[A(BC)] = [\sum \overline{A_\alpha}(\sum \overline{B_\beta} \sum \overline{C_\gamma})] = \sum \overline{A_\alpha (B_\beta C_\gamma)} \quad [45]$$
$$= \sum \overline{A_\alpha B_\beta C_\gamma} \quad [\text{Beweis 1}]$$
$$= [\sum \overline{A_\alpha} \sum \overline{B_\beta} \sum \overline{C_\gamma}] \quad [45]$$
$$= [ABC].$$

81. Wenn $a_1 \cdots a_m$, $b_1 \cdots b_n$ Grössen erster Stufe sind, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und A aus $a_1 \cdots a_m$ durch Addition und Multiplikation hervorgegangen ist und B aus $b_1 \cdots b_n$, und

$$[AB] = 0$$

ist, so muss entweder $A = 0$ oder $B = 0$ sein.

Beweis. Es sei A von α-ter Stufe, B von β-ter Stufe, und seien $A_1, A_2, \cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ zur α-ten Klasse, $B_1, B_2, \cdots$ die zur β-ten Klasse aus $b_1 \cdots b_n$, so sind (nach 77) A und B darstellbar in den Formen

$$A = \sum \overline{\alpha_\alpha A_\alpha}, \quad B = \sum \overline{\beta_\beta B_\beta},$$

also ist

$$[AB] = \sum \overline{\alpha_\alpha \beta_\beta [A_\alpha B_\beta]}.$$

Hier sind die $[A_\alpha B_\beta]$ als multiplikative Kombinationen von $a_1 \cdots a_m$, $b_1 \cdots b_n$ zu betrachten. Sie stehen also (nach 69) in keiner Zahlbeziehung zu einander. Also ist (nach 34)

$$\alpha_r \beta_s = 0$$

für jedes r und s; also wenn $B \gtrless 0$ ist, d. h. irgend eine der Grössen β_s ungleich null ist, so folgt, $\alpha_r = 0$ für jedes r, d. h. $A = 0$.

82. Wenn eine Summe S einfacher Grössen mit einer von null verschiedenen Grösse erster Stufe a äusserlich multiplicirt null giebt, so lässt sich die erstere (S) als äusseres Produkt darstellen, in welchem a ein Faktor ist, d. h. in der Form

$$S = [aP], \text{ wenn } [aS] = 0.$$

Beweis. Es sei S eine Summe von Grössen m-ter Stufe, und seien $e_1, e_2, \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, so kann man (nach 20) zu a stets noch $(n-1)$ andere Grössen b, c, $\cdots$ der Art hinzufügen, dass sich die Grössen $e_1 \cdots e_n$ aus a, b, c, $\cdots$ numerisch ableiten lassen. Dann lässt sich auch jeder einfache Faktor in jeder der Grössen m-ter Stufe, deren Summe S ist, aus a, b, c, $\cdots$ numerisch ableiten. Also lässt sich jede dieser Grössen, und also auch ihre Summe S, aus den multiplikativen Kombinationen zur m-ten Klasse aus a, b, c, $\cdots$ ableiten. Es seien nun $[aB_1], [aB_2], \cdots$ diejenigen unter diesen Kombinationen, welche a enthalten, und $C_1, C_2, \cdots$ diejenigen unter ihnen, welche a nicht enthalten, und sei

$$S = \beta_1[aB_1] + \beta_2[aB_2] + \cdots + \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots.$$

Da nun nach der Annahme $[aS] = 0$ sein soll, so hat man

$$0 = [aS] = \gamma_1[aC_1] + \gamma_2[aC_2] + \cdots,$$

da $[aaB_1], [aaB_2], \cdots$ null sind. Da nun a nicht in $C_1, C_2, \cdots$ enthalten ist, so sind $[aC_1], [aC_2], \cdots$ multiplikative Kombinationen, stehen also in keiner Zahlbeziehung zu einander. Somit folgt aus der obigen Gleichung, $0 = \gamma_1[aC_1] + \gamma_2[aC_2] + \cdots$, dass $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ alle null sind (nach 16). Folglich ist

$$S = \beta_1[aB_1] + \beta_2[aB_2] + \cdots$$
$$= [a(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \cdots)] = [aP], \text{ wenn}$$
$$P = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \cdots$$

gesetzt wird.

83. Wenn eine Summe S einfacher Grössen mit jeder von m, in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster Stufe $a_1, \cdots a_m$ äusserlich multiplicirt null giebt, so lässt sich S als äusseres Produkt darstellen, in welchem $a_1 \cdots a_m$ Faktoren sind, d. h. in der Form

$$S = [a_1 a_2 \cdots a_m S_m],$$
$$\text{wenn } 0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \cdots = [a_m S_m].$$

Beweis. Es seien $e_1 \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, so lassen sich (nach 20) zu $a_1 \cdots a_m$ noch $n - m$ andere Grössen $a_{m+1} \cdots a_n$ der Art hinzufügen, dass sich $e_1 \cdots e_n$ aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten lassen. Demnach lassen sich auch alle in S vorkommenden Grössen erster Stufe aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten. Nun ist angenommen $[a_1 S] = 0$, folglich lässt sich

(nach 82) S in der Form $S = [a_1 S_1]$ darstellen. Hier ist S_1 wieder eine Summe einfacher Grössen. Stellt man die einfachen Faktoren dieſer Grössen als Vielfachenſumme von $a_1 \cdots a_n$ dar, ſo kann man, ohne den Werth der Produkte zu ändern, (nach 67) in allen dieſen Vielfachenſummen das Glied, was a_1 enthält, weglassen. Nachdem dies geschehen, habe ſich S_1 in P_1 verwandelt, ſo ist

$$S = [a_1 S_1] = [a_1 P_1],$$

wo P_1 nur aus den Grössen $a_2 \cdots a_n$ hervorgegangen ist (kein a_1 enthält). Nun ist ferner $[a_2 S] = 0$, d. h.

$$0 = [a_2 a_1 P_1], \text{ oder (nach 55) } [a_1 a_2 P_1] = 0.$$

Da nun $a_2 P_1$ nur aus den Grössen $a_2 \cdots a_n$ erzeugt ist, ſo muss (nach 81) entweder a_1 oder $[a_2 P_1]$ null ſein. Das erste ist gegen die Annahme, alſo $a_2 P_1 = 0$. Somit muss P_1 in der Form $[a_2 S_2]$ darstellbar ſein; hier kann wieder in S_2 die Grösse a_2 fortgeschafft werden, ohne den Werth des Produktes $a_2 S_2$ zu ändern; es ſei $P_1 = [a_2 S_2] = [a_2 P_2]$, wo P_2 nur noch aus $a_3 \cdots a_n$ erzeugt ist (ohne a_1 und a_2), ſo ist $S = [a_1 a_2 P_2]$. Dann ist $[a_3 S] = 0$, alſo $[a_3 a_1 a_2 P_2] = 0$, oder

$$[a_1 a_2 a_3 P_2] = 0.$$

Da nun $[a_3 P_2]$ nur aus $a_3 \cdots a_n$ erzeugt ſind, ſo muss (nach 81) entweder $[a_1 a_2]$ null ſein, oder $[a_3 P_2]$. Ersteres ist nicht möglich, weil ſonst (nach 61) zwischen a_1 und a_2 eine Zahlbeziehung herrschen würde, gegen die Voraussetzung. Es muss alſo $[a_3 P_2] = 0$, alſo P_2 in der Form darstellbar $P_2 = [a_3 P_3]$, wo wieder P_3 nur aus $a_4 \cdots a_n$ erzeugbar ist u. ſ. f., bis endlich

$$S = [a_1 a_2 \cdots a_m S_m]$$

wird.

84. Wenn eine Summe S von Grössen m-ter Stufe mit jeder von m Grössen erster Stufe $a_1 \cdots a_m$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, äusserlich multiplicirt null giebt, ſo ist S dem äusseren Produkte dieſer m Grössen kongruent, d. h. wenn

$$0 = [a_1 S] = \cdots = [a_m S], \text{ ſo ist } S \equiv [a_1 \cdots a_m].$$

Beweis. Dann ist (nach 83) S in der Form $[a_1 \cdots a_m S_m]$ darstellbar, hier muss, da S ein Ausdruck m-ter Stufe ist,

S_m von nullter Stufe, alſo eine Zahl ſein und dann können wir (nach 2) ſtatt $S = [a_1 \cdots a_m S_m]$ ſchreiben

$$S \equiv [a_1 \cdots a_m].$$

85. Wenn es $m + 1$ Grössen $a_1 \cdots a_{m+1}$ giebt, deren jede mit einer Summe S von Grössen m-ter Stufe äusserlich multiplicirt null giebt, ſo iſt entweder $S = 0$ oder $[a_1 \cdots a_{m+1}] = 0$.

Beweis. Geſetzt, es ſei $[a_1 \cdots a_{m+1}]$ nicht null, alſo auch $[a_1 \cdots a_m]$ nicht null, alſo $a_1 \cdots a_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehend, ſo iſt, da auch $[a_1 S] = [a_2 S] \cdots = [a_m S] = 0$ iſt, (nach 84) $S = \alpha[a_1 \cdots a_m]$. Nun ſoll aber auch $[a_{m+1} S] = 0$, alſo $\alpha[a_1 \cdots a_{m+1}] = 0$, alſo, da $[a_1 \cdots a_{m+1}]$ nach der Annahme von null verſchieden iſt, ſo muss $\alpha = 0$, alſo auch $S = \alpha[a_1 \cdots a_m] = 0$, d. h. es iſt entweder $[a_1 \cdots a_{m+1}]$ oder S null.

§. 4. Ergänzung der Grössen in Bezug auf ein Hauptgebiet.

86. Erklärung. Hauptgebiet nenne ich das Gebiet der urſprünglichen Einheiten, aus welchen alle der Betrachtung unterworfenen Grössen hervorgegangen ſind.

87. Zwei einfache Grössen A und B laſſen ſich, wenn die Summe ihrer Stufenzahlen die des Hauptgebietes um γ übertrifft, in der Form darſtellen

$$A = [CA_1], \quad B = [CB_1],$$

wenn C eine einfache Grösse von γ-ter Stufe iſt.

Beweis. Es ſei α die Stufenzahl von A, β die von B, n die des Hauptgebietes, alſo

$$\alpha + \beta = n + \gamma.$$

Dann haben (nach 26) die Gebiete A und B mindeſtens ein Gebiet $(\alpha + \beta - n)$-ter, alſo γ-ter Stufe gemein. Es ſei C eine Grösse γ-ter Stufe dieſes Gebietes, ſo iſt C ſowohl der Grösse A, als der Grösse B untergeordnet, alſo (nach 79b) A in der Form $[CA_1]$ und B in der Form $[CB_1]$ darſtellbar.

88. Einfache Grössen $(n - 1)$-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe geben zur Summe wieder eine einfache Grösse $(n - 1)$-ter Stufe.

Beweis. Es seien A und B die beiden Grössen $(n-1)$-ter Stufe, welche in einem Hauptgebiete n-ter Stufe liegen; so müssen sie, da die Summe $(2n-2)$ ihrer Stufenzahlen die des Hauptgebietes um $n-2$ übertrifft, (nach 87) in der Form

$$A = [Ca], \quad B = [Cb]$$

darstellbar sein, wo C eine Reihe von $n-2$ einfachen Faktoren erster Stufe darstellt, a und b aber Faktoren erster Stufe sind, also

$$A + B = [Ca] + [Cb] = [C(a+b)] \qquad [44].$$

Hier ist $a+b$, als Summe zweier Grössen erster Stufe, wieder eine Grösse erster Stufe, also ist $A+B$ als kombinatorisches Produkt von $n-1$ Grössen erster Stufe darstellbar, also selbst eine Grösse $(n-1)$-ter Stufe.

Anm. Hat man in einem Hauptgebiete n-ter Stufe zwei Grössen A und B, deren Stufenzahlen grösser als 1 und kleiner als $n-1$ sind, so giebt ihre Summe im Allgemeinen nicht mehr eine einfache Grösse. So z. B. lässt sich, wenn a, b, c, d vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe sind, die Summe $S = ab + cd$ nicht mehr in Form eines kombinatorischen Produktes von Faktoren erster Stufe darstellen. In der That müsste dann (nach 60)

$$[SS] = 0$$

sein, also

$$0 = [SS] = [(ab+cd)(ab+cd)] = [abcd] + [cdab],$$

da [abab] und [cdcd] (nach 60) null sind. Aber da (nach 58) [cdab] $=$ [abcd] ist, so hätte man dann

$$0 = 2[abcd],$$

d. h. es müsste [abcd] null sein, also (nach 66) a, b, c, d in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, gegen die Voraussetzung. Also ist S dann nicht in Form eines kombinatorischen Produktes von Grössen erster Stufe darstellbar, und ist also dann eine zusammengesetzte Grösse.

89. Erklärung. Wenn in einem Hauptgebiete n-ter Stufe das kombinatorische Produkt der ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ gleich 1 gesetzt ist, und E eine Einheit beliebiger Stufe, d. h. entweder eine der ursprünglichen Einheiten oder ein kombinatorisches Produkt von mehreren derselben ist, so nenne ich „Ergänzung von E" diejenige Grösse, welche dem kombinatorischen Produkte E' aller in E nicht vorkommenden Einheiten gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem [EE'] der absoluten Einheit gleich oder entgegengesetzt ist; ich bezeichne die Ergänzung einer Grösse

durch einen vor das Zeichen der Grösse gesetzten vertikalen Strich, also die von E durch |E. Die Ergänzung einer Zahl setze ich dieser Zahl gleich; also:

$$|E = [EE']E',$$

wenn E und E′ die einfachen Faktoren $e_1 \cdots e_n$ enthalten und

$$[e_1 e_2 \cdots e_n] = 1$$

ist; und

$$|\alpha = \alpha, \text{ wenn } \alpha \text{ eine Zahl ist.}$$

Anm. Bei der Definition ist vorausgesetzt, dass [EE′] nur entweder $+1$ oder -1 sein könne. In der That, da E und E′ kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten sind und E′ alle in E fehlenden Einheiten enthält, so unterscheidet sich [EE′] von $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ nur durch die Folge seiner Faktoren, und beide sind also (nach 57) einander entweder gleich oder entgegengesetzt, also da $[e_1 e_2 \cdots e_n] = 1$ ist, so ist $[EE'] = \mp 1$.

90. Erklärung. Unter der Ergänzung einer beliebigen Grösse A verstehe ich diejenige Grösse |A, die man erhält, wenn man in dem Ausdrucke, welcher die numerische Ableitung jener Grösse aus den Einheiten darstellt, statt jeder dieser Einheiten ihre Ergänzung setzt, d. h.

$$|(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots) = \alpha_1 |E_1 + \alpha_2 |E_2 + \cdots,$$

wo $E_1, E_2, \cdots$ Einheiten beliebiger Stufen sind.

Zusatz. Wenn n die Stufenzahl des Hauptgebietes und α die der Grösse A ist, so ist $n - \alpha$ die der Ergänzung.

Anm. Der vertikale Strich erscheint also nach diesen Definitionen mit den Eigenschaften eines Faktors. Es hat dieser Faktor, wie sich weiter unten zeigen wird, eine auffallende Analogie mit dem imaginären Ausdruck $\sqrt{-1}$, so dass man ihn unter gewissen Umständen dadurch ersetzen kann. Den vertikalen Strich habe ich gewählt, um darauf hinzudeuten, dass, wie ich unten zeigen werde, diese Ergänzung geometrisch durch das auf einem gegebenen Gebilde senkrecht stehende Gebilde dargestellt wird.

91. Das äussere Produkt einer Einheit in ihre Ergänzung ist 1, d. h.

$$[E|E] = 1.$$

Beweis. Wenn E′ das kombinatorische Produkt aller in E nicht enthaltenen ursprünglichen Einheiten ist, so ist (nach 89)

$$|E = \mp E', \text{ je nachdem } [EE'] = \mp 1.$$

Also wenn das untere Zeichen gilt, so ist

$$[E|E] = [EE'] = 1$$

und wenn das obere gilt, so ist

$$[E|E] = - - [EE'] = -(-1) = 1.$$

92. Die Ergänzung der Ergänzung einer Grösse A ist dieser Grösse A gleich oder entgegengesetzt, je nachdem das Produkt der Stufenzahlen dieser Grösse einerseits und ihrer Ergänzung andrerseits gerade oder ungerade ist, d. h.

$$||A = (-1)^{qr}A,$$

wenn q die Stufenzahl von A und r die von |A ist.

Beweis. Angenommen sei zuerst, dass A ein kombinatorisches Produkt der ursprünglichen Einheiten sei, und B $= |A$ seine Ergänzung, so enthält nach der Definition B alle die Einheiten, welche dem A fehlen, und zwar so, dass $A|A = 1$, also

$$AB = 1$$

ist. Die Ergänzung von B wiederum ist, da A alle Einheiten enthält die der Grösse B fehlen, (nach 90) der Grösse A gleich oder entgegengesetzt, je nachdem BA der absoluten Einheit gleich oder entgegengesetzt ist; nun ist (nach 58) $BA = (-1)^{qr}AB$, wenn q und r die Stufenzahlen von A und B sind; also, da $AB = 1$ ist,

$$BA = (-1)^{qr},$$

somit auch die Ergänzung von B gleich $+A$ oder $-A$, je nachdem $(-1)^{qr}$ gleich $+1$ oder -1 ist, d. h.

$$|B = (-1)^{qr}A.$$

Aber B war gleich |A angenommen, somit

$$||A = (-1)^{qr}A,$$

wenn A ein kombinatorisches Produkt der ursprünglichen Einheiten ist.

Es sei zweitens A eine beliebige Grösse q-ter Stufe, ihre Ergänzung von r-ter Stufe, und sei

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots,$$

wo $E_1, E_2, \cdots$ kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ Zahlen sind, so ist (nach 90)

$$|A = \alpha_1 |E_1 + \alpha_2 |E_2 + \cdots,$$

somit, da $|E_1, |E_2$ wieder Einheitsprodukte sind,

$$||A = \alpha_1 ||E_1 + \alpha_2 ||E_2 + \cdots.$$

Nun sind $E_1, E_2, \cdots$ von gleicher Stufe mit A, also von

q-ter Stufe, und ihre Ergänzungen von r-ter Stufe; alſo iſt nach dem erſten Theile des Beweiſes $\|E_1 = (-1)^q E_1$, $\|E_2 = (-1)^q E_2$ u. ſ. w., ſomit

$$\|A = (-1)^q(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots)$$
$$= (-1)^q A.$$

93. Iſt die Stufenzahl (n) des Hauptgebietes ungerade, ſo iſt

$$\|A = A.$$

Iſt n gerade, ſo iſt

$$\|A = (-1)^q A,$$

wenn q die Stufenzahl von A iſt.

Beweis. Denn dann iſt die Stufenzahl von $|A$ gleich $(n - q)$, alſo (nach 92) $\|A = (-1)^{q(n-q)} A$. Iſt nun n ungerade, ſo iſt entweder q oder $n - q$ gerade, alſo $(-1)^{q(n-q)} = 1$ und alſo dann $\|A = A$. Iſt n gerade, ſo iſt $q(n - q)$ gerade oder ungerade, je nachdem q es iſt, alſo dann $(-1)^{q(n-q)} = (-1)^q$, und $\|A = (-1)^q A$.

Anm. Sind q und r beide ungerade, wie z. B. wenn man die Ergänzungen von Grössen erſter Stufe in einem Gebiet zweiter Stufe betrachtet, ſo wird $\|A = -A$, ſo daſs alſo in dieſem Falle das Zeichen $|$ denſelben Geſetzen unterliegt wie $i = \sqrt{-1}$, und wir erhalten daher hier eine reelle Bedeutung des Imaginären. Es wird ſich bei der Anwendung auf die Geometrie zeigen, daſs Strecken, d. h. Linien von bestimmter Richtung und Länge als Grössen erſter Stufe zu betrachten ſind, und daſs in Bezug auf ſie die Ebene als Gebiet zweiter Stufe erſcheint, ſo daſs alſo hier der obenerwähnte Fall, wo $\|A = -A$ iſt, eintritt. Ich werde zeigen, daſs die Ergänzung einer Strecke, wenn man als urſprüngliche Einheiten zwei gegeneinander ſenkrechte Strecken von gleicher Länge annimmt, die auf ihr ſenkrechte Strecke iſt, und man ſieht daher ſchon hier, daſs die reelle Bedeutung, die wir hier dem Imaginären beilegen, genau der geometriſchen Bedeutung desſelben, wie ſie von Gauss zuerſt aufgefaſst wurde, entſpricht; nur daſs dieſe Bedeutung hier in allgemeinerer Form hervortritt.

§. 5. Produkt in Bezug auf ein Hauptgebiet.

94. Erklärung. Wenn die Summe der Stufenzahlen zweier Einheiten kleiner oder ebenſo gross iſt als die Stufenzahl n des Hauptgebietes, ſo verſtehe ich unter ihrem progreſſiven Produkte ihr äusseres Produkt, jedoch mit der

Bestimmung, dass das progressive Produkt der n ursprünglichen Einheiten 1 sei. Hingegen, wenn die Summe der Stufenzahlen zweier Einheiten grösser ist als die Stufenzahlen (n) des Hauptgebietes, so verstehe ich unter ihrem regressiven (eingewandten) Produkte diejenige Grösse, deren Ergänzung das progressive Produkt der Ergänzungen jener Einheiten ist. Das progressive und regressive Produkt fasse ich zusammen unter dem Namen des auf ein Hauptgebiet bezüglichen Produktes. Die Bezeichnung ist für alle diese Produkte dieselbe, nämlich die einer das Produkt umschliessenden Klammer. Also

$$|[EF] = [|E|F],$$

wenn die Summe der Stufenzahlen von E und F kleiner ist als die Stufe (n) des Hauptgebietes, und

$$[e_1 e_2 \cdots e_n] = 1,$$

wenn $e_1, e_2, \cdots e_n$ die Reihe der ursprünglichen Einheiten ist.

Anm. Auf die hier behandelte Multiplikation und auf die algebraische lassen sich alle Multiplikationen, die überhaupt für die Wissenschaft von Interesse sind, zurückführen. Es kommt daher nur darauf an, diese beiden Multiplikationsgattungen von einander durch die Bezeichnung unzweideutig zu unterscheiden. Wenn man bei der algebraischen Multiplikation alle überflüssigen Klammern vermeidet, also nie ein algebraisches Produkt, welches mit einer andern Grösse durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division verbunden werden soll, durch eine Klammer umschliesst, so wird eine in diesen Fällen angewandte Klammer stets ein unzweideutiges Zeichen der bezüglichen Multiplikation sein. In denjenigen Fällen, wo das algebraische Produkt so verknüpft wird, dass eine Klammersetzung nöthig wird, also wenn das Produkt potenzirt oder logarithmirt werden soll, oder in ein Funktionzeichen (wozu auch Summenzeichen, Differenzialzeichen u. s. w. gerechnet werden können) einrückt, so wird wieder alle Zweideutigkeit gehoben, wenn man in diesem Falle entweder für die bezügliche Multiplikation zwei Klammern anwendet, oder, was bequemer erscheint, für diese Fälle dem algebraischen Produkte stets die runde Klammer, dem bezüglichen die eckige zuweist, während man in den erstgenannten Fällen nach Bequemlichkeit über beide verfügt. Es ist noch zu erwähnen, dass die gewählte Bezeichnung für die verschiedenen Arten der bezüglichen Multiplikation, sobald das Hauptgebiet bekannt ist, durchaus zureichend ist und keinen Verwechselungen Raum giebt, und dass die Rechnungsgesetze überall dieselben sind, und nur noch von den Stufenzahlen der zu verknüpfenden Grössen und von der des Hauptgebietes abhängen.

95. Wenn q und r die Stufenzahlen zweier Grössen A und B sind, und n die des Hauptgebietes, so ist die Stufenzahl des Produktes [AB] erstens gleich $q + r$, wenn $q + r$ kleiner als n ist, zweitens gleich $q + r - n$, wenn $q + r$ grösser oder ebenso gross als n ist, in beiden Fällen also kongruent der Summe der Stufenzahlen in Bezug auf den Modul. n, d. h. wenn

$$C = [AB], \text{ so ist}$$
$$s \equiv q + r \,(\text{Modul. } n),$$

wo q, r, s, n beziehlich die Stufenzahlen von A, B, C und vom Hauptgebiete sind.

Beweis. Ist $q + r < n$ und $A = [a_1 a_2 \cdots a_q]$, $B = [b_1 b_2 \cdots b_r]$, wo $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$ Grössen erster Stufe sind, so ist [AB] als progressives Produkt zu betrachten, also

$$C = [AB] = [(a_1 a_2 \cdots a_q) \cdot (b_1 b_2 \cdots b_r)]$$
$$= [a_1 a_2 \cdots a_q b_1 b_2 \cdots b_r] \qquad [79],$$

also (nach 77) die Stufenzahl des Produktes $= q + r$. Wenn $q + r = n$ ist, so wird, da (nach 94) das Produkt der n Einheiten $= 1$ gesetzt ist, und also auch das Produkt von n Grössen erster Stufe eine Zahl wird, die Zahlen aber (nach 77) als Grössen nullter Stufe aufzufassen sind, die Stufenzahl des Produktes gleich 0, also $= q + r - n$. Wenn endlich $q + r$ grösser als n ist, so ist (nach 94), wenn A und B Einheiten beliebiger Stufen sind,

$$|C = [|A|B].$$

Aber (nach 90) sind die Stufenzahlen von |A, |B, |C gleich $n - q$, $n - r$, $n - s$; nun ist $n - q + n - r = n - (q + r - n)$, also kleiner als n, somit ist (nach dem ersten Theile des Beweises) die Stufenzahl des Produktes [|A|B] gleich der Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren, also

$$n - s = n - q + n - r, \text{ d. h. } s = q + r - n.$$

Somit gilt das zu erweisende Gesetz für den Fall, dass A, B, C Einheiten beliebiger Stufen sind. Da nun aber jede aus den Einheiten numerisch abgeleitete Grösse mit den Einheiten von gleicher Stufe ist, so gilt der Satz auch für beliebige Grössen.

96. Wenn n die Stufenzahl des Hauptgebietes ist, so ist die Stufenzahl eines beliebigen auf dies Gebiet bezüglichen

Produktes der Summe der Stufenzahlen ſeiner Faktoren kongruent, in Bezug auf den Modul. n, oder die Stufenzahl des Produktes ist gleich dem Diviſionsreste, welcher bleibt, wenn man die Summe der Stufenzahlen aller Faktoren durch die Stufenzahl des Hauptgebietes dividirt; alſo wenn

$$R = [ABC\cdots] \text{ ist, ſo ist}$$

$$\varrho = \alpha + \beta + \gamma + \cdots \text{ (Mod. n)},$$

wenn ϱ, α, β, γ, $\cdots$ die Stufenzahlen von R, A, B, C, $\cdots$ ſind und n die des Hauptgebietes ist.

Beweis. In 95 ist gezeigt, dass die Stufenzahl des Produktes zweier Grössen der Summe der Stufenzahlen dieſer Grössen kongruent ist, in Bezug auf den Modul. n. Tritt nun zu dem Produkte noch ein Faktor hinzu, ſo bleibt aus gleichem Grunde das Geſetz noch bestehen u. ſ. f., alſo gilt es für beliebig viele Faktoren. Da nun die Stufenzahl immer kleiner als n und nie negativ ist, ſo gilt der Satz auch in der zweiten Faſſung.

Anm. So z. B. ist die Stufenzahl eines Produktes von 7 Faktoren 3-ter Stufe, in Bezug auf ein Hauptgebiet 4-ter Stufe, gleich 1 (ſ. Crelle Journal B. 49, p. 64).

97. Das Produkt der Ergänzungen zweier Grössen ist die Ergänzung des Produktes dieſer Grössen, d. h.

$$[|A|B] = |[AB].$$

Beweis 1. Wenn die Stufenzahlen α und β der Grössen A und B zuſammen kleiner ſind als die Stufenzahl n des Hauptgebietes, d. h. $\alpha + \beta < n$.

Dann ſei $A = \sum \alpha_r E_r$, $B = \sum \beta_s F_s$, wo E_r, F_s Einheiten ſind, ſo ist (nach 90)

$$|A = \sum \alpha_r |E_r \text{ und } |B = \sum \beta_s |F_s.$$

Alſo

$$\begin{aligned}
[|A|B] &= [\sum \alpha_r |E_r \sum \beta_s F_s] = \sum \alpha_r \beta_s [E_r |F_s] && [42]\\
&= \sum \alpha_r \beta_s |[E_r F_s] && [94]\\
&= |\sum \alpha_r \beta_s [E_r F_s] && [90]\\
&= |[\sum \alpha_r E_r \sum \beta_s F_s] && [42]\\
&= |[AB].
\end{aligned}$$

2. Wenn $\alpha + \beta = n$ ist, dann gilt der Satz zunächst für die Einheiten.

Es seien E und F Einheiten, d. h. kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten $e_1 \cdots e_n$. Enthält zuerst E eine ursprüngliche Einheit, die auch in F vorkommt, so können in E und F, da sie zusammen nur n einfache Faktoren enthalten, nicht alle ursprünglichen Einheiten vorkommen; es muss also mindestens eine dieser Einheiten, etwa e_1, in beiden Grössen E und F fehlen; nun enthält |E alle ursprünglichen Einheiten die in E fehlen, also auch e_1, und |F alle die in F fehlen, also auch e_1, somit enthalten |E und |F beide die ursprüngliche Einheit e_1, es ist also (nach 60) $[|E|F] = 0$, aber auch $[EF] = 0$, da E und F nach der Annahme beide ein und dieselbe ursprüngliche Einheit enthalten, somit

$$[|E|F] = [EF].$$

Wenn zweitens E keine ursprüngliche Einheit enthält, die auch in F vorkommt, so muss, da E und F im Ganzen n Faktoren enthalten, deren jeder eine der ursprünglichen Einheiten ist, [EF] ein Produkt sämmtlicher n Einheiten sein. Dann aber ist (nach 90)

$$|E = [EF]F \text{ und } |F = [FE]E,$$

wo [EF] und [FE] nur entweder $+1$ oder -1 sind. Dann ist

$$[|E|F] = [EF][FE][FE].$$

Aber [FE][FE] ist entweder $1 \cdot 1$ oder $(-1) \cdot (-1)$, also beidemale 1. Somit ist

$$[|E|F] = [EF],$$

wie im vorigen Falle. Da nun [EF] eine Zahl ist, so ist (nach 90) $[EF] = |[EF]$. Somit in beiden Fällen

$$[|E|F] = |[EF].$$

Da nun das Gesetz für Einheiten gilt, so folgt ganz wie in Beweis 1, dass es auch für beliebige Grössen gilt, vorausgesetzt, dass die Summe der Stufenzahlen n sei.

3. Wenn $\alpha + \beta > n$, dann sei $A = |A'$ und $B = |B'$. Ist nun zuerst n ungerade, so ist (nach 93)

$$|A = ||A' = A' \text{ und ebenso } |B = ||B' = B'.$$

Also

$$[|A|B] = [A'B'] = ||[A'B'] \qquad \text{(nach 93)}.$$

Aber da die Stufenzahl von A' und B' beziehlich $= n - \alpha$, $n - \beta$ sind (90 Zus.), so sind die Stufenzahlen von A' und B'

zusammengenommen $= 2n - \alpha - \beta = n - (\alpha + \beta - n)$. Nun ist $\alpha + \beta - n$ positiv; da $\alpha + \beta$ nach der Annahme grösser als n ist, somit ist $n - (\alpha + \beta - n) < n$, also die Summe der Stufenzahlen von A′ und B′ kleiner als n. Also ist nach Beweis 1 $|[A'B'] = [|A'|B'] = [AB]$. Also

$$|[A'B'] = |[AB],$$

aber auch $|[A'B'] = [|A|B]$, wie oben gezeigt, also

$$[|A|B] = |[AB].$$

Zusatz. Wenn das Produkt zweier Grössen ein progressives ist, so ist das ihrer Ergänzungen ein regressives, vorausgesetzt, dass man das Produkt nullter Stufe zugleich als ein progressives und als ein regressives betrachtet.

Beweis. Denn ist [AB] ein progressives Produkt, so ist $\alpha + \beta = < n$, wenn α und β die Stufenzahlen von A und B sind. Dann sind die der Ergänzungen $n - \alpha$ und $n - \beta$, aber $n - \alpha - \beta = > 0$, also auch $n - \alpha + n - \beta = > n$, d. h. das Produkt der Ergänzungen ein regressives.

98. Das Produkt der Ergänzungen mehrerer Grössen ist die Ergänzung des Produktes dieser Grössen, d. h.

$$[|A|B|C\cdots] = |[ABC\cdots].$$

Beweis. Es gelte der Satz für m Faktoren, d. h. es sei

$$[|A_1|A_2\cdots|A_m] = |[A_1A_2\cdots A_m],$$

so gilt er auch für m + 1 Faktoren Denn es komme noch ein Faktor $|A_{m+1}$ auf beiden Seiten obiger Gleichung hinzu, so ist

$$[|A_1|A_2\cdots|A_m|A_{m+1}] = [|(A_1A_2\cdots A_m)|A_{m+1}]$$
$$= |[A_1A_2\cdots A_mA_{m+1}] \quad [97].$$

Gilt der Satz also für irgend eine Faktorenzahl, so gilt er auch für die nächst höhere, also auch für jede höhere Faktorenzahl. Da er nun (nach 97) für zwei Faktoren gilt, so gilt er auch für beliebig viele.

99. Ins Besondere ist

$$[|a|b\cdots] = |[ab\cdots],$$

wenn a, b, ·· Grössen erster Stufe sind.

Zusatz. Es folgt hieraus, dass das regressive Produkt als ein kombinatorisches betrachtet werden kann, dessen einfache Faktoren von (n — 1)-ter Stufe sind.

100. Die Ergänzung eines Polynoms erhält man, indem man, ohne die Vorzeichen der Glieder zu ändern, von jedem die Ergänzung nimmt, d. h.

$$|(A \mp B \mp \cdots) = |A \mp |B \mp \cdots.$$

Beweis. Es sei $A = \sum \alpha_r E_r$, $B = \sum \beta_r E_r$, $\cdots$ so ist

$$\begin{aligned} &|(A \mp B \mp \cdots) \\ &= |(\sum \alpha_r E_r \mp \sum \beta_r E_r \mp \cdots) = |\sum (\alpha_r \mp \beta_r \mp \cdots) E_r \\ &= \sum (\alpha_r \mp \beta_r \mp \cdots) |E_r \qquad [90] \\ &= \sum \alpha_r |E_r \mp \sum \beta_r |E_r \mp \cdots = |\sum \alpha_r E_r \mp |\sum \beta_r E_r \mp \cdots \qquad [90] \\ &= |A \mp |B \mp \cdots. \end{aligned}$$

101. Eine Gleichung, in welcher keine andern Verknüpfungen als die in Kap. 1 und 3 behandelten vorkommen, bleibt auch bestehen, wenn man statt der darin vorkommenden Grössen ihre Ergänzungen setzt, d. h. wenn

$$f(A, B, \cdots) = \varphi(A', B', \cdots)$$

ist, wo f und φ Zeichen von Verknüpfungen sind, die den genannten Kapiteln angehören, so ist

$$f(|A, |B, \cdots) = \varphi(|A', |B', \cdots).$$

Beweis. Da gleiche Grössen, derselben Verknüpfung unterworfen, Gleiches liefern, so muss, wenn

$$f(A, B, \cdots) = \varphi(A', B', \cdots)$$

ist, auch

$$|f(A, B, \cdots) = |\varphi(A', B', \cdots)$$

sein. Nun können keine andern Verknüpfungen vorkommen als Addition, Subtraktion und die bezügliche Multiplikation, zu welcher auch die Multiplikation mit Zahlen gerechnet werden darf. Für Addition und Subtraktion ist in Satz 100 bewiesen, dass man, statt von der Verknüpfung, von den Verknüpfungsgliedern die Ergänzungen nehmen kann, und dasselbe gilt (nach 99) von der bezüglichen Multiplikation, also für alle auf beiden Seiten vorkommenden Verknüpfungen.

Anm. Es tritt hierdurch die volle Reciprocität zwischen beliebigen Grössen und ihren Ergänzungen, also überhaupt zwischen Grössen m-ter und (n – m)-ter Stufe hervor, wenn das Hauptgebiet von n-ter Stufe ist, namentlich ist die Reciprocität zwischen Grössen erster und (n — 1)-ter Stufe von Interesse. Noch anschaulicher wird sich diese Reciprocität weiter unten entfalten.

102. Wenn E, F, G Einheiten sind, deren Stufenzahlen zusammen n (Stufenzahl des Hauptgebietes) betragen, so ist

$$[EF \cdot EG] = [EFG] \cdot E.$$

Beweis. Wir können zwei Fälle unterscheiden, entweder [EFG] enthält gleiche Faktoren oder nicht. Enthält es gleiche, so muss, da die Anzahl seiner einfachen Faktoren, nach der Voraussetzung, gleich n, gleich der Anzahl der ursprünglichen Einheiten ist, eine dieser Einheiten, etwa e_1, unter den Faktoren von [EFG] fehlen.

Nun sei $[EF] = |Q$, so muss (nach 80) Q diesen auch in [EF] fehlenden Faktor e_1 enthalten; ebenso sei $[EG] = |R$, so muss R diesen Faktor gleichfalls enthalten. Also ist dann (nach 60) [QR] gleich null. Nun ist

$$[EF \cdot EG] = [|Q|R] = |[QR] \qquad [94],$$

also gleich der Ergänzung von $[QR] = 0$, also (nach 89) selbst null. Aber es ist auch [EFG], da es nach der Annahme gleiche Faktoren enthält, null, somit beide Seiten der zu erweisenden Gleichung null.

Wenn dagegen [EFG] keine gleichen Faktoren enthält, so muss es, da es n Faktoren enthalten soll und zwar keine andern als ursprüngliche Einheiten, ein Produkt der n ursprünglichen Einheiten sein. Dann ist (nach 89)

$$|G = [GEF][EF], \quad |F = [FEG][EG].$$

Da hier [GEF] und [FEG] als Produkte sämmtlicher Einheiten $e_1, \cdots e_n$ gleich $\mp [e_1 e_2 \cdots e_n]$, also (nach 94) $= \mp 1$ sind, und die Multiplikation ∓ 1 gleiches Resultat mit der Division durch ∓ 1 liefert, so können wir die obigen Gleichungen auch so schreiben:

$$[EF] = [GEF]|G, \quad [EG] = [FEG]|F.$$

Dann wird, da man überdies Zahlfaktoren beliebig ordnen darf,

$$[EF \cdot EG] = [GEF][FEG][|G|F] = [GEF][FEG]|[GF] \qquad [97]$$
$$= [GEF][FEG][GFE]E \qquad [89].$$

Nun ist $[EF] = \mp [FE]$ (nach 58). Vertauscht man also in dem gewonnenen Ausdrucke zweimal E mit F, so bleibt sein Werth ungeändert, und so wird er

$$= [GEF][EFG][GEF]E.$$

Aber da $[GEF] = \mp 1$ ist, so wird $[GEF][GEF] = 1$ und somit erhält man

$$[EF \cdot EG] = [EFG]E.$$

103. Wenn A, B, C einfache Grössen sind und die Summe ihrer Stufenzahlen gleich der Stufenzahl n des Hauptgebietes ist, so ist

$$[AB \cdot AC] = [ABC]A.$$

Beweis. Angenommen, die Formel 103 gelte für den Fall, dass A, B, C keine andern Faktoren enthalte als die, welche einer gegebenen Reihe von n Grössen erster Stufe $a_1, a_2, a_3, \cdots$ angehören, so zeige ich, dass sie auch noch gelte, wenn man statt einer dieser n Grössen, etwa statt a_1, eine aus ihnen numerisch abgeleitete setzt, etwa $a' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots = \sum \alpha_r a_r$. Es kann a_1 entweder in A oder B oder C enthalten sein. Ist a_1 in B enthalten, so sei $B = a_1 D$, und verwandle sich B durch die obige Substitution in $B' = a'D$. Dann wird

$$[AB' \cdot AC] = [A \sum \alpha_r a_r D \cdot AC] = \sum \alpha_r [Aa_r D \cdot AC]$$
$$= \sum \alpha_r [Aa_r DC] \cdot A,$$

da nach der Annahme Formel 103 für den Fall, dass die betrachteten Grössen nur $a_1, a_2, \cdots$ als einfache Faktoren enthalten, gelten soll. Also ist

$$[AB' \cdot AC] = \sum \alpha_r [Aa_r DC] \cdot A = [A \sum \alpha_r a_r DC]A$$
$$= [Aa'DC]A = [AB'C]A.$$

Genau dieselben Schlüsse gelten, wenn a_1 in C enthalten ist. Es bleibt also nur der Fall zu behandeln, wo a_1 in A enthalten ist. In diesem Falle verwandle sich zunächst a_1 in $a' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, und sei $A = [a_1 D]$, also

$$A' = [a'D] = \alpha_1 [a_1 D] + \alpha_2 [a_2 D]$$
$$= \alpha_1 A + \alpha_2 [a_2 D] \quad *$$

Sollte a_2 noch in D enthalten sein, so wäre der letzte Summand (nach 60) null; es verwandelte sich also A' nur in sein Vielfaches, also würde dann

$$[A'B \cdot A'C] = \alpha^2 [AB \cdot AC] = \alpha^2 [ABC]A$$
$$= [\alpha ABC]\alpha A = [A'BC]A'.$$

Also bleibt nur noch der Fall zu betrachten, wo a_2 in B oder in C, z. B. in B, vorkommt. In diesem Falle sei

$B=[a_2E]$. Es war, wie oben (*) gezeigt, $A'=\alpha_1 A+\alpha_2[a_2D]$, und da a_2 in B als Faktor enthalten ist, und alſo $[a_2DB]$ null wird, ſo ist $[A'B]=\alpha_1[AB]$; ferner ist $[A'C]=[(\alpha_1 A+\alpha_2[a_2D])C]$ $=\alpha_1[AC]+\alpha_2[a_2DC]$, alſo

$$[A'B\cdot A'C]=\alpha_1^2[AB\cdot AC]+\alpha_1\alpha_2[AB\cdot a_2DC]$$
$$=\alpha_1^2[ABC]\cdot A+\alpha_1\alpha_2[AB\cdot a_2DC].$$

Aber $[AB\cdot a_2DC]=[a_1Da_2E\cdot a_2DC]=-[a_2Da_1E\cdot a_2DC]$ (55) $=-[a_2Da_1EC][a_2D]$. Letzteres nämlich ist der Fall, da die drei Grössen $[a_2D]$, $[a_1E]$ und C keine andern Faktoren enthalten, als ſolche, die der Grössenreihe $a_1, a_2, a_3\cdots$ angehören, und die Summe der Stufenzahlen n iſt, alſo die Bedingungen alle erfüllt ſind, unter denen die Geltung der Formel $[AB\cdot AC]=[ABC]A$ angenommen war. Somit wird

$$[A'B\cdot A'C]=\alpha_1^2[ABC]A-\alpha_1\alpha_2[a_2Da_1EC][a_2D]$$
$$=\alpha_1^2[ABC]A+\alpha_1\alpha_2[a_1Da_2EC][a_2D] \quad [55]$$
$$=\alpha_1^2[ABC]A+\alpha_1\alpha_2[ABC][a_2D]$$
$$=\alpha_1[ABC](\alpha A+\alpha_2[a_2D])$$
$$=[\alpha_1 ABC]\cdot A' \quad [*]$$
$$=[A'BC]A'.$$

Daſſelbe gilt, wenn a_2 in C ſtatt in B enthalten war. Alſo iſt gezeigt, daſs die Formel immer beſtehen bleibt, wenn man einen Faktor a_1 in $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2$ verwandelt, alſo auch, wenn man dieſen wieder in $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3$ verwandelt u. ſ. f.

Es iſt alſo jetzt vollſtändig erwieſen, daſs, wenn die Formel 103 für irgend eine Reihe von n Grössen erſter Stufe $a_1, a_2\cdots a_n$ gilt, welche die einfachen Faktoren der Grössen A, B, C bilden, ſie auch noch beſtehen bleibt, wenn man ſtatt irgend eines dieſer Faktoren eine aus jenen Grössen $a_1\cdots a_n$ numeriſch abgeleitete ſetzt. Da ſich daſſelbe wieder auf die ſo hervorgehende Reihe von Grössen anwenden lässt, ſo folgt, daſs die Formel auch noch beſtehen bleibt, wenn man ſtatt der einfachen Faktoren der Grössen A, B, C beliebige aus jenen Grössen $a_1\cdots a_n$ numeriſch abgeleitete Grössen ſetzt. In der That, es ſeien z. B. $b_1\cdots b_n$ ſolche aus $a_1\cdots a_n$ numeriſch abgeleitete Grössen. Wie dieſe auch beſchaffen ſeien, immer wird ſich (nach 17) unter ihnen ein Verein von m Grössen angeben laſſen, welche in keiner Zahlbeziehung

zu einander stehen, und aus denen sich, wenn m kleiner als n ist, die übrigen numerisch ableiten lassen. Es seien nun $b_1 \cdots b_m$ diese Grössen, aus denen $b_{m+1} \cdots b_n$ numerisch ableitbar sind; dann kann man (nach 20) statt m der Grössen $a_1 \cdots a_n$, die Grössen $b_1 \cdots b_m$ in der Art einführen, dass das Gebiet der so erhaltenen Grössen dem Gebiete der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch wird. Es seien $a_1 \cdots a_m$ die Grössen, statt deren man in dieser Weise $b_1 \cdots b_m$ einführen kann, so wird nun das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_m a_{m+1} \cdots a_n$, oder, indem man dieselbe Schlussfolge Schritt für Schritt anwendet: Es wird das Gebiet

$a_1 a_2 \cdots a_n$ identisch dem Gebiet $b_1 a_2 \cdots a_n$,

dies wieder identisch $b_1 b_2 a_3 \cdots a_n$,

⋮

und endlich identisch $b_1 b_2 \cdots b_m a_{m+1} \cdots a_n$.

Gilt nun Formel 103 für $a_1 \cdots a_n$, so gilt sie auch, wenn man statt des Faktors a_1 die aus $a_1 \cdots a_n$ abgeleitete Grösse b_1 setzt, also für $b_1, a_2 \cdots a_n$. Da nun das Gebiet $a_1 \cdots a_n$ mit dem Gebiete $b_1, a_2 \cdots a_n$ identisch ist, und b_2 nach der Annahme aus $a_1 \cdots a_n$ ableitbar ist, so ist es auch aus $b_1, a_2 \cdots a_n$ ableitbar, folglich bleibt Formel 103 noch bestehen, wenn man b_2 statt a_2 setzt, d. h. für die Reihe $b_1, b_2, a_3 \cdots a_n$ u. s. f., endlich noch für die Reihe $b_1, b_2 \cdots b_m, a_{m+1} \cdots a_n$. Ferner, da nach der Annahme $b_{m+1} \cdots b_n$ aus $b_1, b_2, \cdots b_m$ numerisch ableitbar sind, so bleibt nun 103 auch noch bestehen, wenn man nach und nach in der Reihe $b_1 \cdots b_m, a_{m+1} \cdots a_n$, statt $a_{m+1} \cdots a_n$ die Grössen $b_{m+1} \cdots b_n$ setzt, also auch für die Reihe $b_1 \cdots b_n$, d. h. für jede beliebige aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch abgeleitete Grössenreihe. Nun gilt aber 103 für die ursprünglichen Einheiten $e_1 \cdots e_n$ (nach 102), also für eine beliebige Reihe von Grössen erster Stufe, welche die einfachen Faktoren von A, B, C bilden, d. h. für beliebige einfache Grössen A, B, C.

104. Auch wenn B und C zusammengesetzte Grössen sind, A aber eine einfache Grösse und die Summe der Stufenzahlen von A, B, C gleich der Stufenzahl des Hauptgebietes ist, so ist

$$[AB \cdot AC] = [ABC]A.$$

Beweis. Es sei

$$B = \sum \beta_r E_r, \quad C = \sum \gamma_s F_s,$$

wo E_r und F_s Einheitsprodukte sind, so ist

$$\begin{aligned} [AB \cdot AC] &= \sum \beta_r \gamma_s [AE_r \cdot AF_s] && [45] \\ &= \sum \beta_r \gamma_s [AE_r F_s] A && [103] \\ &= [A \sum \beta_r E_r \sum \gamma_s F_s] A && [45] \\ &= [ABC]A. \end{aligned}$$

Anm. Dieser Satz gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn A eine zusammengesetzte Grösse ist. Ist z. B. $A = ab + cd$, wo a, b, c, d in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen sollen, und ist $B = c$, $C = d$, so wird in Bezug auf ein Gebiet 4ter Stufe $[AB \cdot AC] = [(ab + cd)c \cdot (ab + cd)d] = [abc \cdot abd]$, da [cdc] und [cdd] verschwinden; aber $[abc \cdot abd] = [abcd] \cdot [ab]$. Also ist

$$[AB \cdot AC] = [abcd] \cdot ab.$$

Dagegen ist

$$[ABC] \cdot A = [(ab + cd)cd] \cdot [(ab) + (cd)] = [abcd][(ab) + (cd)] = [abcd] \cdot [ab] + [abcd] \cdot [cd].$$

Also sind beide Ausdrücke um $[abcd] \cdot [cd]$ von einander verschieden.

105—107. Wenn A, B, C einfache Grössen sind, und ihr Produkt von nullter Stufe ist, so ist

105. $[AB \cdot AC] = [ABC]A$

106. $[AB \cdot BC] = [ABC]B$

107. $[AC \cdot BC] = [ABC]C$,

d. h. wenn zwei Produkte (P und Q) einfacher Grössen, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben, zu multipliciren sind, und dieser gemeinschaftliche Faktor entweder in dem zweiten Produkte (Q) als erster Faktor oder in dem ersten (P) als zweiter Faktor vorkommt, so kann man diesen Faktor mit dem Produkte der übrigen Faktoren multipliciren, vorausgesetzt, dass dies letztere Produkt von nullter Stufe ist. In beiden Fällen ist das Gesammtprodukt von gleichem Werthe.

Beweis 1. Sind α, β, γ die Stufenzahlen von A, B, C und n die des Hauptgebietes, so muss, da [ABC] von nullter Stufe sein soll, (nach 96) $\alpha + \beta + \gamma$ durch n theilbar sein, also, da α, β, γ kleiner als n sind, entweder gleich n oder gleich 2n sein. Ist $\alpha + \beta + \gamma = n$, so ist die Geltung der Formel 105 schon in 103 bewiesen. Ist dagegen $\alpha + \beta + \gamma = 2n$, so sei

$$A = |A',\ B = |B',\ C = |C'$$

und ſeien $\alpha' + \beta' + \gamma'$ die Stufenzahlen von A', B', C', ſo ist

$$\alpha' = n - \alpha,\ \beta' = n - \beta,\ \gamma' = n - \gamma \qquad [90],$$

alſo $\alpha' + \beta' + \gamma' = 3n - (\alpha + \beta + \gamma) = 3n - 2n = n.$

Somit $[AB \cdot AC] = ([|A'|B'] \cdot [|A'|C']) = |[A'B' \cdot A'C'] \quad [99]$

$= |[A'B'C' \cdot A'] \qquad [103],$

da nämlich $\alpha' + \beta' + \gamma' = n$ iſt. Dies iſt aber (nach 99)

$= [|A'|B'|C'] \cdot |A' = [ABC]A.$

2. Es ſei $[AB] = [BD]$, ſo iſt D von gleicher Stufe mit A, alſo

$$[AB \cdot BC] = [BD \cdot BC] = [BDC]B \qquad [105]$$
$$= [ABC]B,$$

da $[BD] = [AB]$ iſt.

3. Es ſei $[BC] = [CD]$, ſo iſt D von gleicher Stufe mit B, alſo

$$[AC \cdot BC] = [AC \cdot CD] = [ACD] \cdot C \qquad [106]$$
$$= [ABC]C,$$

da $[CD] = [BC]$ iſt.

Anm. Es laſſen ſich die in 105—107 aufgeſtellten Geſetze ſo erweitern, daſs ſie auch für den Fall gelten, wo [ABC] nicht von nullter Stufe iſt, wenn man ſie nämlich in den folgenden Formen darſtellt:

$$[AB \cdot AC] = [A \cdot ABC]$$
$$[AB \cdot BC] = [B \cdot ABC]$$
$$[AC \cdot BC] = [C \cdot ABC].$$

Den Beweis dieſer Formeln, die ich in dieſer allgemeineren Bedeutung im Folgenden nicht anwenden werde, überlaſſe ich dem Leſer.

108. Wenn A, B, C einfache Grössen ſind, und die Summe der Stufenzahlen von A und C gleich der des Hauptgebietes, und B dem A untergeordnet iſt, ſo iſt

$$[A \cdot BC] = [AC]B$$
$$[CB \cdot A] = [CA]B.$$

Beweis. Denn dann iſt (nach 79 Zuſatz) A in der Form BD darſtellbar, und alſo

$$[A \cdot BC] = [BD \cdot BC] = [BDC] \cdot B \qquad [105]$$
$$= [AC]B$$

und

$$[CB \cdot A] = [CB \cdot BD] = [CBD]B \qquad [106]$$
$$= [CA]B.$$

109. Ein bezügliches Produkt zweier einfacher Grössen, die nicht null sind, ist dann, und nur dann von null verschieden, wenn die Stufenzahl ihres gemeinschaftlichen Gebietes den kleinsten, oder, was dasselbe ist, die Stufenzahl ihres verbindenden Gebietes den grössten Werth hat, den sie bei gegebenen Stufenzahlen der beiden Faktoren und des Hauptgebietes haben kann, d. h. wenn α und β die Stufenzahlen der Faktoren A und B, n die des Hauptgebietes ist, γ die des gemeinschaftlichen, δ die des verbindenden Gebietes, so ist, wenn $\alpha+\beta=<n$, d. h. das Produkt ein progressives ist,

$[AB]\gtrless 0$, dann und nur dann, wenn
$\gamma=0$, oder, was dasselbe ist,
$\alpha+\beta=\delta$, und

wenn $\alpha+\beta>n$, d. h. das Produkt ein regressives ist, so ist

$[AB]\gtrless 0$, dann und nur dann, wenn
$\gamma=\alpha+\beta-n$, oder, was dasselbe,
$\delta=n$

ist.

Beweis 1. Wenn $\alpha+\beta=<n$ ist, so ist das Produkt (nach 94) progressiv, also (nach 61, 66) dann und nur dann null, wenn seine einfachen Faktoren in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Ist also $[AB]=0$, so lässt sich von den einfachen Faktoren des Produktes $[AB]$ einer aus den $\alpha+\beta-1$ übrigen numerisch ableiten (nach 2). Also werden dann sämmtliche einfache Faktoren jenes Produktes von einem Gebiete von niederer als $(\alpha+\beta)$-ter Stufe umfasst, d. h. $\delta<\alpha+\beta$. Ist hingegen $[AB]\gtrless 0$, so stehen die einfachen Faktoren dieses Produktes (nach 61) in keiner Zahlbeziehung zu einander, ihr verbindendes Gebiet ist also von $(\alpha+\beta)$-ter Stufe, d. h. $\alpha+\beta=\delta$. Somit ist, wenn $\alpha+\beta=<n$ ist, $[AB]$ dann und nur dann von null verschieden, wenn $\alpha+\beta=\delta$ ist.

2. Es sei $\alpha+\beta>n$ und $\alpha+\beta-n=\gamma$. Dann haben die Gebiete A und B, da sie beziehlich von α-ter und β-ter Stufe sind, (nach 26) mindestens ein Gebiet $(\alpha+\beta-n)$-ter d. h. γ-ter Stufe gemein. Es sei C eine Grösse von γ-ter Stufe in diesem Gebiete, so sind (nach 79 Zus.) A und B in den Formen $A=[CA_1]$, $B=[CB_1]$ darstellbar. Somit wird

$$[AB]=[CA_1\cdot CB_1]=[A_1B_1]\cdot C \qquad [103],$$

weil die Summe der Stufenzahlen von C, A_1 und B_1, $= \gamma + (\alpha - \gamma) + (\beta - \gamma) = \alpha + \beta - \gamma = n$ ſind. Es ist aber $[CA_1B_1]C$, da $[CA_1B_1]$ von nullter Stufe, alſo eine Zahl ist, dann und nur dann null, wenn $[CA_1B_1]$, d. h. $[AB_1]$ null ist. Aber nach Beweis 1 ist $[AB_1]$ dann und nur dann null, wenn A und B_1 von einem Gebiet von niederer als n-ter Stufe umfasst werden, aber da C in $A = CA_1$ liegt, ſo werden dann auch A und CB_1, d. h. A und B von einem Gebiete niederer als n-ter Stufe, umfasst, d. h. $\delta < n$. Somit ist, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, [AB] dann und nur dann von null verschieden, wenn $\delta = n$ ist.

3. Nach 25 ist die Summe der Stufenzahlen zweier Gebiete gleich der Summe der Stufenzahlen ihres gemeinschaftlichen und ihres verbindenden Gebietes, d. h.

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta.$$

Die Bedingung in Beweis 1, dass $\alpha + \beta = \delta$ ſei, ist alſo identisch mit der, dass $\gamma = 0$ ſei, und die Bedingung in Beweis 2, dass $\delta = n$ ſei, ist identisch mit der, dass

$$\alpha + \beta - n = \gamma$$

ſei. Somit ist der zweite Wortausdruck unſeres Satzes bewieſen. Nun ist aber klar, dass, wenn α und $\beta = < n$ ist, die kleinste Stufenzahl, die das den Grössen A und B gemeinschaftliche Gebiet haben kann, null, und die grösste, die das verbindende Gebiet haben kann, $\alpha + \beta$ ist. Auf der andern Seite, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, ſo ist die grösste Stufenzahl, die das verbindende Gebiet haben kann, n, alſo (nach 26) die kleinste, die das verbindende Gebiet haben, $\alpha + \beta - n$. Somit stimmt der erste Wortausdruck mit dem zweiten überein, und der Satz ist erwieſen.

110. Alle Geſetze der auf ein Hauptgebiet bezüglichen Multiplikation gelten auch noch, wenn man überall statt der ursprünglichen Einheiten eine beliebige Reihe von n Grössen ſetzt, die aus jenen numerisch abgeleitet ſind, und deren kombinatorisches Produkt 1 ist.

Beweis. Es ſeien $e_1 \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, und $a_1 \cdots a_n$ aus ihnen numerisch abgeleitet, und zwar ſo, dass

$$[a_1, a_2 \cdots a_n] = 1$$

ist.

Nach 89 wurde unter der Ergänzung |E eines Einheitsproduktes E diejenige Grösse verstanden, welche dem kombinatorischen Produkte E′ aller in E nicht vorkommender Einheiten gleich oder entgegengefetzt ist, je nachdem [EE′] der abfoluten Einheit gleich oder entgegengefetzt ist, d. h. für die

$$|E = [EE']E'$$

war. Bezeichnen wir nun diejenige Grösse, welche aus einem Produkte A, in welchem nur die Grössen $a_1 \cdots a_n$ vorkommen, auf entsprechende Weife gebildet ist, für den Augenblick mit IA, d. h. bezeichnet IA diejenige Grösse, welche dem kombinatorischen Produkte A′ aller derjenigen Grössen jener Reihe $[a_1 \cdots a_n]$, welche in A nicht vorkommen, gleich oder entgegengefetzt ist, je nachdem [AA′] der abfoluten Einheit gleich oder entgegengefetzt ist, d. h. fo dass

$$IA = [AA']A'$$

ist, fo haben wir zunächst zu beweifen, dass die als Definition des bezüglichen Produktes in 94 aufgestellte Bestimmung, auch bei diefer Einfetzung der Grössen $a_1 \cdots a_n$ an die Stelle der urfprünglichen Einheiten noch ihre Geltung behalte, d. h. dass

$$I[AB] = [IAIB]$$

fei, wenn A und B nur Grössen aus der Reihe $a_1 \cdots a_n$ als einfache Faktoren enthalten, und die Summe $(\alpha + \beta)$ der Stufenzahlen von A und B kleiner ist als die Stufenzahl n des Hauptgebietes.

Es fei zuerst $[AB] = 0$, fo müssen (nach 109) die Gebiete A und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben; fie mögen ein Gebiet γ-ter Stufe gemein haben, alfo γ einfache Faktoren, dann werden diefe Faktoren, da IA nur diejenigen Faktoren enthält, welche in A nicht vorkommen, in IA fehlen, und aus gleichem Grunde auch in IB, alfo werden IA und IB von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst, fomit (nach 109)

$$[IAIB] = 0,$$

alfo, da auch [AB] null war und die Ergänzung einer Zahl (nach 89) diefer gleich, alfo die von null felbst null ist, fo ist

$$I[AB] = [IAIB].$$

Es sei zweitens [AB] von null verschieden, so enthält dasselbe $\alpha + \beta$ verschiedene einfache Faktoren der Reihe $a_1 \cdots a_n$, es sei C das Produkt der übrigen, also [ABC] (nach 57) dem Produkte $[a_1 \cdots a_n]$ entweder gleich oder entgegengesetzt, also da das letztere gleich 1 ist, so ist $[ABC] = \mp 1$. Da nun [BC] das Produkt der in A nicht vorkommenden Faktoren ist, so ist nach der hier angenommenen Bezeichnung

$$IA = [ABC] \cdot [BC], \text{ ebenso}$$
$$IB = [BAC] \cdot [AC] \text{ und } I[AB] = [ABC]C \quad *.$$

Also, da [ABC], [BAC] Zahlen $(= \mp 1)$ sind,

$$[IAIB] = [ABC][BAC][BC \cdot AC]$$
$$= [ABC][BAC][BAC] \cdot C \qquad [107].$$

Da nun $[BAC] = \mp 1$ ist, so ist $[BAC][BAC] = 1$. Also

$$[IAIB] = [ABC] \cdot C = I[AB] \qquad [*].$$

Es gilt also die Bestimmung, durch welche der Begriff der bezüglichen Multiplikation festgestellt wurde, auch wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Grössen $a_1 \cdots a_n$ einführt, alle früheren Gesetze gelten aber, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten beliebige n Grössen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, d. h. deren kombinatorisches Produkt nicht null ist, also auch, wenn man statt derselben die Grössen $a_1 \cdots a_n$ setzt. Aus diesen früheren Sätzen und der in der Definition festgestellten Bestimmung sind aber alle folgenden Gesetze abgeleitet, folglich gelten auch diese noch bei der angegebenen Substitution.

Anm. Durch das Fortbestehen der Multiplikations-Gesetze, auch wenn man eine Reihe lineal ableitbarer Einheiten den ursprünglichen substituirt, ist die Multiplikation als lineale bedingt, und erst im folgenden Kapitel werden wir zu einer Produktbildung übergehen, bei welcher das Fortbestehen der für die ursprünglichen Einheiten geltenden Gesetze, nur in einem viel beschränkteren Umfange, stattfindet. Zu bemerken ist noch, dass die oben mit IA bezeichnete Grösse im Allgemeinen nicht mit der Ergänzung von A, die wir mit |A bezeichneten, zusammenfällt, z. B. ist in einem Gebiete dritter Stufe, wenn e_1, e_2, e_3 die ursprünglichen Einheiten sind und $[e_1 e_2 e_3] = 1$ ist, die Ergänzung von $e_1 + e_2$, da $|e_1 = [e_2 e_3]$, $|e_2 = [e_3 e_1]$ ist, gleich $[e_2 e_3] + [e_3 e_1]$; denn (nach 90) ist

$$|(e_1 + e_2) = |e_1 + |e_2 = [e_2 e_3] + [e_3 e_1].$$

Dagegen, wenn

$$a_1 = e_1 + e_2, \; a_2 = e_2, \; a_3 = e_3$$

ist, so ist zwar $[a_1a_2a_3] = [e_1e_2e_3] = 1$, aber, bei Anwendung der Bezeichnung in obigem Satze,

$$Ia_1 = [a_1a_2a_3][a_2a_3] = [a_2a_3] = [e_2e_3],$$

also von $|a_1$ um $[e_2e_1]$ verschieden. Im folgenden Kapitel wird sich ergeben, welche Beziehungen zwischen $e_1 \cdots e_n$ und $a_1 \cdots a_n$ stattfinden müssen, wenn $|A = IA$ sein soll.

111. Wenn

$$1 = [a_1 \cdots a_n] = [PP'] = [AA'] = [BB'] = [CC'] \cdots$$

ist, und P, P', A, A', B, B', C, C' ... keine andern einfachen Faktoren enthalten, als die der Reihe $a_1 \cdots a_n$ angehören und

$$P = [ABC \cdots]$$

ist, so ist auch

$$P' = [A'B'C' \cdots].$$

Beweis. Es sei unter IA dasselbe verstanden, wie im vorigen Beweise, so ist

$$IP = [PP']P' = P', \quad IA = [AA']A' = A' \text{ u. s. w.}$$

Nun ist, da nach dem vorigen Satze alle früheren Sätze, also namentlich auch Satz 98 noch gilt, wenn man überall das Zeichen I statt | setzt,

$$I[ABC \cdots] = [IAIBIC \cdots],$$

also

$$IP = [IAIBIC \cdots].$$

Also, da $IP = P'$, $IA = A'$, $IB = B'$, $IC = C' \cdots$ ist,

$$P' = [A'B'C' \cdots].$$

112. Wenn man aus n Grössen erster Stufe, deren kombinatorisches Produkt 1 liefert, die multiplikativen Kombinationen zur $n - 1$-ten Klasse bildet, und die Elemente jeder Kombination alphabetisch, die Kombinationen selbst lexikographisch unter der Annahme ordnet, dass die Reihe jener n Grössen als ein Alphabet betrachtet wird, so ist das Produkt aus den $n - m$ ersten dieser Kombinationen gleich dem Produkt aus den m ersten jener n Grössen, d. h.

$$[A_n \cdots A_{m+1}] = [a_1 \cdots a_m],$$

wenn

$$A_r = [a_1 \cdots a_{r-1}a_{r+1} \cdots a_n]$$

und $[a_1 \cdots a_n] = 1$ ist.

Beweis 1. Ich beweise zuerst, dass

$$[a_1 \cdots a_rA_r] = [a_1 \cdots a_{r-1}]$$

ſei. Es ist nach der gewählten Beichnung

$$A_r = [a_1 \cdots a_{r-1} a_{r+1} \cdots a_n].$$

Alſo

$$[a_1 \cdots a_r A_r] = [a_1 \cdots a_r (a_1 \cdots a_{r-1} a_{r+1} \cdots a_n)]$$
$$= [a_1 \cdots a_r a_{r+1} \cdots a_n][a_1 \cdots a_{r-1}] \quad [105]$$
$$= [a_1 \cdots a_{r-1}],$$

da $[a_1 \cdots a_n] = 1$ ist.

2. Somit ist

$$[A_n A_{n-1}] = [a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1}] = [a_1 \cdots a_{n-2}]$$
$$[A_n A_{n-1} A_{n-2}] = [a_1 \cdots a_{n-2} A_{n-2}] = [a_1 \cdots a_{n-3}]$$

u. ſ. f. Alſo

$$[A_n A_{n-1} \cdots A_{n-r}] = [a_1 \cdots a_{n-r-1}].$$

Alſo, wenn $n - r - 1 = m$ ist,

$$[A_n A_{n-1} \cdots A_{m+1}] = [a_1 \cdots a_m].$$

113. Wenn $C_1, C_2, \cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus den einfachen Faktoren (erster Stufe) einer von null verschiedenen Grösse B ſind, und D_r jedesmal aus denjenigen Faktoren von B besteht, welche in C_r fehlen, und zwar die Faktoren ſo geordnet, dass jedesmal

$$[C_r B_r] = B$$

ist, ſo ist für jede Grösse A, deren Stufenzahl die Stufenzahl von D zu der des Hauptgebietes ergänzt,

$$[AB] = \sum \overline{[AD_r]C_r} = [AD_1]C_1 + [AD_2]C_2 + \cdots.$$

Beweis. Es möge m die Anzahl der einfachen Faktoren von B ſein und n die Stufe des Hauptgebietes, α die Stufenzahl von A, und ſei $B = [b_1, b_2 \cdots b_m]$.

Da nun nach der Annahme B von null verſchieden ist, ſo stehen (nach 61) $b_1 \cdots b_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, folglich lassen ſich (nach 20) zu ihnen noch $n - m$ Grössen erster Stufe $b_{m+1} \cdots b_n$ von der Art hinzufügen, dass ſich alle Grössen erster Stufe, welche dem betrachteten Hauptgebiete angehören, aus ihnen numerisch ableiten lassen. Dann lässt ſich A als Grösse α-ter Stufe aus den multiplikativen Kombinationen der n Grössen $b_1 \cdots b_n$ zur α-ten Klasse numerisch ableiten, alſo ſich in der Form

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots = \sum \overline{\alpha_r A_r}$$

darstellbar, wenn $A_1, A_2, \cdots$ die multiplikativen Kombinationen

aus $b_1 \cdots b_n$ zur α-ten Klasse ſind. Es ſeien dieſe Kombinationen $A_1, A_2, \cdots$ ſo gewählt, dass jedesmal A_r aus denjenigen jener n Grössen beſteht, welche in D_r fehlen. Dies ist allemal möglich, da D_r nach der Annahme $n - \alpha$ jener Grössen enthält. Dann ist

$$[AB] = \sum \overline{(\alpha_r A_r)B} = \sum \overline{\alpha_r [A_r B]} \qquad [41]$$
$$= \sum \overline{\alpha_r [A_r \cdot C_r D_r]},$$

da nach der Annahme $B = [C_r D_r]$ ist. Da nun C_r nur ſolche jener n Grössen $b_1 \cdots b_n$ enthält, die dem D_r fehlen, und A_r ſämmtliche in D_r fehlenden Grössen $b_1 \cdots b_n$ enthält, ſo ist C_r dem A_r untergeordnet, ſomit (nach 108) $[A_r \cdot C_r D_r] = [A_r D_r] C_r$, alſo

$$[AB] = \sum \overline{\alpha_r [A_r D_r] C_r}.$$

Nun ist aber $[A_s D_r] = 0$, wenn s von r verſchieden ist, weil dann A_s mindestens einen Faktor enthält, der auch in D_r vorkommt, alſo kann man ſtatt $\alpha_r [A_r D_r]$ ſchreiben $\sum \alpha_s [A_s D_r]$, wo ſich die Summe nur auf den Index s bezieht, d. h. es ist $\alpha_r [A_r D_r] = \sum \alpha_s [A_s D_r] = [\sum \alpha_s A_s D_r] = [A D_r]$, ſomit

$$[AB] = \sum \overline{[A D_r] C_r}.$$

§. 6. Vertauſchung der Faktoren und Auflösung der Klammern in einem reinen und gemiſchten Produkte.

114. Erklärung. Wenn mehr als zwei Grössen A, B, C, $\cdots$ ſo zu einem Produkte verknüpft ſind, dass ſie keiner anderen als der progreſſiven Multiplikation unterliegen, ſo nenne ich das Produkt ein rein progreſſives Produkt jener Grössen, wenn ſie dagegen keiner andern als der regreſſiven Multiplikation unterliegen, oder, falls das Geſammtprodukt von nullter Stufe ist, nur die letzte das Geſammtprodukt bildende Multiplikation eine progreſſive ist, ſo nenne ich das Produkt ein rein regreſſives, in beiden Fällen ein reines, in jedem andern Falle ein gemiſchtes, d. h. wenn in dem Produkte $[ABCD \cdots JK]$, das Produkt $[AB]$ ein progreſſives, das Produkt der zwei Grössen $[AB]$ und C wieder ein progreſſives, ebenſo das Produkt der zwei Grössen $[ABC]$ und D, u. ſ. f., endlich auch das Produkt der zwei Grössen $[ABCD \cdots J]$

und K ein progressives ist, so ist [ABCD···JK] ein rein progressives Produkt der Grössen A, B, C, D, ··· J, K. Wenn hingegen alle jene Produkte regressive sind, oder wenigstens nur das letzte, nämlich das der zwei Grössen [ABCD···J] und K ein progressives Produkt, und zwar von nullter Stufe ist, so ist [ABCD···JK] ein rein regressives Produkt der Grössen A, B, C, D, ··· J, K.

Anm. Dass das Produkt auch in dem Falle als ein rein regressives betrachtet wird, wenn die letzte Multiplikation, die das ganze Produkt nullter Stufe bildet, eine progressive ist, beruht darauf, dass die progressive Multiplikation, welche ein Produkt nullter Stufe bildet, auch insofern zugleich als regressive Multiplikation betrachtet werden kann, als alle speciellen Gesetze regressiver Multiplikation ebenso für dasselbe gelten, wie die speciellen Gesetze progressiver Multiplikation. Als Beispiel einer solchen rein regressiven Multiplikation diene das Produkt [ab·ac·bc], wenn das Hauptgebiet von dritter Stufe ist.

115. Wenn ein Produkt mehrerer Grössen [ABC··] ein rein progressives ist, so ist das Produkt der Ergänzungen [|A|B|C···] ein rein regressives und umgekehrt.

Beweis. Denn (nach 97 Zus.) gilt dies für zwei Faktoren, also da [AB] ein progressives ist, so ist [|A|B] ein regressives, und da [(AB)C] ein progressives ist, so ist [|(AB)|C] ein regressives, also [|A|B|C] ein rein regressives u. s. w.

116. Ein Produkt von m Grössen A, B, C, ··· J, K ist ein rein progressives, wenn die Summe der Stufenzahlen dieser Grössen ebenso gross oder kleiner als die Stufenzahl (n) des Hauptgebietes ist, hingegen ein rein regressives, wenn jene Summe ebenso gross oder grösser als n(m — 1) ist, ein gemischtes, wenn jene Summe grösser als n und kleiner als n(m — 1) ist.

Beweis 1. Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ die Stufenzahlen der Grössen A, B, C, ···. Wenn $\alpha + \beta + \gamma + \cdots \iota + \varkappa \leqq n$ ist, so ist auch $\alpha + \beta < n$, also das Produkt [AB] (nach 94) ein progressives; aber auch $\alpha + \beta + \gamma < n$, also das Produkt der zwei Grössen [AB] und C ein progressives, u. s. f. Endlich auch $\alpha + \beta + \gamma + \cdots \iota + \varkappa \leqq n$, also auch das Produkt der zwei Grössen [ABC···J] und K, da die Stufe von [ABC···J] (nach 95) gleich $\alpha + \beta + \gamma + \cdots \iota$ ist, ein progressives.

Ebenſo folgt das Umgekehrte, dass nämlich, wenn $[ABC\cdots JK]$ ein rein progressives Produkt ist, $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\iota+\varkappa = < n$ ſein muss.

2. Wenn $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\iota+\varkappa = > n(m-1)$ ist, ſo können wir dies auch ſo schreiben: $(n-\alpha)+(n-\beta)+(n-\gamma)+\cdots+(n-\iota)+(n-\varkappa) = < n$, weil nämlich m die Anzahl der Grössen A, B, C, $\cdots$ J, K ist. Da nun $n-\alpha$ die Stufenzahl der Ergänzung von A, d. h. die Stufenzahl von |A ist u. ſ. w., ſo ist das Produkt

$$[|A|B|C\cdots|J|K]$$

nach Beweis 1 ein rein progressives, folglich (nach 115) $[ABC\cdots JK]$ ein rein regressives.

117. Die Stufenzahl eines rein progressiven Produktes ist 0, wenn die Summe der Stufenzahlen ſeiner Faktoren gleich der Stufenzahl n des Hauptgebietes ist, in jedem andern Falle ist die Stufenzahl jenes Produktes gleich der Summe der Stufenzahlen ſeiner Faktoren. Die Stufenzahl eines rein regressiven Produktes ist $= \varsigma-(m-1)n$, wenn ς die Summe der Stufenzahlen ſeiner Faktoren und m die Anzahl dieſer Faktoren ist.

Beweis. Für zwei Faktoren ist der Satz in 95 bewieſen. Ist nun das Produkt $[ABC\cdots JK]$ ein rein progressives, und ſind $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \iota, \varkappa$ die Stufenzahlen von A, B, C $\cdots$ J, K, ſo ist die von $[AB] = \alpha+\beta$, die alſo von $[(AB)C] = \alpha+\beta+\gamma$ u. ſ. w.; alſo die von $[ABC\cdots J] = \alpha+\beta+\gamma+\cdots\iota$. Ist nun $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\iota+\varkappa < n$, ſo ist nach demſelben Satze (95) die Stufenzahl von $[(ABC\cdots J)K] = \alpha+\beta+\gamma+\cdots\iota+\varkappa$, wenn aber $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\iota+\varkappa = n$ ist, ſo ist ſie nach demſelben Satze null. Ist zweitens das Produkt $[ABC\cdots JK]$ ein rein regressives, ſo ist nach dem angeführten Satze die Stufenzahl von $[AB]$ gleich $\alpha+\beta-n$, alſo die von $[(AB)C]$ gleich $\alpha+\beta+\gamma-2n$ u. ſ. w., alſo wenn m die Anzahl der Faktoren von $[ABC\cdots JK]$ ist, die Stufenzahl dieſes Produktes $= \alpha+\beta+\gamma+\cdots+\iota+\varkappa-(m-1)n$.

118. Das Gebiet eines rein progressiven Produktes ist gleich dem ſeine ſämmtlichen Faktoren verbindenden Gebiete, und das Gebiet eines rein regressiven Produktes gleich dem ſeinen ſämmtlichen Faktoren gemeinſchaftlichen Gebiete, vorausgeſetzt, dass in beiden Fällen das Produkt nicht null ist.

Beweis 1. Es sei $[AB\cdots]$ ein rein progressives Produkt und $A = [a_1 \cdots a_q]$, $B = [b_1 \cdots b_r]$, u. s. w., wo $a_1, \cdots a_q$, $b_1, \cdots b_r$, u. s. w. Grössen erster Stufe sind, so erhält man

$$[AB\cdots] = [(a_1 \cdots a_q)(b_1 \cdots b_r)\cdots].$$

Da nun das progressive Produkt stets zugleich ein äusseres ist, so kann man (nach 80) die Klammern weglassen und es wird der letzte Ausdruck

$$= [a_1 \cdots a_q b_1 \cdots b_r \cdots].$$

Das Gebiet des Produktes ist also (nach 77) das aus seinen einfachen Faktoren $a_1, \cdots a_q$, $b_1, \cdots b_r, \cdots$ numerisch ableitbare Gebiet. Ebenso ist das Gebiet von A das aus $a_1, \cdots a_q$ ableitbare Gebiet u. s. w. und (nach 15) ist das aus den Grössen zweier oder mehrerer Gebiete A, B, $\cdots$ ableitbare Gebiet, das diese letzteren verbindende Gebiet, also das Gebiet des progressiven Produktes $[AB\cdots]$ das die Faktoren A, B, $\cdots$ verbindende Gebiet.

2. Es sei $[AB]$ ein von null verschiedenes regressives Produkt, also die Stufenzahlen α und β der Faktoren A und B zusammen grösser als n, so haben A und B ein Gebiet $\alpha + \beta -$ n-ter Stufe gemein; aber auch kein Gebiet höherer Stufe, weil sonst (nach 109) das Produkt null sein würde. Also lassen sich A und B auf einen gemeinschaftlichen Faktor D von $\alpha + \beta -$ n-ter Stufe von der Art bringen, dass $A = DE$, $B = DF$ und D, E, F einfache Grössen sind; dann ist (nach 105)

$$[AB] = [DE \cdot DF] = [DEF] \cdot D \equiv D,$$

da $[DEF]$ eine von null verschiedene Zahl ist, d. h. das Gebiet von $[AB]$ ist gleich dem den Faktoren A und B gemeinschaftlichen Gebiete. Tritt nun noch ein Faktor C hinzu, so wird

$$[ABC] \equiv [DC] \equiv E,$$

wenn E das dem D und C gemeinschaftliche Gebiet ist, also das dem A, B, C gemeinschaftliche u. s. w.

119. In einem reinen Produkte kann man Klammern beliebig setzen und weglassen, d. h.

$$[A(BC)] = [ABC],$$

wenn $[ABC]$ ein reines Produkt ist.

Beweis 1. Wenn das Produkt ein rein progressives ist,

so ist es (nach 94) auch ein äusseres, also (nach 80) die Klammersetzung gleichgültig für's Resultat.

2. Wenn das Produkt [ABC] ein rein regressives ist, so ist (nach 114) das Produkt [|A|B|C] ein rein progressives, also nach Beweis 1

$$[|A(|B|C)] = [|A|B|C],$$

d. h. (nach 101)

$$[A(BC)] = [ABC].$$

119b. Ein reines Produkt behält seinen Werth, wenn man seine Faktoren in lauter Faktoren erster oder $(n-1)$-ter Stufe auflöst, je nachdem das gegebene Produkt ein progressives oder regressives war. Auch behauptet das Produkt in Bezug auf diese neuen Faktoren seinen Charakter, als rein progressives oder regressives, d. h. wenn

$$P = [AB\cdots E]$$

ein reines Produkt der Faktoren A, B, $\cdots$ E ist, und

$A = [a_1\cdots a_q]$, $B = [a_{q+1}\cdots a_r]$ u. s. w., $E = [a_{t+1}\cdots a_u]$

und $a_1\cdots a_u$ Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe sind, je nachdem das Produkt $[AB\cdots E]$ ein progressives oder regressives ist, so ist auch

$$P = [a_1 a_2\cdots a_u]$$

und zwar auch dies Produkt ein rein progressives oder regressives, je nachdem das gegebene Produkt $[AB\cdots E]$ es war.

Beweis. Wenn das Produkt $[AB\cdots E]$ ein rein progressives ist, so ist die Summe der Stufenzahlen von A, B, $\cdots$ E, d. h. u, kleiner als n, somit bleibt es auch (nach 116) ein rein progressives in Bezug auf die Faktoren $a_1\cdots a_u$, wenn man statt A setzt $[a_1\cdots a_q]$ u. s. w., folglich kann man (nach 119) die Klammern weglassen und erhält $P = [a_1 a_2\cdots a_u]$. Ist aber $[AB\cdots E]$ ein rein regressives Produkt, so wird $[|A|B\cdots|E]$ (nach 115) ein rein progressives; und wenn $A = [a_1\cdots a_q]$ ist u. s. w., und $a_1,\cdots a_u$ Grössen $(n-1)$-ter Stufe sind, so ist $|A = [|a_1\cdots|a_q]$ u. s. w., wo $|a_1,\cdots|a_u$ Grössen erster Stufe sind, somit nach Beweis 1

$$[|A|B\cdots|E] = [|a_1\cdots|a_u].$$

Also auch (nach 101)

$$[AB\cdots E] = [a_1\cdots a_u],$$

und dies ein rein regressives Produkt (nach 115).

120. Ein reines Produkt bleibt sich selbst kongruent, wenn man die Ordnung der Faktoren beliebig ändert, d. h. $P_{A,B} \equiv P_{B,A}$.

Beweis 1. Sind q und r die Stufenzahlen von A und B, und ist zuerst das Produkt [AB] ein progressives, so ist (nach 58)

$$[AB] = (-1)^{qr}[BA], \text{ also } [AB] \equiv [BA].$$

Ist das Produkt [AB] ein regressives, die Stufe des Hauptgebietes n, so ist [|A|B] (nach 115) ein progressives Produkt, und da n − q und n − r die Stufen von |A und |B sind

$$[|A|B] = (-1)^{(n-q)(n-r)}[|B|A],$$

also (nach 101)

$$[AB] = (-1)^{(n-q)(n-r)}[BA], \text{ also auch } [AB] \equiv [BA].$$

2. Ist ferner das Produkt [PAB] ein reines, so ist

$$[PAB] = [P \cdot AB] \qquad [119]$$
$$\equiv [P \cdot BA]$$

nach Beweis 1 und nach 2, 40; dies wieder

$$= [PBA] \qquad [119],$$

also

$$[PAB] \equiv [PBA],$$

d. h. das Produkt bleibt sich kongruent, wenn man zwei auf einander folgende Faktoren vertauscht.

3. Durch Vertauschung zweier auf einander folgender Faktoren kann man nun nach und nach jeden Faktor auf jede beliebige Stelle bringen, also den Faktoren jede beliebige Ordnung geben, während dabei nach Beweis 2 das Produkt sich kongruent bleibt.

121. Wenn ein reines Produkt zwei einander incidente Faktoren, deren Stufenzahl nicht null ist, enthält, so ist das Produkt null, d. h. $P_{A,B} = 0$, wenn P reines Produkt und A und B incidente Faktoren sind.

Beweis 1. Sind A und B die einander incidenten Faktoren, also der eine dem andern untergeordnet, etwa B dem A, so ist B das gemeinschaftliche Gebiet und A das verbindende, also das Produkt [AB], da die Stufe von $B > 0$, und die von $A < n$ ist, (nach 109) null.

2. Enthält also ein Produkt P zwei einander incidente

Faktoren A und B, so kann man (nach 120) die Faktoren so ordnen, dass A und B auf einander folgen, wobei das Produkt sich selbst kongruent bleibt, also auch (nach 2) in dem einen Falle null bleibt, wenn es in dem andern null ist. Dann kann man (nach 119) diese beiden Faktoren in eine Klammer schliessen. Ihr Produkt ist null nach Beweis 1, also ein Faktor von P null, also auch P selbst null.

122. Ein gemischtes Produkt dreier Grössen [ABC] ist dann und nur dann null, wenn entweder $[AB] = 0$ ist, oder alle drei Grössen A, B, C von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als 0-ter Stufe gemein haben.

Beweis. Es seien α, β, γ die Stufenzahlen von A, B, C, also $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$ (nach 116). Es sei $[AB] \gtrless 0$, und sei zuerst $\alpha + \beta > n$ etwa $= n + \delta$, so lassen sich (nach 87) A und B auf einen gemeinschaftlichen Faktor δ-ter Stufe D bringen, so dass $A = DE$, $B = DF$ sind, so ist

$$[AB] = [DEF]D \qquad [105],$$

also da [AB] nach der Annahme $\gtrless 0$ ist, so muss auch [DEF] $\gtrless 0$ sein. Dann ist

$$[ABC] = [DEF][DC],$$

also, da [DEF] eine von null verschiedene Zahl ist, so ist [ABC] dann und nur dann null, wenn [DC] es ist. Die Stufe von [DC] ist $= \delta + \gamma = \alpha + \beta - n + \gamma$, also $< n$, da $\alpha + \beta + \gamma < 2n$ ist. Also ist das Produkt [DC] dann und nur dann null (nach 109), wenn D und C ein System von höherer als nullter Stufe gemein haben, d. h. (da D das gemeinsame System von A und B ist) wenn A, B und C ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben. Es sei zweitens $\alpha + \beta = < n$, so ist [AB] ein progressives Produkt, also, da [AB] nach der Annahme $\gtrless 0$ ist, das Produkt [(AB)C] (nach 109) dann und nur dann null, wenn [AB] und C, d. h. A, B und C, von einem Gebiete niederer als n-ter Stufe umfasst werden. Somit bewiesen.

123. Die Ordnung, in welcher man mit zwei einander incidenten einfachen Grössen fortschreitend multiplicirt, ist gleichgültig für das Resultat, d. h.

$$[ABC] = [ACB], \text{ wenn B incident C.}$$

Beweis 1. Wenn B oder C von nullter Stufe, d. h. Zahlen sind, so findet die Gleichheit beider Seiten statt (nach 18). Wenn die Produkte reine sind, so sind beide Seiten (nach 121) null, folglich ist der Satz nur noch zu erweisen für den Fall des gemischten Produktes, in welchem B und C von höherer als nullter Stufe sind; d. h. (wenn α, β, γ die Stufenzahlen von A, B, C sind, und n die des Hauptgebietes) für den Fall, dass $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$ und β und γ von null verschieden sind. Wir können, da die zu erweisende Formel sich nicht ändert, wenn man B und C mit einander verwechselt, annehmen, dass $\beta = < \gamma$ sei, d. h. da B und C einander incident sind, dass B dem C untergeordnet sei. Ausserdem nehmen wir zunächst an, auch A sei eine einfache Grösse. Da die Summe $\alpha + \beta$ ebenso gross oder kleiner als die Summe $\alpha + \gamma$ ist, so sind nur drei Fälle möglich: entweder beide Summen sind kleiner als n, oder beide grösser als n, oder es ist $\alpha + \gamma = > n$ und $\alpha + \beta = < n$.

2. Sind beide Summen kleiner als n, also auch $\alpha + \gamma < n$, so werden die drei Grössen A, B, C, von denen B der Grösse C untergeordnet ist, von einem Gebiete $\alpha + \gamma$-ter Stufe, also von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst, somit sind (nach 121) sowohl [ABC] als [ACB] null, also

$$[ABC] = [ACB].$$

3. Sind $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma > n$, so sind $(n - \alpha) + (n - \beta)$ und $(n - \alpha) + (n - \gamma) < n$, also dann, da $n - \alpha$, $n - \beta$, $n - \gamma$ die Stufenzahlen der Ergänzungen von A, B, C sind,

$$[|A|B|C] = [|A|C|B] \quad \text{(nach Beweis 2)},$$

also (nach 101)

$$[ABC] = [ACB].$$

4. Ist $\alpha + \gamma = > n$ und $\alpha + \beta = < n$, ersteres etwa $= n + \delta$, wo δ auch null sein kann, so müssen (nach 87) A und C sich auf einen gemeinschaftlichen Faktor D von δ-ter Stufe bringen lassen in der Art, dass $C = [DE]$ sei, wo D und E einfache Grössen sind und D dem A untergeordnet ist. Dann ist E von $(\gamma - \delta)$-ter Stufe, also die Summe der Stufenzahlen von A und E gleich $\alpha + \gamma - \delta = n$, somit ist (nach 108)

$$[AC] = [A \cdot DE] = [AE]D, \text{ also}$$
$$[ACB] = [AE][DB].$$

Hier ist das Produkt [DB] ein progressives, da $\delta + \beta = \alpha + \beta + \gamma - n < n$ ist, indem das Produkt ein gemischtes sein sollte. Wenn nun [DB] null ist, so haben (nach 109) D und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein, dann haben aber auch, da D dem A untergeordnet ist, A und B dies Gebiet gemein, das Produkt [AB] ist aber, da $\alpha + \beta = < n$ ist, ein progressives, folglich dies (nach 109) null. Also dann auch $[ABC] = 0$, ebenso wie [ACB], und somit beide einander gleich. Ist aber $[DB] \gtrless 0$, so ist, da D und B beide dem C untergeordnet sind, auch ihr verbindendes Gebiet [DB] dem Gebiete von C untergeordnet, also C (nach 79b) in der Form [DBF] darstellbar, wo F wieder eine einfache Grösse ist. Dann wird, da wir oben $C = DE$ setzten, $E = BF$ gesetzt werden können, und man erhält:

$$[ACB] = [AE][DB] = [ABF][DB].$$

Ferner:

$$[ABC] = [AB \cdot DBF] = [ABF][DB] \quad \text{(nach 108)},$$

weil nämlich D dem A untergeordnet ist, also [DB] dem [AB], und weil $[ABF] = [AE]$, wie oben gezeigt, von nullter Stufe ist. Also erhält man $[ACB] = [ABC]$.

5. Hiermit sind, da $\beta = < \gamma$ angenommen war, alle Fälle erschöpft, sofern A eine einfache Grösse ist. Ist nun A eine zusammengesetzte Grösse, so ist sie immer (nach 77) aus einfachen Grössen numerisch ableitbar. Es sei $A = \sum \alpha_r A_r$, wo alle A_r einfache Grössen sind, so ist

$$[ABC] = \sum \alpha_r [A_r BC] \qquad [44]$$
$$= \sum \alpha_r [A_r CB] \qquad \text{[nach Beweis 1—4]}$$
$$= [ACB] \qquad [44].$$

124. Wenn q, r, s die Stufenzahlen dreier einfacher Grössen A, B, C sind und n die des Hauptgebietes, so sind die Produkte [ABC] und [ACB] nur in folgenden Fällen kongruent

$$[ABC] \equiv [ACB],$$

a) wenn $\alpha + \beta + \gamma = < n$ ist, dann ist

$$[ABC] = (-1)^{rs}[ACB],$$

b) wenn $\alpha + \beta + \gamma = > 2n$ ist, dann ist

$$[ABC] = (-1)^{(n-r)(n-s)}[ACB],$$

c) wenn [AB] und [AC] null sind, dann ist

$$[ABC] = [ACB] = 0,$$

d) wenn [ABC] ein gemischtes Produkt ist und A, B und C entweder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst werden; dann ist

$$[ABC] = [ACB] = 0,$$

e) wenn $q + r + s = n + t$ ist und B und C entweder ein Gebiet von t-ter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete t-ter Stufe umfasst werden; dann ist

$$[ABC] = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ACB],$$

f) wenn B und C einander incident sind; dann ist

$$[ABC] = [ACB].$$

Beweis. Formel a) ist in 58 bewiesen. Ist $q + r + s \gtrless 2n$, so ist $(n - q) + (n - r) + (n - s) \lessgtr n$, also da $n - q$, $n - r$, $n - s$ die Stufenzahlen der Ergänzungen von A, B, C sind, so ist in diesem Falle

$$[|A|B|C] = (-1)^{(n-r)(n-s)}[|A|C|B] \quad \text{(Formel a).}$$

Also (nach 101)

$$[ABC] = (-1)^{(n-r)(n-s)}[ACB].$$

Somit ist Formel b bewiesen. Da in diesen beiden Fällen $q + r + s$ entweder $\lessgtr n$ oder $\gtrless 2n$ war, so bleibt nur der Fall übrig, wo $q + r + s > n$ und $< 2n$ ist, also der Fall des gemischten Produktes. Angenommen zuerst, [ABC] sei null. Ein gemischtes Produkt [ABC] ist (nach 122) dann und nur dann null, wenn entweder $[AB] = 0$ ist, oder alle drei Grössen A, B, C von einem Gebiete niederer als n-ter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben. Tritt einer der beiden letzten Fälle ein, so ist sowohl [ABC] als [ACB] null, und also $[ABC] = [ACB] = 0$, somit Formel (d) bewiesen. Tritt aber von diesen beiden Fällen keiner ein, so kann [ABC] nicht anders null werden, als wenn [AB] null ist; ist dies der Fall und soll dann [ABC] kongruent [ACB] sein, so muss auch [ACB] null sein, dies kann aber, da die beiden genannten Fälle ausgeschlossen sind, nicht anders geschehen als wenn auch [AC] null ist, und es tritt also dann der Fall (c) ein. Es bleiben also nur noch

die Fälle des von null verschiedenen gemischten Produktes übrig. Da $q + r + s < 2n$ und $> n$ ist, so können wir $q + r + s = n + t$ setzen, wo $t > 0$ und $< n$ ist. Nun seien hier (genau wie in 123) drei Fälle unterschieden. Erstens der, wo die Summen $q + s$ und $q + r$ beide kleiner als n sind. Dann ist, da [AB] und [AC] dann von null verschiedene progressive Produkte sind, $q + r$ die Stufe von [AB] und $q + s$ die von [AC]. Dann haben [AB] und C (nach 26) einen Faktor von $q + r + s - n$-ter, d. h. t-ter Stufe gemein. Dieser sei D, und sei $C = [DE]$, so ist die Summe der Stufenzahlen von A, B, E gleich n; und D ist dem [AB] untergeordnet. Folglich ist dann (nach 108)

$$[ABC] = [AB \cdot DE] = [ABE]D.$$

Also da [ABE] eine Zahl ist, so ist $[ABC] = D$, somit muss, wenn $[ABC] = [ACB]$ sein soll, auch $[ACB] = D$ sein, d. h. [AC] und B müssen sich auf einen mit D kongruenten gemeinschaftlichen Faktor bringen lassen, also auch auf den Faktor D selbst; folglich muss D dem B untergeordnet sein, es war aber auch dem C untergeordnet, d. h. B und C lassen sich auf den gemeinschaftlichen Faktor t-ter Stufe D bringen, d. h. haben ein System t-ter Stufe gemein, was die erste Bedingung für Formel (e) ist. Es sei $B = [DF]$, so ist

$$\begin{aligned} [ABC] &= [AB \cdot DE] = [ABE]D && [108] \\ &= [A(DF)E]D = [ADFE]D && [119] \\ [ACB] &= [AC \cdot DF] = [ACF]D && [108] \\ &= [A(DE)F]D = [ADEF]D && [119]. \end{aligned}$$

Da nun $C = [DE]$ war, so ist E von $(s - t)$-ter Stufe, und da $B = [DF]$ war, so ist F von $(r - t)$-ter Stufe, somit

$$[ADFE]D = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ADEF]D \qquad [58],$$

also

$$[ABC] = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ACB],$$

was die Formel (e) ist.

Sind hingegen die beiden Summen $q + r$ und $q + s$ grösser als n, so sind die Summen $(n - q) + (n - r)$ und $(n - q) + (n - s)$ kleiner als n, und $(n - q) + (n - r) + (n - s) = n + (n - t)$. Folglich sind in diesem Falle (nach Fall e) die Produkte [|A|B|C] und [|A|C|B] nur dann einander kon-

gruent, wenn sich |B und |C auf einen gemeinschaftlichen Faktor von (n — t)-ter Stufe bringen lassen. Dieser sei |D und sei |B = [|D|F], |C = [|D|E], so ist (nach e)

$$[|A|B|C] = (-1)^{(t-r)(t-s)}[|A|C|B].$$

Aber (nach 98) ist dann

$$B = [DF],\ C = [DE]$$

$$[ABC] = (-1)^{(t-r)(t-s)}[ACB] = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ACB],$$

d. h. es tritt die zweite Bedingung der Formel (e) und diese selbst ein, indem nämlich das Produkt B = [DF], da B von geringer Stufe als D ist, als regressives erscheint, und ebenso [DE], und also B und C beide dem D untergeordnet sind, also von dem Gebiete D umfasst werden.

Es bleibt somit nur noch der Fall übrig, wo von den Summen q + r und q + s die eine, etwa die erstere, ebenso gross oder kleiner, die andere ebenso gross oder grösser als n ist. Dann lassen sich (nach 26) [AB] und C auf einen gemeinschaftlichen Faktor q + r + s — n-ter, d. h. t-ter Stufe bringen. Dieser sei D, und sei C = [DE] *), so wird

$$[ABC] = [AB \cdot DE] = [ABE]D \qquad [108].$$

Ferner sei q + s = n + v, so haben A und C einen Faktor von v-ter Stufe gemein, dieser sei F, und sei C = [FG], so ist

$$[AC] = [A \cdot FG] = [AG]F \qquad [108].$$

Also

$$[ACB] = [AG][FB].$$

Soll also [ABC] ≡ [ACB] sein, so muss, da [ABE] und [AG] von null verschiedene Zahlen sind, D ≡ [FB] sein, d. h. B ist dem D untergeordnet, aber auch D dem C, also B dem C untergeordnet, d. h. B und C sind einander incident. Dies ist die Bedingung der Formel (f) und (nach 123) ist dann

$$[ABC] = [ACB].$$

Somit der Satz vollständig bewiesen.

125. In denselben und in keinen andern Fällen (wie in 124) ist

$$[BAC] \equiv [B \cdot AC].$$

*) Sollte q + r = n sein, so würde E von nullter Stufe sein, was in dem obigen Beweise mit eingeschlossen ist, dasselbe gilt im Folgenden von F.

Beweis. Es ist in den in 124 angenommenen Fällen

$$[BAC] \equiv [ABC] \quad [58]$$
$$\equiv [ACB] \quad [123]$$
$$\equiv [B \cdot AC] \quad [58].$$

und umgekehrt folgt aus der letzten Kongruenz wieder die erste.

Anm. Es ergiebt sich ins Besondere für Fall (c) und (d)

$$[ABC] = [B \cdot AC] = 0,$$

für Fall (a) und (b)

$$[BAC] = [B \cdot AC].$$

Dagegen spaltet sich der Fall (e) in zwei Fälle; nämlich wenn die Summen $q + r$ und $q + s$ kleiner als n sind, so ist

$$[BAC] = (-1)^{qt}[B \cdot AC],$$

und wenn jene Summen grösser als n sind,

$$[BAC] = (-1)^{(n-q)(n-t)}[B \cdot AC].$$

Der Fall (f) spaltet sich in zwei Fälle, nämlich wenn $q + r$ kleiner, und $q + s$ grösser als n ist, so wird

$$[BAC] = (-1)^{r(n-s)}[B \cdot AC],$$

wenn umgekehrt $q + r$ grösser und $q + s$ kleiner als n ist,

$$[BAC] = (-1)^{(n-r)s}[B \cdot AC].$$

Wenn eine der Summen gleich n ist, so gilt sowohl diejenige Formel, bei welcher die Summe grösser, als diejenige, wo sie kleiner als n vorausgesetzt war, indem dann beide Formeln identisch werden. Auch ist zu bemerken, dass wenn in f, d. h. in dem Falle der Incidenz von B und C, die Bedingung eintritt, dass beide Summen grösser als n oder beide kleiner als n sind, sowohl [BA], als [B·AC] null werden, und also zugleich der Fall c oder d statt hat.

126. Ein Produkt nullter Stufe bleibt sich selbst kongruent, wenn man die Ordnung aller seiner Faktoren umkehrt, oder die letzten Faktoren in beliebiger Anzahl mit umgekehrter Ordnung in Klammern schliesst, d. h.

$$[A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n] \equiv [A_nA_{n-1} \cdots A_2A_1]$$
$$\equiv [A_1 \cdot A_nA_{n-1} \cdots A_2].$$

Beweis. Es sei zuerst

$$[A_1A_2 \cdots A_{n-2}] = P,$$

so ist

$$[A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n] = [PA_{n-1}A_n].$$

Da das Produkt von nullter Stufe sein soll, so muss die Summe der Stufenzahlen von P, A_{n-1}, A_n (nach 96) durch n theilbar, also, da die einzelnen Stufenzahlen > 0 und $< n$ sind, entweder gleich n oder gleich 2n sein; im ersteren Falle ist das Produkt der drei Grössen P, A_{n-1}, A_n ein rein pro-

gressives, im letzteren ein rein regressives, in beiden alfo ein reines, fomit (nach 125)

$$[PA_{n-1}A_n] \equiv [P \cdot A_nA_{n-1}],$$

oder

$$[A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n] \equiv [A_1 \cdots A_{n-2} \cdot A_nA_{n-1}].$$

Betrachten wir diefen Ausdruck als ein Produkt der drei Grössen $[A_1 \cdots A_{n-3}]$, A_{n-2} und $[A_nA_{n-1}]$, fo erhalten wir auf gleiche Weife den zuletzt gewonnenen Ausdruck

$$\equiv [A_1 \cdots A_{n-3} \cdot A_nA_{n-1}A_{n-2}].$$

Wendet man dies Verfahren r-mal an, fo erhält man

$$[A_1 \cdots A_n] \equiv [A_1 \cdots A_{n-r-1} \cdot A_nA_{n-1} \cdots A_{n-r}],$$

d. h. das Produkt bleibt fich felbst kongruent, wenn man die letzten Faktoren in beliebiger Anzahl (r) mit umgekehrter Ordnung in Klammern schliesst. Hiernach wird nun auch

$$[A_1A_2 \cdots A_n] \equiv [A_1 \cdot A_nA_{n-1} \cdots A_2],$$

fomit (nach 58)

$$\equiv [A_nA_{n-1} \cdots A_2A_1],$$

alfo auch der erste Theil des Satzes bewiefen.

§. 7. Zurückleitung und Ersetzung.

127. **Erklärung.** Wenn n die Stufenzahl des Hauptgebietes, $A_1 \cdots A_\nu$ die multiplikativen Kombinationen aus den n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster oder (n — 1)-ter Stufe, $a_1 \cdots a_n$ zu irgend einer Klasse und $A_1 \cdots A_u$ die multiplikativen Kombinationen aus m derfelben, etwa aus $a_1, \cdots a_m$ zur gleichen Klasse find, und

$$C = \alpha_1A_1 + \cdots \alpha_\nu A_\nu,$$

$$C_1 = \alpha_1A_1 + \cdots \alpha_u A_u$$

ist, fo nenne ich C_1 die Zurückleitung von C auf das Gebiet $[a_1 \cdots a_m]$, unter Ausschluss des Gebietes $[a_{m+1} \cdots a_n]$, und zwar nenne ich die Zurückleitung eine progressive, wenn $a_1 \cdots a_n$ Grössen erster Stufe, eine regressive, wenn $a_1 \cdots a_n$ Grössen (n — 1)-ter Stufe find. Die Zurückleitungen mehrerer Grössen heissen in demfelben Sinne genommen, wenn fie auf dasfelbe Gebiet und unter Ausschluss desfelben Gebietes zurückgeleitet find (vergl. 33).

Anm. Ist z. B. das Hauptgebiet von vierter Stufe (wie z. B. der Raum), und find a, b, c, d vier in keiner Zahlbeziehung zu einander

stehende Grössen erster Stufe (z. B. vier nicht in ein und derselben Ebene liegende Punkte), so ist $C_1 = [bc] + [ca] + [ab]$ (im Raume eine Linie) die (progressive) Zurückleitung von $C = [bc] + [ca] + [ab] + [ad] + [bd] + [cd]$ auf das Gebiet [abc] (also auf die Ebene abc), unter Ausschluss des Gebietes d. Bezeichnen wir ferner [bcd] mit a', [cad] mit b', [abd] mit c' und [acb] mit d', so sind a', b', c', d' Grössen $(n-1)$-ter Stufe, da $n=4$ ist und setzen wir noch $[abcd] = 1$, so ist $[b'c'] = [ad]$, $[c'a'] = [bd]$, $[a'b'] = [cd]$, $[a'd'] = [bc]$, $[b'd'] = [ca]$, $[c'd'] = ab$, und es wird

$$C = [a'd'] + [b'd'] + [c'd'] + [b'c'] + [c'a'] + [a'b'].$$

Dann wird, wenn

$$C' = [b'c'] + [c'a'] + [a'b']$$

ist, C' die (regressive) Zurückleitung von C auf das Gebiet [a'b'c'], unter Ausschluss des Gebietes d', sein, d. h., da $[a'b'c'] = [cd \cdot abd] \equiv d$, und $d' \equiv [abc]$ ist, C' ist die Zurückleitung von C auf das Gebiet d, unter Ausschluss des Gebietes [abc]. So erscheint also in der Geometrie die Zurückleitung einer Linie auf eine Ebene als progressive Zurückleitung, und die einer Linie auf einen Punkt als regressive Zurückleitung. Die Zurückleitung selbst ist in der Geometrie gleichbedeutend mit der Projektion im weitesten und prägnantesten Sinne des Wortes (s. u.).

Wir haben oben (33) die in der Definition bestimmte Grösse C_1 die Zurückleitung der Grösse C auf das Gebiet der Grössen $A_1, A_2, \cdots A_u$ genannt. Dieser Benennungsweise haben wir hier die für die Anwendung bequemere zur Seite gesetzt.

128. **Je nachdem die Stufenzahl des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, grösser oder kleiner als die Stufenzahl der zurückgeleiteten Grösse ist, erscheint die Zurückleitung als progressive oder regressive. Wenn die Stufenzahl jenes Gebietes gleich der Stufenzahl der zurückgeleiteten Grösse ist, so kann die Zurückleitung sowohl eine progressive als eine regressive sein.**

Beweis. Es seien $a_1 \cdots a_n$ Grössen erster Stufe, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und seien $A_1, \cdots A_\nu$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_n$ zur p-ten Klasse, und $A_1 \cdots A_u$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ zur p-ten Klasse und

$$C = \alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_\nu A_\nu$$

$$C_1 = \alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_u A_u,$$

also (nach 127) C_1 die progressive Zurückleitung der Grösse C auf das Gebiet $[a_1 \cdots a_m]$, unter Ausschluss des Gebietes

$[a_{m+1} \cdots a_n]$, so würde es, wenn $m < p$ wäre, gar keine Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ zur p-ten Klasse geben, also auch keine progressive Zurückleitung. Es muss also für die progressive Zurückleitung $m >= p$ sein, da aber m die Stufenzahl des Gebietes $[a_1 \cdots a_m]$ und p die der multiplikativen Kombinationen $A_1, \cdots A_n$, also auch die von C ist, so muss die Stufenzahl des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, ebenso gross oder grösser sein als die der zurückgeleiteten Grösse. Macht man im Uebrigen dieselben Annahmen wie vorher, mit dem einzigen Unterschiede, dass $a_1, \cdots a_n$ Grössen $(n-1)$-ter Stufe sind (in dem Hauptgebiete n-ter Stufe), so ist die Zurückleitung eine regressive; und auch hier muss, aus gleichem Grunde wie vorher, $m >= p$ sein. Aber dann ist (nach 90) die Stufenzahl von $[a_1 \cdots a_m]$ gleich $n - m$ und die von C gleich $n - p$, somit, da $n - m <= n - p$ ist, so ist die Stufenzahl des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, ebenso gross oder kleiner als die der zurückgeleiteten Grösse. Ist also die Stufenzahl jenes Gebietes grösser oder kleiner als die Stufenzahl der zurückgeleiteten Grösse, so wird die Zurückleitung im ersteren Falle eine progressive, im letzteren eine regressive sein. Sind hingegen die genannten Stufenzahlen einander gleich, so wird die Zurückleitung sowohl eine progressive als auch eine regressive sein können.

129. Die Zurückleitung A' einer Grösse A auf ein Gebiet B, unter Ausschluss des Gebietes C, ist

$$A' = \frac{[B \cdot AC]}{[BC]}, \text{ also } A' = [B \cdot AC], \text{ wenn } [BC] = 1 \text{ ist.}$$

Beweis. Es seien $a_1 \cdots a_n$ n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe, und $A_1 \cdots A_\nu$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_n$, und $A_1 \cdots A_u$ die aus $a_1 \cdots a_m$ und $A = \alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_\nu A_\nu$, also $A' = \alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_u A_u$, und sei $[a_1 \cdots a_m] = B$, $[a_{m+1} \cdots a_n] = C$, so ist

$$[AC] = [(\alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_u A_u + \alpha_{u+1} A_{u+1} + \cdots \alpha_\nu A_\nu)C];$$

aber da $A_1, \cdots, A_u$ die Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ sind und $A_{u+1} \cdots A_\nu$ diejenigen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_n$, welche nicht zugleich Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ sind, so muss

jede der Grössen $A_{u+1}, \cdots A_v$ mindestens einen der Faktoren $a_{m+1} \cdots a_n$ enthalten, alfo mindestens einen Faktor mit $C = [a_{m+1} \cdots a_n]$ gemein haben. Die Produkte $[A_{u+1}C], \cdots [A_vC]$ find aber in Bezug auf die Faktoren $a_1 \cdots a_n$ reine (nach 114), fomit, da fie gleiche Faktoren enthalten, null, alfo wird

$$[AC] = [(\alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_u A_u)C] = \alpha_1[A_1C] + \cdots \alpha_u[A_uC].$$

Folglich ist

$$[B \cdot AC] = \alpha_1[B \cdot A_1C] + \cdots \alpha_u[B \cdot A_uC].$$

Da nun jede der Grössen $A_1, \cdots A_u$ aus Faktoren befteht, die in B enthalten find, fo ist jede derfelben mit B incident, fomit, da auch die Stufenzahlen von B und C zufammen n betragen, fo ist (nach 108)

$$[B \cdot A_1C] = [BC]A_1, \cdots, [B \cdot A_uC] = [BC]A_u,$$

alfo

$$[B \cdot AC] = [BC](\alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_u A_u) = [BC]A'.$$

Alfo, da [BC] eine Zahl ist

$$A' = \frac{[B \cdot AC]}{[BC]}.$$

130. Jede Gleichung, deren Glieder Vielfache je einer Grösse m-ter Stufe find, bleibt bestehen, wenn man statt aller diefer Grössen ihre in demfelben Sinne genommenen Zurückleitungen fetzt; oder wenn

$$P = \alpha A + \beta B + \cdots$$

ist und P', A', B', $\cdots$ die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von P, A, B, $\cdots$ und α, β, $\cdots$ Zahlen find, fo ist auch

$$P' = \alpha A' + \beta B' + \cdots.$$

Beweis. Es fei Q das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, und R das ausgeschlossene Gebiet und $[QR] = 1$, fo erhält man aus der Gleichung

$$P = \alpha A + \beta B + \cdots,$$

durch Multiplikation

$$[PR] = \alpha[AR] + \beta[BR] + \cdots$$

und

$$[Q \cdot PR] = \alpha[Q \cdot AR] + \beta[Q \cdot BR] + \cdots,$$

d. h. (nach 129)

$$P' = \alpha A' + \beta B' + \cdots.$$

131. Die progressive Zurückleitung eines rein progressiven und die regressive eines rein regressiven Produktes ist gleich dem Produkte der in demfelben Sinne genommenen Zurückleitungen der Faktoren jenes Produktes, d. h. wenn das reine Produkt P

$$P = [AB\cdots E]$$

ist, und P', A', B', ··E' die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von P, A, B, ··E find (und zwar progressive oder regressive, je nachdem das Produkt progressiv oder regressiv ist), fo ist auch

$$P' = [A'B'\cdots E'].$$

Beweis. Es fei $A = [a_1\cdots a_q]$, $B = [a_{q+1}\cdots a_r]$, $\cdots$ $E = [a_{t+1}\cdots a_v]$, wo $a_1\cdots a_v$ Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe find, je nachdem das Produkt $[AB\cdots E]$ ein progressives oder regressives war. Dann ist

$$P = [a_1\cdots a_v]$$

ein reines Produkt von Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe. Ferner fei $Q = [u_1\cdots u_m]$ das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, $R = [u_{m+1}\cdots u_n]$ das ausgeschlossene Gebiet und $[QR] = 1$, wobei $u_1\cdots u_n$ Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe find, je nachdem $a_1\cdots a_v$ es find. Nun ist (nach 129)

$$P' = [Q\cdot PR]$$
$$= [u_1\cdots u_m(a_1\cdots a_v\cdot u_{m+1}\cdots u_n)].$$

Wenn nun das urſprüngliche Produkt $[AB\cdots E]$ ein progressives ist, fo foll auch die Zurückleitung eine progressive, d. h. (nach 127) die Stufenzahl von Q eben fo gross oder grösser als die von P fein, d. h. $m \geqq v$, folglich $v + n - m < n$, d. h. das Produkt $[a_1\cdots a_v\cdot u_{m+1}\cdots u_n]$ ein rein progressives, alfo auch $= [a_1\cdots a_v u_{m+1}\cdots u_n]$, und da alle Faktoren von erster Stufe find, ein kombinatorisches (nach 94, 78). Nun fei

$$a_r = \alpha_1^{(r)}u_1 + \cdots \alpha_n^{(r)}u_n,$$

fo können wir (nach 67) in dem Produkte $[a_1\cdots a_v u_{m+1}\cdots u_n]$ statt $a_r = \alpha_1^{(r)}u_1\cdots\alpha_n^{(r)}u_n$ fetzen: $\alpha_1^{(r)}u_1 + \cdots \alpha_m^{(r)}u_m$, weil $u_{m+1}\cdots u_n$ als Faktoren in jenem Produkte vorkommen; aber $\alpha_1^{(r)}u_1 + \cdots\cdots\alpha_m^{(r)}u_m$ ist die Zurückleitung von a_r auf das Gebiet

$Q = [u_1 \cdot \cdot u_m]$, mit Ausschluss des Gebietes $R = [u_{m+1} \cdots u_n]$. Somit wird, wenn wir diese Zurückleitung mit a'_r bezeichnen

$$P' = [u_1 \cdots u_m \cdot a'_1 \cdots a'_\nu u_{m+1} \cdot \cdot u_n].$$

Hier ist $a'_1 \cdots a'_\nu$ dem $u_1 \cdots u_m$ untergeordnet, also (nach 108)

$$P' = [u_1 \cdots u_n] \cdot [a'_1 \cdots a'_\nu] = [a'_1 \cdots a'_\nu].$$

Aus gleichem Grunde ist

$$A' = [a'_1 \cdots a'_q],\ B' = [a'_{q+1} \cdots a'_r], \cdots$$
$$E' = [a'_{t+1} \cdots a'_\nu].$$

Somit

$$P' = [A'B' \cdots E'].$$

2. Wenn das ursprüngliche Produkt $[AB \cdots E]$ ein regressives ist, und also auch die Zurückleitung von P auf Q, unter Ausschluss von R, eine regressive, d. h. die Stufenzahl von P kleiner oder ebensogross als die von Q ist, so kehrt sich das regressive Produkt und ebenso die regressive Projektion (nach 115 und 90 Zusatz) in das progressive Produkt und in die progressive Projektion um. Sind daher P_1, Q_1, R_1, A_1, $B_1, \cdots E_1$ die Ergänzungen von P, Q, R, A, B, $\cdots$ E, und P'_1, A'_1, $B'_1 \cdots E'_1$ die Zurückleitungen von P_1, A_1, $B_1, \cdots E_1$ auf Q_1, unter Ausschluss von R_1, so ist (nach 101)

$$P_1 = [A_1 B_1 \cdots E_1],$$

und nach Beweis 1

$$(*)\ P'_1 = [A'_1 B'_1 \cdots E'_1].$$

Ferner ist (nach 129)

$$P' = [Q \cdot PR],\ P'_1 = [Q_1 \cdot P_1 R_1] = |[Q \cdot PR] \text{ (nach 98)},$$

also $P'_1 = |P$ und ebenso $A'_1 = |A'$, $B'_1 = |B', \cdots$, also (nach *)

$$|P' = [|A'|B' \cdots |E']$$
$$P' = [A'B' \cdots E'] \qquad \text{(nach 101)}.$$

3. Sind nun endlich A, B, $\cdots$ E zusammengesetzte Grössen,

$$A = \sum \overline{\alpha_r A_r},\ B = \sum \overline{\beta_s B_s}, \cdot \cdot\ E = \sum \overline{\varepsilon_\nu E_\nu},$$

wo A_r, $B_s, \cdots E_\nu$ einfache Grössen sind und sind A'_r, $B'_s, \cdots$ E'_ν die Zurückleitungen von A_r, $B_s, \cdots E_\nu$, so ist

$$P = [\sum \overline{\alpha_r A_r} \cdot \sum \overline{\beta_s B_s} \cdots \sum \overline{\varepsilon_\nu E_\nu}] = \sum \overline{\alpha_r \beta_s \cdots \varepsilon_\nu [A_r B_s \cdots E_\nu]}$$
$$= \sum \overline{\alpha_r \beta_s \cdots \varepsilon_\nu} P_{r,s,\cdots\nu}, \text{ wenn } P_{r,s,\cdots\nu} = [A_r B_s \cdots E_\nu] \text{ ist.}$$

Also (nach 130)

$$P' = \sum \overline{\alpha_r \beta_s \cdots \varepsilon_\nu} P'_{r,s,\cdots\nu} = \sum \overline{\alpha_r \beta_s \cdots \varepsilon_\nu [A'_r B'_s \cdots E'_\nu]}$$

nach Beweis 1 und 2; und dies

$= [\sum \alpha_r A'_r \sum \beta_s B'_s \cdots \sum \varepsilon_v E'_v]$ [nach 45]

$= [A'B' \cdots E']$ [130].

132. Das reine Produkt von Grössen erster Stufe oder von Grössen (n — 1)-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe ist ein kombinatorisches Produkt diefer Grössen.

Beweis. Das reine Produkt von Einheiten erster Stufe ist (nach 114, 94) ein progressives, alfo (nach 94) ein äusseres, alfo (nach 78) ein kombinatorisches Produkt der Einheiten, alfo auch (nach 52) das reine Produkt von beliebigen Grössen erster Stufe ein kombinatorisches Produkt diefer Grössen. Das reine Produkt von Grössen (n — 1)-ter Stufe ist aber (nach 101) genau denfelben Gefetzen unterworfen wie das von Grössen erster Stufe, alfo auch den Gefetzen der kombinatorischen Multiplikation, d. h. jenes Produkt ist ein kombinatorisches Produkt jener Grössen (n — 1)-ter Stufe.

133. Eine Gleichung, deren Glieder Grössen m-ter Stufe find, wird, wenn n die Stufe des Hauptgebietes ist, durch fo viel Zahlgleichungen erfetzt, als es Kombinationen ohne Wiederholung aus n Elementen zur m-ten Klasse giebt, und zwar erhält man einen erfetzenden Verein von Gleichungen, indem man die gegebene Gleichung nach und nach mit den multiplikativen Kombinationen zur (n — m)-ten Klasse aus einer beliebigen Schaar von n Grössen erster Stufe, deren Produkt 1 ist, multiplicirt.

Beweis. Es fei

(a) $P = A + B + \cdots$

die gegebene Gleichung, in welcher P, A, B, $\cdots$ Grössen m-ter Stufe find, es feien ferner $e_1, \cdots e_n$ Grössen erster Stufe, deren Produkt $[e_1 \cdots e_n] = 1$ ist, und feien $E_1, E_2, \cdots E_v$ die multiplikativen Kombinationen zur m-ten Klasse aus $e_1, \cdots e_n$, und $F_1, F_2, \cdots F_v$ die ergänzenden Kombinationen, d. h. die Kombinationen aus denfelben Elementen zur (n — m)-ten Klasse und zwar fo geordnet, dass $[E_1F_1] = [E_2F_2] = \cdots = [E_vF_v] = 1$ fei, fo ist zu zeigen, dass die obige Gleichung erfetzt wird durch den Verein von Gleichungen, der aus

(b) $[PF_r] = [AF_r] + [BF_r] + \cdots$

dadurch hervorgeht, dass man statt r nach und nach setzt 1, 2, ··· v. Es sind (nach 77a) P, A, B, ··· numerisch ableitbar aus $E_1 \cdots E_v$. Nun sei

$$P = \pi_1 E_1 + \cdots \pi_v E_v, \quad A = \alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_v E_v,$$
$$B = \beta_1 E_1 + \cdots \beta_v E_v, \cdots$$

so ist

$$[PF_r] = [\sum \pi_s E_s F_r] = \sum \pi_s [E_s F_r].$$

Aber da E_s und F_r, wenn $s \gtrless r$ ist, nothwendig gleiche Elemente $(e_1, \cdots e_n)$ als Faktoren enthalten, so ist für diesen Fall $[E_s F_r] = 0$, also

$$[PF_r] = \pi_r [E_r F_r] = \pi_r.$$

Aus gleichem Grunde ist

$$[AF_r] = \alpha_r, \quad [BF_r] = \beta_r, \cdots.$$

Gilt nun die Gleichung (a), so gilt auch die aus ihr durch Multiplikation hervorgegangene Gleichungsgruppe (b). Gilt umgekehrt die letztere, so hat man für jedes r von $1 \cdots v$, indem man für $[PF_r]$, $[AF_r]$, $[BF_r]$, ··· die gefundenen Werthe setzt,

$\pi_r = \alpha_r + \beta_r + \cdots$, also auch $\pi_r E_r = \alpha_r E_r + \beta_r E_r + \cdots$ für jedes r von 1 bis v. Addirt man diese sämmtlichen Gleichungen, so erhält man

$$\sum \pi_r E_r = \sum \alpha_r E_r + \sum \beta_r E_r + \cdots,$$

d. h.

$$P = A + B + \cdots.$$

Somit ersetzen sich die Gleichung (a) und der Gleichungsverein (b) gegenseitig.

Zusatz. Ist ins Besondere

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots,$$

so ist

$$[AF_r] = \alpha_r,$$

d. h. $[AF_1] = \alpha_1, \quad [AF_2] = \alpha_2, \cdots.$

§. 8. Elimination der Unbekannten aus algebraischen Gleichungen durch kombinatorische Multiplikation.

134. Aufgabe. Aus n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten diese zu finden.

Auflöfung 1. Die n Gleichungen feien

$$(a)\quad \begin{cases} \alpha_1^{(1)}x_1 + \alpha_2^{(1)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(1)}x_n = \beta^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)}x_1 + \alpha_2^{(2)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(2)}x_n = \beta^{(2)} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \alpha_1^{(n)}x_1 + \alpha_2^{(n)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(n)}x_n = \beta^{(n)}. \end{cases}$$

Man multiplicire diefe Gleichungen beziehlich mit n extenfiven Grössen $e^{(1)}$, $e^{(2)}, \cdots e^{(n)}$, deren kombinatorisches Produkt Eins ist, und addire fie, fo erhält man, indem man

$$(b)\quad \begin{cases} \alpha_1^{(1)}e^{(1)} + \alpha_1^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_1^{(n)}e^{(n)} = a_1 \\ \alpha_2^{(1)}e^{(1)} + \alpha_2^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_2^{(n)}e^{(n)} = a_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \alpha_n^{(1)}e^{(1)} + \alpha_n^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_n^{(n)}e^{(n)} = a_n \\ \beta^{(1)}e^{(1)} + \beta^{(2)}e^{(2)} + \cdots \beta^{(n)}e^{(n)} = b \end{cases}$$

fetzt, die Gleichung

$$(c)\quad x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b,$$

eine Gleichung, welche die gegebenen Gleichungen (a) erfetzt. Um aus ihr x_1 zu finden, fügt man beiden Seiten der Gleichung die Faktoren $a_2, a_3, \cdots a_n$ hinzu, fo erhält man, da $[a_2a_2a_3\cdots a_n]$, $[a_3a_2a_3\cdots a_n]\cdots[a_na_2a_3\cdots a_n]$ (nach 76) null find,

$$(d)\quad x_1[a_1a_2\cdots a_n] = [ba_2a_3\cdots a_n].$$

Und ebenfo

$$x_2[a_1a_2\cdots a_n] = [a_1ba_3\cdots a_n] \text{ u. f. w.}$$

Angenommen nun zuerst, das Produkt $[a_1a_2\cdots a_n]$ fei ungleich null, fo erhält man

$$(e)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{[ba_2a_3\cdots a_n]}{[a_1a_2a_3\cdots a_n]}, \\ \text{und ebenfo} \\ x_2 = \dfrac{[a_1ba_3\cdots a_n]}{[a_1a_2a_3\cdots a_n]}, \cdots x_n = \dfrac{[a_1a_2\cdots a_{n-1}b]}{[a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n]}. \end{cases}$$

Es ist für diefen Fall noch zu zeigen, dass diefe Werthe der Unbekannten in der That der Gleichung (c) genügen. Da das Produkt $(a_1a_2\cdots a_n]$ nach der für diefen Fall gemachten Annahme ungleich null ist, fo stehen $a_1, \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander. Da nun $a_1, \cdots a_n$ aus $e_1, \cdots e_n$ numerisch abgeleitet find und in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo muss (nach 21) jede aus $e_1 \cdots e_n$ numerisch ab-

leitbare Grösse, alſo namentlich b, auch aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableitbar ſein; es ſei $b = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots y_n a_n$. Substituirt man dieſen Werth in (e), ſo wird $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \cdots$ $x_n = y_n$, alſo $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots$ $y_n a_n$, d. h. $= b$. Alſo wird der Gleichung (c) durch die Werthe (e) genügt, ſomit auch den urſprünglichen Gleichungen.

Angenommen zweitens, das kombinatoriſche Produkt $[a_1 a_2 \cdots a_n]$ ſei gleich null, ſo ſtehen $a_1 \cdots a_n$ in einer Zahlbeziehung zu einander, dann muss es unter ihnen (nach 17) ſolche geben, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, und aus denen die übrigen numerisch ableitbar ſind; es ſeien dies $a_1, \cdots a_r$ und ſeien $a_{r+1}, \cdots a_n$ aus ihnen numerisch ableitbar. Dann muss alſo vermöge der Gleichung c auch b aus dieſen Grössen $a_1 \cdots a_r$ numerisch ableitbar ſein. Tritt alſo der Fall ein, dass, vermöge der Natur der gegebenen Gleichungen, b nicht aus $a_1 \cdots a_r$ numerisch ableitbar ist, während es doch $a_{r+1}, \cdots a_n$ ſind, ſo enthalten jene Gleichungen einen Widerſpruch. Wird hingegen dieſe Bedingung erfüllt, ſo ſei die Gleichung (c) in der Form geſchrieben:

$$(f)\quad \begin{cases} x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots x_r a_r = c, \text{ wo} \\ \qquad c = b - x_{r+1} a_{r+1} - x_{r+2} a_{r+2} - \cdots x_n a_n \\ \text{ist, und man erhält} \\ x_1 = \dfrac{[c a_2 a_3 \cdots a_r]}{[a_1 a_2 a_3 \cdots a_r]},\ x_2 = \dfrac{[a_1 c a_3 \cdots a_r]}{[a_1 a_2 a_3 \cdots a_r]} \text{ u. f. w.} \\ \qquad x_r = \dfrac{[a_1 a_2 \cdots a_{r-1} c]}{[a_1 a_2 \cdots a_r]}, \end{cases}$$

während x_{r+1} bis x_n ganz willkürlich ſind.

Anm. Setzt man für die Grössen $a_1 \cdots a_n$ und b in der Gleichung (e) ihre Werthe aus (b) ein, ſo erhält man, vermöge 79, die bekannten Ausdrücke

$$x_1 = \frac{\sum \mp \alpha_1^{(1)} \beta_2^{(2)} \alpha_3^{(3)} \cdots \alpha_n^{(n)}}{\sum \mp \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \alpha_3^{(3)} \cdots \alpha_n^{(n)}} \text{ u. f. w.}$$

Ich füge hier noch eine zweite Auflöſungsmethode bei, welche zwar auf den erſten Anblick nicht ſo einfach erſcheint, aber dennoch ihre grossen Vorzüge hat, und deren eigentliches Weſen ſpäterhin in ein noch helleres Licht treten wird:

Auflöſung 2. Man bringe die ſämmtlichen Gleichungen auf die Form, dass ihre rechte Seite null ist. Die Gleichungen ſeien

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \alpha_0^{(1)} + \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(1)} + \cdots + \alpha_n x_n^{(1)} = 0 \\ \alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(2)} x_1^{c} + \alpha_2^{(2)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(2)} x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)} x_1 + \alpha_2^{(n)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(n)} x_n = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen find alfo diefelben wie in der vorigen Auflöfung, nur dass $\alpha_0^{(r)} = -\beta_0^{(r)}$ ist. Der Symmetrie wegen fügen wir noch dem ersten Gliede jeder Gleichung die Unbekannte x_0 als Faktor bei, die wir dann schliesslich gleich 1 fetzen. Nun nehme man ein System von $(n+1)$ Einheiten $e_0, e_1, \cdots e_n$ an, deren Produkt Eins ist. Dann ist (nach 91)

$$(\beta)\quad \begin{cases} [e_0|e_0] = [e_1|e_1] = [e_2|e_2] = \cdots = [e_n|e_n] \\ \qquad = [e_0 e_1 e_2 \cdots e_n] = 1. \\ \text{Ferner ist, da } |e_s \text{ (nach 98) alle übrigen Einheiten ausser } e_s \text{ als Faktoren enthält,} \\ [e_r|e_s] = 0, \text{ wenn } r \gtrless s \text{ ist} \qquad \text{[nach 60].} \end{cases}$$

Wenn nun

$$(\gamma)\quad \begin{cases} x_0|e_0 + x_1|e_1 + \cdots x_n|e_n = X \\ \alpha_0^{(1)} e_0 + \alpha_1^{(2)} e_1 + \cdots \alpha_n^{(1)} e_n = a^{(1)} \\ \alpha_0^{(2)} e_0 + \alpha_1^{(2)} e_1 + \cdots \alpha_n^{(2)} e_n = a^{(2)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_0^{(n)} e_0 + \alpha_1^{(n)} e_1 + \cdots \alpha_n^{(n)} e_n = a^{(n)} \end{cases}$$

gefetzt wird, fo ergiebt fich leicht, dass die gegebenen Gleichungen (α) identisch find mit den Gleichungen

$$(\delta)\quad \begin{cases} [a^{(1)}X] = 0 \\ [a^{(2)}X] = 0 \\ \vdots \\ [a^{(n)}X] = 0. \end{cases}$$

In der That, fetzt man z. B. in der ersten diefer Gleichungen statt $a^{(1)}$ und X ihre Werthe aus (γ), fo wird diefelbe vermöge des Gleichungssystems (β) identisch mit der ersten der Gleichungen in (α) und fo bei den übrigen. Angenommen nun zuerst, $a^{(1)} \cdots a^{(n)}$ stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander. Da X eine Grösse n-ter Stufe ist und fie mit jeder der n Grössen erster Stufe $a^{(1)}, a^{(2)} \cdots a^{(n)}$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, zu einem kombinatorischen Produkte verbunden, null giebt, fo muss X (nach 84) mit dem kombinatorischen Produkte jener Grössen in

einer Zahlbeziehung stehen, alſo iſt, wenn λ eine noch unbestimmte Zahl ist,

$$(\varepsilon) \quad X = \lambda A, \text{ wo } A = [a^{(1)}a^{(2)} \cdots a^{(n)}]$$

ist; und da aus dieſer Gleichung wieder umgekehrt die Gleichungen (δ) folgen, ſo erſetzt ſie die Gleichungen (δ), alſo auch die urſprünglichen (α). Fügt man nun zu der gewonnenen Gleichung den Faktor e_0 hinzu, ſo erhält man, da $[e_0 X] = [e_0(x_0|e_0 + x_1|e_0 + \cdots)] = x_0[e_0|e_0] + x_1[e_0 e_1] + \cdots$, d. h., vermöge ($\beta$), $= x_0$ iſt, die Gleichung

$$(\zeta) \quad \begin{cases} x_0 = \lambda[e_0 A], \\ \text{und ebenſo} \\ x_1 = \lambda[e_1 A], \; x_2 = \lambda[e_2 A], \end{cases}$$

d. h.

$$(\eta) \quad x_0 : x_1 : x_2 : \cdots = [e_0 A] : [e_1 A] : [e_2 A],$$

und da x_0 gleich 1 iſt, ſo hat man $1 = \lambda[e_0 A]$

$$(\vartheta) \quad x_1 = \frac{[e_1 A]}{[e_0 A]}, \; x_2 = \frac{[e_2 A]}{[e_0 A]}, \cdots\cdots.$$

Die Auflöſung iſt alſo nur dann möglich, wenn $[e_0 A]$ von null verſchieden iſt; wenn hingegen $[e_0 A] = 0$ iſt, obwohl A von null verſchieden iſt, ſo lehrt die Gleichung $1 = \lambda[e_0 A]$, daſs dann die gegebenen Gleichungen einen Widerſpruch enthalten. Ferner läſst ſich zeigen, daſs in dem angenommenen Falle ($A \gtrless 0$ und $[e_0 A] \gtrless 0$) die Werthe (ϑ) die gegebenen Gleichungen (α) erfüllen. Denn wird $\lambda = \frac{1}{[e_0 A]}$ geſetzt, ſo werden die Gleichungen (ζ) erfüllt; die wir auch ſo ſchreiben können:

$$[e_0 X] = \lambda[e_0 A], \; [e_1 X] = \lambda[e_1 A] \cdots$$

oder

$$0 = [e_0(X - \lambda A)] = [e_1(X - \lambda A)] \text{ u. ſ. w.}$$

Alſo giebt die Grösse n-ter Stufe $X - \lambda A$ mit dem System der $n + 1$ Einheiten $e_0, \cdots e_n$ einzeln kombinatorisch multiplicirt null; alſo iſt (nach 85) jene Grösse ſelbſt null, d. h.

$$X - \lambda A = 0$$

oder

$$X = \lambda A,$$

welche Gleichung nach dem Obigen die gegebenen Gleichungen (α) erſetzt.

Angenommen sei zweitens, $a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots a^{(n)}$ stehen in einer Zahlbeziehung zu einander, ohne jedoch alle null zu sein, so giebt es (nach 17) unter ihnen eine Schaar von Grössen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen und aus denen die übrigen numerisch ableitbar sind; es mögen $a^{(1)}, a^{(2)} \cdots a^{(r)}$ eine solche Schaar bilden, und die übrigen $a^{(r+1)}, \cdots a^{(n)}$ aus ihnen numerisch ableitbar sein; und sei z. B. $a^{(n)} = \alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2 a^{(2)} + \cdots \alpha_r a^r$, dann ergiebt sich auch für jedes X, dass

$$[a^{(n)}X] = \alpha_1[a^{(1)}X] + \alpha_2[a^{(2)}X] + \cdots \alpha_r[a^{(r)}X]$$

ist, d. h. es wird die n-te der gegebenen Gleichungen aus den r ersten gewonnen, indem man diese beziehlich mit $a_1, a_2 \cdots a_r$ multiplicirt; d. h. die n-te Gleichung ist aus den r ersten Gleichungen numerisch ableitbar, jeder Werth X, der diese erfüllt, erfüllt auch die letzten. Es bleiben also nur r Gleichungen zu erfüllen übrig, und können somit die $(n - r)$ letzten Unbekannten willkürlich angenommen, und dann die übrigen nach dem obigen Verfahren bestimmt werden.

Anm. Die zweite Auflösungsmethode hat den Vorzug, dass sie den sämmtlichen n Unbekannten Eine einzige Unbekannte n-ter Stufe substituirt und diese aufs Einfachste finden lehrt.

135. Aufgabe. Aus $n + 1$ Gleichungen, welche in Bezug auf n Unbekannte vom ersten Grade sind, diese Unbekannten zu eliminiren.

Auflösung. Die Gleichungen seien

$$(a)\quad \begin{cases} \alpha_0^{(0)} + \alpha_1^{(0)}x_1 + \alpha_2^{(0)}x_2 + \cdots \alpha_n^{(0)}x_n = 0 \\ \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)}x_1 + \alpha_2^{(1)}x_2 + \cdots \alpha_n^{(1)}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)}x_1 + \alpha_2^{(n)}x_2 + \cdots \alpha_n^{(n)}x_n = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man sie beziehlich mit $n + 1$ Grössen $e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)} \cdots e^{(n)}$, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, addirt die so gewonnenen Gleichungen und setzt

$$(b)\quad \begin{cases} \alpha_0^{(0)}e^{(0)} + \alpha_0^{(1)}e^{(1)} + \alpha_0^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_0^{(n)}e^{(n)} = a_0 \\ \alpha_1^{(0)}e^{(0)} + \alpha_1^{(1)}e^{(1)} + \alpha_1^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_1^{(n)}e^{(n)} = a_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_n^{(0)}e^{(0)} + \alpha_n^{(1)}e^{(1)} + \alpha_n^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_n^{(n)}e^{(n)} = a_n \end{cases}$$

so erhält man

$$(c)\quad a_0 + x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots x_na_n = 0.$$

Fügt man die kombinatorischen Faktoren $a_1, a_2, \cdots a_n$ hinzu, so erhält man, da $[a_1 a_1 a_2 \cdots a_n]$ u. s. w. null sind,

(d) $[a_0 a_1 a_2 \cdots a_n] = 0,$

was die verlangte Eliminationsgleichung ist.

136. Aufgabe. Aus zwei Gleichungen, welche in Bezug auf eine der Unbekannten algebraisch und von beliebigem Grade sind, diese Unbekannte zu eliminiren.

Auflösung. Es sei, in Bezug auf die Unbekannte y, die eine Gleichung vom m-ten, die andere vom n-ten Grade, und seien die beiden Gleichungen

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} a_0 + a_1 y + \cdots + a_m y^m = 0 \\ b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n = 0, \end{cases}$$

wo $a_0, a_1, \cdots a_m$ und $b_0, b_1, \cdots b_n$ beliebige Funktionen der andern Unbekannten sind. Multiplicirt man die erstere nach und nach mit $1, y, y^2, \cdots y^{n-1}$, die letztere nach und nach mit $1, y, y^2, \cdots y^{m-1}$, so erhält man die Gleichungen

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} a_0 + a_1 y + \cdots + a_m y^m \\ \qquad a_0 y + \cdots + a_m y^{m+1} \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad a_0 y^{n-1} + \cdots + a_m y^{m+n-1} \\ b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n \\ \qquad + b_0 y + \cdots + b_n y^{n+1} \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad b_0 y^{m-1} \cdots + b_n y^{m+n-1}. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese nach der Reihe mit $n + m$ Einheiten, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, nämlich $e_1, e_2, \cdots e_{m+n}$, addirt die so gewonnenen Gleichungen und setzt

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} a_0 e_1 + b_0 e_{n+1} = u_1, \\ a_1 e_1 + a_0 e_2 + b_1 e_{n+1} + b_0 e_{n+2} = u_2, \\ a_2 e_1 + a_1 e_2 + a_0 e_3 + b_2 e_{n+1} + b_1 e_{n+2} + b_0 e_{n+3} = u_3, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_m e_n + b_n e_{n+m} = u_{m+n}, \end{cases}$$

so erhält man die Gleichung

(d) $u_1 + u_2 y + u_3 y^2 + \cdots u_{m+n} y^{m+n-1} = 0;$

und fügt man ihr die kombinatorischen Faktoren $u_2, u_3, \cdots u_{m+n}$ hinzu, so erhält man:

(e) $[u_1 u_2 u_3 \cdots u_{m+n}] = 0,$

was die verlangte Eliminationsgleichung ist.

Auflöſung 2. Es ſeien die gegebenen Gleichungen dieſelben wie in Auflöſung 1 (a), und ſei aus ihnen das System (b) abgeleitet. Man nehme $n+m$ Einheiten $e_0, e_1, \cdots e_{n+m-1}$, deren Produkt $= 1$ iſt.

Wenn nun

$$(\alpha)\quad \begin{cases} |e_0 + y|e_1 + \cdots\cdots y^{m+n-1}|e_{m+n-1} = Y \\ a_0e_0 + a_1e_1 + \cdots\cdots\cdots a_me_m = c_0 \\ a_0e_1 + a_1e_2 + \cdots\cdots\cdots a_me_{m+1} = c_1 \\ \vdots \\ a_0e_{n-1} + a_1e_n + \cdots\cdots a_me_{m+n-1} = c_{n-1} \\ b_0e_0 + b_1e_1 + \cdots\cdots\cdots b_ne_n = d_0 \\ \vdots \\ b_0e_{m-1} + b_1e_m + \cdots\cdots b_ne_{m+n-1} = d_{m-1}, \end{cases}$$

ſo werden die Gleichungen (b) gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$(\beta)\quad \begin{cases} c_0Y = c_1Y = \cdots = c_{n-1}Y = 0 \\ d_0Y = d_1Y = \cdots = d_{m-1}Y = 0. \end{cases}$$

Da nun Y eine Grösse $n + m - 1$-ter Stufe iſt, die nicht null iſt, ſo müſſen die $n + m$ Grössen $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, d_0, d_1, \cdots, d_{m-1}$ in einer Zahlbeziehung zu einander ſtehen (nach 85). Alſo hat man

$$[c_0c_1\cdots\cdots c_{n-1}d_0d_1\cdots d_{m-1}] = 0,$$

was die verlangte Eliminationsgleichung iſt.

Anm. 1. Es lässt ſich bei dieſer letzten Methode noch die Unbekannte y auf eine ſehr einfache Weiſe ausdrücken, wenn nämlich vorausgeſetzt wird, dass es unter den $n+m$ Grössen $c_0, c_1, \cdots c_{n-1}, d_0, d_1, \cdots d_{m-1}$, ſolche $n+m-1$ Grössen giebt, welche nicht in einer Zahlbeziehung zu einander ſtehen; es ſeien dies etwa $c_1\cdots\cdots c_{n-1}, d_0, d_1\cdots d_{m-1}$ und ſei ihr kombinatoriſches Produkt der Kürze wegen mit A bezeichnet; dann folgt (nach 84) aus den Gleichungen

$$c_1Y = c_2Y = \cdots = c_{n-1}Y = d_0Y = d_1Y = \cdots d_{m-1}Y,$$

dass

$$Y = pA$$

iſt, wo p eine unbekannte Zahl darſtellt. Aber nun iſt $Y = E_0 + yE_1 + \cdots$, alſo $[e_0Y] = [e_0E_0] = 1$ und $[e_1Y] = y$, alſo hat man

$$1 = e_0Y = p[e_0A]$$
$$y = e_1Y = p[e_1A],$$

alſo, indem man die zweite durch die erſte dividirt,

$$y = \frac{[e_1A]}{[e_0A]},$$

wodurch y gefunden ist, während die Eliminationsgleichung in der Form

$$[c_0 A] = 0$$

erscheint.

Anm. 2. Diese Auflösungsmethoden (in der ersten der hier mitgetheilten Formen) habe ich bereits in der ersten Ausgabe der Ausdehnungslehre (1844) mitgetheilt, und von ihr in Grunert's Archiv (1845) einen Auszug gegeben. Späterhin hat Cauchy in einer Reihe von Aufsätzen, welche in den Comptes rendus von 1854 veröffentlicht sind, dieselbe Methode mitgetheilt, ohne jedoch meiner oder meines Werkes, welches ich ihm bereits 1845 zugeschickt hatte, Erwähnung zu thun. In Folge einer Prioritäts-Reclamation, welche ich in dieser Beziehung an die Pariser Academie der Wissenschaften richtete, ist eine Commission zur Prüfung derselben ernannt worden; ohne dass jedoch darüber bisher Bericht erstattet wäre; was freilich auch kaum nöthig erscheint, da die Sache selbst keinem Zweifel Raum lässt. Zu erwähnen habe ich noch, dass ich durch die Cauchy'schen Aufsätze veranlasst bin, die Klammer zur Bezeichnung der kombinatorischen und überhaupt der auf ein Hauptgebiet bezüglichen Multiplikation anzuwenden.

Kap. 4. Inneres Produkt.

§. 1. Grundgesetze der inneren Multiplikation.

137. Erklärung. Unter dem inneren Produkte zweier Einheiten von beliebigen Stufen verstehe ich das bezügliche Produkt der ersten in die Ergänzung der zweiten; d. h. wenn E und F Einheiten beliebiger Stufen sind, so ist

$[E|F]$ das innere Produkt der Einheiten E und F.

138. Das innere Produkt zweier beliebiger Grössen ist gleich dem bezüglichen Produkt der ersten in die Ergänzung der zweiten, d. h. es ist

$[A|B]$ das innere Produkt der Grössen A und B.

Beweis. Es seien $A_1, \cdots A_n$ die Einheiten, aus denen A, und $B_1, \cdots B_m$ die Einheiten, aus denen B numerisch abgeleitet ist, und sei

$$A = \alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_n A_n; \quad B = \beta_1 B_1 + \cdots \beta_m B_m;$$

ferner sei für den Augenblick das Zeichen $\times$ als das der inneren Multiplikation gewählt, so ist

$$[A \times B] = [(\alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_n A_n) \times (\beta_1 B_1 + \cdots \beta_n B_n)]$$
$$= \sum \alpha_r \beta_s [A_r \times B_s], \qquad [42]$$

wenn nämlich die Summe sich auf die Werthe $1, \cdots n$ für r und $1, \cdots m$ für s bezieht. Da nun A_r und B_s Einheiten sind, so ist (nach 137) $[A_r \times B_s]$ gleich $[A_r|B_s]$, also $[A \times B]$

$$= \sum \alpha_r \beta_s [A_r|B_s] = [\sum \alpha_r A_r \sum \beta_s |B_s] \qquad [42]$$
$$= [A \sum \beta_s |B_s] = [A|\sum \beta_s B_s] \qquad [100]$$
$$= [A|B].$$

Anm. Eine besondere Bezeichnung für das innere Produkt erscheint also jetzt als überflüssig, indem das Ergänzungszeichen die Stelle des Zeichens für die innere Multiplikation vollständig vertritt. Und es ist nur zu beachten, dass dies Zeichen auch wie ein Multiplikationszeichen behandelt werden darf.

In meinen früheren Arbeiten (Geometrische Analyse, gekrönte Preisschrift, Leipzig 1847) habe ich das Zeichen $\times$ für das innere Produkt eingeführt, eine Bezeichnung, die nun entbehrlich ist.

139. Die Stufenzahl des inneren Produktes, dessen beide Faktoren nach der Reihe die Stufenzahlen α und β haben, während die des Hauptgebietes n beträgt, ist entweder gleich $n + \alpha - \beta$, oder gleich $\alpha - \beta$, je nachdem β grösser als α ist, oder nicht.

Beweis. Es seien A und B die beiden Faktoren, deren Stufenzahlen beziehlich α und β sind, so ist die Stufenzahl von |B gleich $n - \beta$. Ist nun zuerst β grösser als α, so ist auch n grösser als $\alpha + n - \beta$; d. h. die Summe der Stufenzahlen von A und |B ist kleiner als die des Hauptgebietes, also (nach 95) die Stufenzahl des Produktes [A|B] gleich jener Summe, d. h. gleich $\alpha + n - \beta$. Ist aber β eben so gross oder kleiner als α, so ist auch n eben so gross oder kleiner als $\alpha + n - \beta$, d. h. die Summe der Stufenzahlen von A und |B ist eben so gross oder grösser als n, also (nach 95) die Stufenzahl des Produktes [A|B] um n kleiner als jene Summe, d. h. gleich $\alpha - \beta$.

140. Die Anzahl der Einheiten, aus denen sich ein inneres Produkt numerisch ableiten lässt, ist gleich der Anzahl der Kombinationen aus so viel Elementen, als die Stufenzahl des Hauptgebietes, und zur so vielten Klasse, als die positive Differenz der Stufenzahlen beider Faktoren beträgt.

Beweis. Nach 139 ist die Stufenzahl des Produktes entweder gleich $n + \alpha - \beta$, oder gleich $\alpha - \beta$, je nachdem

β grösser als α ist, oder nicht. Die Einheiten von gleicher Stufe sind im ersten Falle die multiplikativen Kombinationen aus den n ursprünglichen Einheiten zur $(n + \alpha - \beta)$-ten, im zweiten zur $(\alpha - \beta)$-ten Klasse. Aber die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur $(n + \alpha - \beta)$-ten Klasse ist, nach einem bekannten Satze der Kombinationslehre gleich der Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur $(\beta - \alpha)$-ten Klasse. Die Klassenzahl ist dann also $\beta - \alpha$, im zweiten Falle $\alpha - \beta$, in beiden Fällen also der positiven Differenz von α und β gleich.

141. Das innere Produkt zweier Grössen gleicher Stufe ist eine Zahl.

Beweis. Denn die Differenz der Stufenzahlen ist dann null, also das Produkt von nullter Stufe, d. h. eine Zahl.

142. Das innere Produkt zweier gleicher Einheiten ist eins, das zweier verschiedener Einheiten gleicher Stufe null, d. h. $[E_r|E_r] = 1$, $[E_r|E_s] = 0$.

Beweis. $[E_r|E_r] = 1$ (nach 91). Ferner ist $|E_s$ (nach 89) dem kombinatorischen Produkte aller in dem Produkte E_s nicht vorkommenden Einheiten erster Stufe gleich; da nun E_r von E_s verschieden, beide aber Produkte von einer gleichen Anzahl ursprünglicher Einheiten sind, so enthält E_r nothwendig solche Einheiten als Faktoren, die in E_s fehlen, also in $|E_s$ vorkommen; also ist $[E_r|E_s]$ (nach 60) gleich null.

143. Wenn $E_1, \cdots E_m$ Einheiten von beliebiger, aber alle von gleicher Stufe sind, so ist

$$[(\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m)|(\beta_1 E_1 + \cdots \beta_m E_m)] = \alpha_1\beta_1 + \cdots \alpha_m\beta_m.$$

Beweis. Es sei $\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m$ mit $\sum \alpha_r E_r$, und $\beta_1 E_1 + \cdots \beta_m E_m$ mit $\sum \beta_s E_s$ bezeichnet, so ist

$$[\sum \alpha_r E_r | \sum \beta_s E_s] = \sum \alpha_r \beta_s [E_r|E_s], \qquad [42].$$

Nun ist (nach 142) das Produkt $[E_r|E_s]$ gleich null, wenn E_r und E_s verschiedene Einheiten sind und gleich eins, wenn r gleich s ist, somit wird der gewonnene Ausdruck

$$= \sum \alpha_r \beta_r = \alpha_1\beta_1 + \cdots \alpha_m\beta_m.$$

144. Die beiden Faktoren eines inneren Produktes sind vertauschbar, wenn sie von gleicher Stufe sind, d. h.

$[A|B] = [B|A]$, wenn A und B von gleicher Stufe sind.

Beweis. Wenn $E_1 \cdots E_m$ die Einheiten darstellen, welche mit A und B von gleicher Stufe sind und $A = \sum \alpha_r E_r$, $B = \sum \beta_s E_s$ ist, so ist (nach 143)

$$[A|B] = \sum \alpha_r \beta_r = \sum \beta_r \alpha_r = [B|A].$$

145. Erklärung. Wir schreiben der Kürze wegen

$$[A|A] = A^2$$

und nennen es das innere Quadrat von A.

146. Es ist

$$[\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m]^2 = \alpha_1^2 + \cdots \alpha_m^2.$$

Beweis. $(\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m)^2$

$$= [(\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m)|(\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m)] \quad [145]$$

$$= \alpha_1 \alpha_1 + \cdots \alpha_m \alpha_m \quad [144].$$

147. Das innere Produkt zweier Einheiten E und F ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn die eine der andern incident ist, d. h.

$[E|F] = 0$, wenn E und F nicht einander incident sind,

$[E|F] \gtrless 0$, wenn E und F einander incident sind.

Beweis. Für Einheiten gleicher Stufe ist der Satz in 142 bewiesen. Nun seien E und F zwei Einheiten ungleicher Stufe, und zwar E von höherer Stufe als F. Es sei $F = [E_1 G]$, wo E_1 dem E untergeordnet ist, aber das Gebiet G keine Grösse erster Stufe mit E gemein hat. Dann ist F dem E incident oder nicht, je nachdem G von nullter Stufe (eine Zahl) ist oder nicht. Es sei ferner $E = [E_1 E_2]$ und sei $[E_1 G E_2 H]$ das Produkt aller n ursprünglichen Einheiten und gleich der absoluten Einheit. Dann ist (nach 89) $[E_2 H]$ die Ergänzung von $[E_1 G]$, d. h. $|[E_1 G] = [E_2 H]$, also

$$[E|F] = [E_1 E_2 | E_1 G] = [E_1 E_2 \cdot E_2 H].$$

Ist G von nullter Stufe, d. h. E mit F incident, so ist $[E_1 E_2 H]$ von nullter Stufe, also (nach 106) der Ausdruck $[E_1 E_2 \cdot E_2 H] = [E_1 E_2 H] \cdot E_2$, also von null verschieden, da E_2 und $[E_1 E_2 H]$ von null verschieden sind. Ist aber G von höherer als nullter Stufe, so ist die Summe der Stufenzahlen von E_1, E_2 und H geringer als die Summe der Stufenzahlen von E_1, G, E_2, H, d. h. kleiner als n, also (nach 109) $[E_1 E_2 \cdot E_2 H] = 0$, d. h. wenn E und F nicht einander incident sind, so ist $[E|F] = 0$.

148. Es ist

$$[EF|E] = F \text{ und } [F|EF] = |E,$$

wenn E und F Einheiten sind, und [EF] nicht null ist.

Beweis. Es sei [EFG] das Produkt aller ursprünglichen Einheiten und gleich 1, so ist $|E = [FG]$, somit

$$[EF|E] = [EF \cdot FG] = [EFG]F \qquad [106]$$
$$= F.$$

Ferner ist dann $|[EF] = G$, also $[F|EF] = [FG] = |E$.

149. Wenn E, F, G Einheiten sind, und weder [EF] noch [EG] null ist, so ist entweder

$$[EF|EG] = [F|G], \text{ oder } [FE|GE] = [F|G],$$

ersteres, wenn F von höherer Stufe ist als G, letzteres, wenn G von höherer Stufe ist als F. Sind beide von gleicher Stufe, so sind beide Formeln gültig.

Beweis 1. Wenn F und G nicht einander incident sind, so sind auch [EF] und [EG] nicht einander incident, also sind dann (nach 147) beide Seiten der zu erweisenden Gleichung null.

2. Wenn G dem F untergeordnet ist, so sei $F = [GH]$. Dann ist

$$[EF|EG] = [EGH|EG] = H \qquad [148]$$
$$= [GH|G] \qquad [148]$$
$$= [F|G].$$

3. Wenn F dem G untergeordnet ist, so sei $G = [HF]$. Dann ist

$$[FE|GE] = [FE|HFE] = |H \qquad [148]$$
$$= [F|HF] \qquad [148]$$
$$= [F|G].$$

4. Wenn F und G von gleicher Stufe sind, also, bei Ausschluss des Falles in Beweis 1, zusammenfallen, so ist (nach 70) sowohl G dem F, als F dem G untergeordnet, und es gelten also nach Beweis 2 und 3 beide Formeln.

150. Wenn q und r die Stufenzahlen von A und B sind und $q < r$ ist, so ist

$$[A|B] = (-1)^{q(r-1)}[B|A],$$

d. h. [A|B] ist der Ergänzung von [B|A] entgegengesetzt, wenn die Stufenzahl von A ungerade und zugleich die von B gerade ist; in jedem andern Falle ist [A|B] der Ergänzung von [B|A] gleich.

Beweis. Es ist

$$|[B|A] = [|B||A] \quad [97]$$
$$= (-1)^{q(n-q)}[|B \cdot A] \quad [92]$$
$$= (-1)^{q(n-q)}(-1)^{q(n-r)}[A|B] \quad [58]$$
$$= (-1)^{q(2n-q-r)}[A|B].$$

Nun ist in Bezug auf den Modul. 2 die Grösse $q(2n-q-r)$ kongruent $q(r-q)$ oder kongruent $q(r-1)$, da q^2 mit q gleichzeitig gerade oder ungerade ist, somit

$$|[B|A] = (-1)^{q(r-1)}[A|B], \text{ oder auch}$$
$$[A|B] = (-1)^{q(r-1)}[B|A].$$

Anm. Vermittelst des so eben erwiesenen Satzes kann man den Fall, wo der zweite Faktor eines inneren Produktes von höherer Stufe ist als der erste, immer auf den andern Fall zurückführen, wo der erste Faktor von höherer Stufe ist als der zweite. Diesen letzteren Fall, welcher sich in den oben entwickelten Formeln als der einfachere herausstellte, werde ich jetzt vorzugsweise berücksichtigen.

§. 2. Begriff des Normalen und seine Correlaten.

151. Erklärung. Numerischer Werth einer Grösse A heisst die positive Quadratwurzel aus dem innern Quadrat dieser Grösse. **Numerisch gleich** heissen zwei Grössen von gleichem numerischen Werth, d. h. zwei Grössen, deren innere Quadrate gleich sind.

Anm. Für Zahlen, reelle oder imaginäre, ist die Benennung in derselben Weise auch sonst in Gebrauch, indem zuerst numerischer Werth einer positiven Zahl diese selbst, der einer negativen $-a$ die entsprechende positive Zahl a, d. h. in beiden Fällen die positive Quadratwurzel ihres Quadrates ist. Hat man eine imaginäre Zahl $a+b\sqrt{-1}$, so sind ihre Einheiten 1 und $\sqrt{-1}$. Eine der beiden Wurzeln von $\sqrt{-1}$ sei mit i bezeichnet, und 1 und i als Einheiten genommen, also $i^2=1$, so ist der numerische Werth von $a+bi$ nach der Definition gleich $\sqrt{a^2+b^2}$, was auch sonst als numerischer Werth der imaginären Grösse $a+bi$ aufgefasst wird. In der Geometrie ist numerischer Werth einer Linie ihre Länge gemessen durch die Längeneinheit u. s. w.

152. Erklärung. Normal zu einander heissen zwei von null verschiedene Grössen, deren inneres Produkt null ist. Zwei Gebiete heissen normal zu einander, wenn ihre Theile es sind. Zwei Gebiete heissen **allseitig** zu einander

normal, wenn jede Grösse erster Stufe, die dem einen Gebiete angehört, zu jeder, die dem andern angehört, normal ist; und zwei Grössen heissen allseitig normal zu einander, wenn ihre Gebiete es sind.

Anm. Der Grund der Benennung ruht in der Geometrie. Nimmt man dort die ursprünglichen Einheiten als gleich lange zu einander senkrechte Strecken an, wie dies stets geschehen muss, so zeigt sich leicht, dass das innere Produkt zweier Strecken dann und nur dann null ist, wenn diese Strecken senkrecht zu einander sind. Statt des Ausdrucks „senkrecht" habe ich den „normal" gewählt, als den abstrakteren, der auch eine Anwendung auf nicht räumliche Verhältnisse gestattet.

153. Erklärung. Normalsystem n-ter Stufe heisst ein Verein von n numerisch gleichen (von null verschiedenen) Grössen erster Stufe, von denen jede zu jeder normal ist; und wenn n zugleich die Stufenzahl des Hauptgebietes ist, so heisst es ein vollständiges Normalsystem. Der numerische Werth jener n Grössen heisse zugleich der numerische Werth des Normalsystems. Einfaches Normalsystem heisst jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist.

Anm. Im Raume bilden z. B. drei gleichlange und gegen einander senkrechte Strecken ein Normalsystem.

154. Erklärung. Circuläre Aenderung nenne ich jede Transformation eines Vereins, durch welche 2 Grössen a und b des Vereins sich beziehlich in $xa + yb$ und in $\mp(xb - ya)$ verwandeln, vorausgesetzt, dass $x^2 + y^2 = 1$ sei. Ich nenne die circuläre Aenderung eine positive oder negative, je nachdem a und b sich in $xa + yb$ und $+(xb - ya)$, oder in $xa + yb$ und $-(xb - ya)$ verwandeln. Wenn hierbei $x = \cos.\alpha$ und $y = \sin.\alpha$ ist, und a und b numerisch gleich und zu einander normal sind, so sage ich, der Verein habe sich von a nach b hin um den Winkel α geändert.

Anm. Stellt man sich unter a und b zwei gleichlange und zu einander senkrechte Strecken vor, so sieht man leicht, dass durch die circuläre Aenderung, durch welche a in $a_1 = a\cos.\alpha + b\sin.\alpha$, b in $b_1 = b\cos.\alpha - a\sin.\alpha$ übergeht, a_1 und b_1 von derselben Länge sind wie a und b und gegen einander senkrecht bleiben. Es bleiben also a und b bei jener Aenderung conjugirte Halbmesser eines festen Kreises, wodurch der Name circulärer Aenderung gerechtfertigt ist. Auch sieht man, dass dann der Winkel von a bis a_1 gleich α ist.

Sind übrigens a und b beliebige Strecken, so werden a_1 und b_1 conjugirte Halbmesser einer konstanten Ellipse, in welcher auch a und b conjugirte Halbmesser sind. Von dieser Betrachtungsweise aus würde sich der Name der elliptischen Aenderung empfehlen. Da jedoch die Ellipse immer auf den Kreis reducirbar und der Kreis die einfachere Kurve ist, so habe ich jenen Namen als den einfacheren vorgezogen. Siehe auch Crelle Journal, Band 49 pag. 134.

155. Durch circuläre Aenderung geht aus jedem Normalsystem ein numerisch gleiches Normalsystem hervor.

Beweis. Es seien a, b, c, $\cdots$ die Grössen eines Normalsystems, d. h. $a^2 = b^2 = c^2 = \cdots$ und $0 = [a|b] = [a|c] = [b|c] = \cdots$, und ändere sich a in $a_1 = xa + yb$ und b in $b_1 = xb - ya$, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist, so ist zu zeigen, dass a_1, b_1, c, $\cdots$ ein Normalsystem bilden, in welchem $a_1^2 = a^2$ ist. Es ist, da $[a|b] = 0$ ist,

$$a_1^2 = (xa + yb)^2 = x^2a^2 + y^2b^2$$
$$= (x^2 + y^2)a^2 \text{ (da } b^2 = a^2)$$
$$= a^2 \text{ (da } x^2 + y^2 = 1).$$

Aus gleichem Grunde ist $b_1^2 = a^2$. Ferner ist

$$[a_1|b_1] = [(xa + yb)|(xb - ya)] = xy(b^2 - a^2)$$
$$\text{(da } [a|b] = 0)$$
$$= 0 \text{ (weil } b^2 = a^2).$$

Endlich ist

$$[a_1|c] = [(xa + yb)|c] = x[a|c] + y[b|c] = 0,$$

weil $[a|c]$ und $[b|c] = 0$ sind. Aus gleichem Grunde ist $[b_1|c] = 0$ u. s. w. Folglich ist das System a_1, b_1, c, $\cdots$ ein Normalsystem, dessen numerischer Werth gleich dem des gegebenen ist.

156. Das kombinatorische Produkt der Grössen eines Normalsystems bleibt bei positiver circulärer Aenderung dieses Systems unverändert, und geht bei negativer in seinen entgegengesetzten Werth über.

Beweis. Es gehe a in $a_1 = xa + yb$, b in $b_1 = xb - ya$ über, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist; so wird

$$[a_1b_1] = [(xa + yb)(xb - ya)]$$
$$= x^2[ab] - y^2[ba] \text{ (da [aa], [bb] nach 60 null sind)}$$
$$= (x^2 + y^2)[ab] \text{ (da } [ba] = -[ab] \text{ ist nach 55)}$$
$$= [ab] \text{ (da } x^2 + y^2 = 1).$$

Alſo $[a_1b_1] = [ab]$. Kommen nun zu den gleichen Produkten $[ab]$ und $[a_1b_1]$ noch an den entſprechenden Stellen gleiche kombinatoriſche Faktoren hinzu, ſo bleiben die Produkte gleich. Alſo bewieſen.

157. Die Grössen eines Normalsystems ſtehen in keiner Zahlbeziehung zu einander, und jede Grösse erſter Stufe läſst ſich aus einem beliebigen vollſtändigen Normalsystem numeriſch ableiten.

Beweis 1. Es ſeien a, b, c, $\cdots$ Grössen eines Normalsystems. Geſetzt nun, es ſtänden dieſelben in einer Zahlbeziehung zu einander, etwa ſo, dass

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

ſei, ſo multiplicire man beide Seiten innerlich mit a, ſo wird

$$a^2 = \beta[b|a] + \gamma[c|a] + \cdots = 0,$$

da $[b|a]$, $[c|a]$, $\cdots$ null ſind (nach 153). Alſo wäre $a^2 = 0$, im Widerſpruch mit 153. Es läſst ſich alſo keine der Grössen a, b, c, $\cdots$ aus den übrigen numeriſch ableiten, d. h. ſie ſtehen (nach 2) in keiner Zahlbeziehung zu einander.

2. Ein vollſtändiges Normalsystem in einem Hauptgebiete n-ter Stufe beſteht aus n Grössen, und da dieſe nach Bew. 1 in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, ſo kann (nach 24) aus ihnen jede Grösse erſter Stufe, da ſie immer dem Hauptgebiete angehören muss, numeriſch abgeleitet werden.

158. Wenn eine Grösse A zu mehreren Grössen B, C, $\cdots$ von gleicher Stufe normal iſt, ſo iſt ſie auch zu jeder Grösse normal, die aus ihnen numeriſch ableitbar iſt.

Beweis. Wenn A zu B, C, $\cdots$ normal iſt, ſo iſt (nach 152)

$$0 = [A|B] = [A|C] = \cdots.$$

Somit auch

$$[A|(\beta B + \gamma C + \cdots)] = \beta[A|B] + \gamma[A|C] + \cdots \quad [41]$$
$$= 0,$$

da $[A|B]$, $[A|C]$, $\cdots$ null ſind.

159. Die ſämmtlichen Grössen erſter Stufe, welche zu m Grössen eines vollſtändigen Normalsyſtems n-ter Stufe normal ſind, gehören dem Gebiete der $n - m$ übrigen Grössen des Syſtems an.

Beweis. Es sei das System $a_1, \cdots\cdots a_n$ ein vollständiges Normalsystem, und seien m seiner Grössen, etwa $a_1 \cdots a_m$ zu irgend einer Grösse erster Stufe a normal, so ist zu zeigen, dass a dem Gebiete $a_{m+1} \cdots a_n$ angehört. Nach 157 lässt sich a aus dem vollständigen Normalsystem $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten. Es sei der Ausdruck dieser Ableitung

$$a = \alpha_1 a_1 + \cdots\cdots \alpha_n a_n.$$

Da nun a zu $a_1, a_2, \cdots a_m$ normal ist, so erhält man, indem man zuerst mit a_1 innerlich multiplicirt,

$$0 = [a_1|a] = \alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 [a_1|a_2] + \cdots \alpha_n [a_1|a_n]$$
$$= \alpha_1 a_1^2,$$

da $[a_1|a_2]$ bis $[a_1|a_n]$ als innere Produkte der Grössen eines Normalsystems null sind. Da nun a_1^2 (nach 153) nicht null ist, so folgt aus der Gleichung $\alpha_1 a_1^2 = 0$, dass $\alpha_1 = 0$ ist. Auf gleiche Weise folgt, indem man nach und nach mit $a_2, \cdots\cdots a_m$ multiplicirt, dass auch $\alpha_2, \cdots\cdots \alpha_m$ null sind. Folglich ist

$$a = \alpha_{m+1} a_{m+1} + \cdots\cdots \alpha_n a_n,$$

d. h. a gehört dem Gebiete $a_{m+1} \cdots\cdots a_n$ an.

160. Jedes Normalsystem lässt sich durch fortgesetzte circuläre Aenderung so umwandeln, dass eine seiner Grössen mit einer beliebig gegebenen Grösse erster Stufe, deren numerischer Werth dem des Normalsystems gleich ist und welche dem Gebiete desselben angehört, identisch wird.

Beweis. Es seien $a_1, \cdots\cdots a_n$ die Grössen des gegebenen Normalsystems, und k die gegebene Grösse welche numerisch gleich a_1 ist, und sei

$$k = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n.$$

Nun wandle man a_1 und a_2 circulär so um, dass dabei a_1 in

$$c_2 = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$$

übergeht, was (nach 154) möglich ist. Dann ist $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, c_2$, also

$$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, c_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots \alpha_n a_n.$$

Darauf wandle man c_2 und a_3 circulär so um, dass dabei c_2 in

$$c_3 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, c_2 + \alpha_3 a_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}$$

übergeht. Dann ist

$$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\, c_3 + \alpha_4 a_4 + \cdots \alpha_n a_n.$$

In dieſer Weiſe fahre man fort, bis

$$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots \alpha_{n-1}^2}\, c_{n-1} + \alpha_n a_n$$

wird, und wandle schliesslich c_{n-1} und a_n circulär ſo um, dass dabei c_{n-1} in

$$c_n = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots \alpha_{n-1}^2}\, c_{n-1} + \alpha_n a_n}{\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots \alpha_n^2}}$$

übergeht, ſo ist dann

$$* \quad k = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots \alpha_n^2}\, c_n.$$

Nun ist nach der Hypotheſis

$$a_1^2 = k^2 = (\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n)^2 = \alpha_1^2 a_1^2 + \cdots \alpha_n^2 a_n^2,$$

weil $[a_1|a_2]$ etc. null ſind. Und da auch $a_1^2 = a_2^2 = \cdots = a_n^2$ ist, ſo wird

$$a_1^2 = (\alpha_1^2 + \cdots \alpha_n^2) a_1^2,$$

d. h. $\alpha_1^2 + \cdots \alpha_n^2 = 1$. Dies alſo in die obige Gleichung (*) eingeführt, giebt, wenn man den poſitiven Wurzelwerth wählt,

$$k = c_n,$$

d. h. in dem zuletzt hervorgehenden Normalsystem ist eine Grösse c_n mit der gegebenen k identisch, wie verlangt.

161. Wenn zwei Normalsysteme gleichen numerischen Werth haben, und ihre Gebiete einander incident ſind, ſo lässt ſich durch fortgeſetzte circuläre Aenderung, wenn beide von gleicher Stufe ſind, jedes aus dem andern ableiten, wenn ſie hingegen von ungleicher Stufe ſind, das höherer Stufe ſo umwandeln, dass es die Grössen des andern enthält.

Beweis. Es ſeien a, b, c, $\cdots$ und a_1, b_1, c_1, $\cdots$ zwei Normalsysteme von gleichem numerischen Werthe, und ſeien die Gebiete beider einander incident, und zwar das des letzteren entweder von gleicher oder höherer Stufe als das des ersteren, ſo müssen (nach 15) alle Grössen a, b, c, $\cdots$ dem Gebiete a_1, b_1, c_1, $\cdots$ angehören. Somit kann man (nach 160) das Normalsystem a_1, b_1, c_1, $\cdots$ circulär ſo umwandeln, dass eine ſeiner Grössen $= a$ wird. Das ſo hervorgehende Normalsystem bestehe aus den Grössen a, b_2, c_2, $\cdots$. Da nun b, c, $\cdots$, als Grössen des Normalsystems a, b, c, $\cdots$, zu a, alſo zu einer

Grösse des Normalsystems a, b_2, c_2, $\cdots$ normal sind, so müssen sie (nach 159) dem Gebiete der übrigen Grössen dieses Systems, also dem Gebiete b_2, c_2, $\cdots$ angehören. Demnach kann man wieder das System b_2, c_2, $\cdots$ circulär so umwandeln, dass eine seiner Grössen $= b$ wird. Das so hervorgehende Normalsystem bestehe aus den Grössen b, c_3, d_3, $\cdots$, so müssen wieder aus demselben Grunde, wie vorher, c, d, $\cdots$ dem Gebiete c_3, d_3, $\cdots$ angehören. Das Normalsystem a_1, b_1, c_1, d_1, $\cdots$ ist dann durch circuläre Aenderungen übergegangen in a, b, c_3, d_3, $\cdots$. So kann man, wenn das System a_1, b_1, $\cdots$ von höherer Stufe ist als a, b, $\cdots$, fortfahren, bis das zuletzt hervorgehende System alle Grössen des gegebenen Systemes a, b, c, $\cdots$ enthält, oder wenn beide Systeme von gleicher Stufe sind, so lange bis es alle Grössen des Systems a, b, c, $\cdots$, mit Ausnahme des letzten, enthält. Diese letzte sei q, die vorletzte p, und sei das so hervorgehende Normalsystem a, b, $\cdots$ p, q_n, so muss nach der angewandten Schlussfolge q dem Gebiete q_n angehören, d. h. beide müssen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Ist nun $q_n = xq$, wo x eine Zahl ist, so ist, da beide einander numerisch gleich sind, $q_n^2 = q^2$, also $x^2 = 1$, somit $q_n = \mp q$. Ist $q_n = -q$, so hat man nur statt der letzten circulären Aenderung die entgegengesetzte zu nehmen, so fällt dann auch die letzte Grösse des so hervorgehenden Normalsystems mit q zusammen, also ist dann das eine der gegebenen Normalsysteme aus dem andern circulär abgeleitet, wie verlangt.

162. Das System der ursprünglichen Einheiten ist ein (vollständiges) Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist.

Beweis. Es seien $e_1 \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, so ist (nach 142)

$$1 = e_1^2 = \cdots = e_n^2$$
$$0 = [e_1|e_2] = \cdots .$$

163. In jedem Gebiete m-ter Stufe lässt sich ein Normalsystem gleicher Stufe von beliebigem numerischen Werth annehmen, und zwar so, dass dies System Theil eines vollständigen Normalsystems sei.

Beweis. Es sei a_1 eine Grösse erster Stufe in dem gegebenen Gebiete m-ter Stufe A, ihr numerischer Werth sei 1. Da nun (nach 162) das System der ursprünglichen Einheiten $e_1 \cdots e_n$ ein vollständiges Normalsystem ist, dessen numerischer Werth 1 ist, so lässt sich (nach 160) dies Normalsystem circulär so umwandeln, dass a_1 eine der Grössen des resultirenden Normalsystems wird. Dann ist a_1 auf den $n-1$ übrigen Grössen dieses Normalsystems, also auch (nach 158) zu jeder Grösse ihres Gebietes A_1 normal. Dies Gebiet ist von $(n-1)$-ter Stufe und hat also mit dem Gebiet m-ter Stufe A (nach 26) ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl $n-1+m-n=m-1$ ist. Es sei in diesem gemeinschaftlichen Gebiete a_2 eine Grösse erster Stufe, deren numerischer Werth 1 ist. Da a_2 also auch dem Gebiete A_1 angehört, so ist sie nach dem obigen zu a_1 normal, aber auch mit a_1 numerisch gleich, nämlich $=1$, also bilden a_1 und a_2 ein Normalsystem mit dem numerischen Werth 1. Also lässt sich (nach 159) das vollständige Normalsystem $e_1 \cdots e_n$ in ein anderes Normalsystem umwandeln, welches a_1 und a_2 enthält. Das Gebiet A_2 der übrigen $n-2$ Grössen dieses Normalsystems ist von $(n-2)$-ter Stufe, und alle Grössen erster Stufe, die diesem Gebiete angehören, sind normal zu a_1 und a_2. Nun haben A und A_2 ein Gebiet $m-2$-ter Stufe gemein; in ihm sei a_3 eine beliebige Grösse erster Stufe vom numerischen Werthe 1, so hat man schon ein Normalsystem von drei Grössen a_1, a_2, a_3 in A, und so kann man fortfahren. Hat man so in A ein Normalsystem von $(m-1)$ Grössen $a_1 \cdots a_{m-1}$ erhalten, so enthält das vollständige Normalsystem, zu dem es gehört, ausserdem noch $n-m+1$ Grössen; ihr Gebiet, was A_{m-1} heisse, ist von $(n-m+1)$-ter Stufe, hat also mit dem Gebiete m-ter Stufe A noch ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl $n-m+1+m-n=1$ ist. Es sei a_m eine Grösse dieses Gebietes, deren numerischer Werth 1 ist, so ist a_m, da es in A_{m-1} liegt, zu $a_1 \cdots a_{m-1}$ normal und $a_1 \cdots a_m$ bilden also ein Normalsystem m-ter Stufe in dem Gebiete m-ter Stufe A. Diesem Normalsystem kann man dadurch, dass man alle seine Grössen mit einer und derselben beliebigen Zahl multiplicirt, jeden beliebigen numerischen Werth geben.

§. 3. Gesetze des inneren Produktes, an den Begriff des Normalen geknüpft.

164. Erklärung. Normale Zurückleitung A' einer Grösse A auf ein Gebiet B nenne ich die Zurückleitung der Grösse A auf das Gebiet B, unter Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes (vergl. 127 und 33).

Anm. Ist z. B. a, b, c ein vollständiges Normalsystem und p = qa + rb + sc eine beliebige Grösse des Hauptgebietes, so ist die normale Zurückleitung der Grösse p auf das Gebiet bc gleich rb + sc. Für die Geometrie ist sie identisch mit der senkrechten Projektion.

165. Die normale Zurückleitung A' einer Grösse A auf ein Gebiet B ist

$$A' = \frac{[B\cdot(A|B)]}{B^2}, \text{ oder } = [B\cdot(A|B)],$$

letzteres, wenn der numerische Werth von B gleich 1 ist.

Beweis. Nach 164 ist A' die Zurückleitung von A auf B, unter Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes, d. h. des Gebietes |B. Wird |B mit C bezeichnet, so ist (nach 129)

$$A' = \frac{[B\cdot AC]}{[BC]}, \text{ also } = \frac{[B\cdot(A|B)]}{[B|B]} = \frac{[B\cdot(A|B)]}{B^2}.$$

166. Zusatz. Sind ins Besondere A und B von gleicher Stufe, so ist die Zurückleitung

$$A' = \frac{[A|B]B}{B^2}, \text{ oder } = [A|B]B, \text{ wenn } B^2 = 1.$$

Beweis. Dann ist nämlich (nach 117) [A|B] eine Zahl und kann also statt [B·(A|B)] geschrieben werden [A|B]B.

167. Die Ergänzung des kombinatorischen Produktes A von m Grössen eines vollständigen Normalsystems, welches den numerischen Werth Eins hat, ist dem kombinatorischen Produkte der (n − m) übrigen Grössen des Systems gleich oder entgegengesetzt, je nachdem [AB] = + 1 oder = − 1 ist, d. h.

$$* \; |A = [AB]B,$$

wenn die n einfachen Faktoren von [AB] die n Grössen des Normalsystems sind.

Beweis 1. Für das System der ursprünglichen Einheiten ist diese Beziehung in 89 als Definition festgesetzt.

2. Ich zeige nun, dass, wenn diese (durch Gleichung * dargestellte) Beziehung für irgend ein Normalsystem a, b, c, ··· gilt, sie auch für jedes aus ihm durch circuläre Aenderung hervorgehende Normalsystem gelte. Es gehe durch circuläre Aenderung a in $a_1 = xa + yb$, b in $b_1 = xb - ya$ über. Durch diese verwandle sich A in A_1, B in B_1; so ist zu zeigen, dass auch $|A_1 = [A_1B_1]B_1$ sei. Da nun A und B zusammen alle Grössen a, b, ··· des Normalsystems und zwar sowohl A als B jede dieser Grössen nur einmal enthalten sollen, so kommen a und b entweder beide in A, oder beide in B, oder eine in A und die andere in B vor. Wir haben schon in 156 bewiesen, dass das Produkt $[a_1b_1]$ bei dieser Aenderung gleich [ab] bleibt; somit bleibt in den beiden ersten Fällen sowohl A als B unverändert, also bleibt dann auch die obige Gleichung, die nur A und B enthält, bestehen. Im dritten Falle sei a in A enthalten, b in B, und sei A′ die Grösse, die aus A hervorgeht, wenn man darin b statt a setzt, und B′ die Grösse, welche aus B hervorgeht, wenn man darin a statt b setzt. Dann unterscheiden sich die kombinatorischen Produkte [A′B′] und [AB] nur durch gegenseitige Vertauschung der beiden einfachen Faktoren a und b, folglich ist dann (nach 55) [A′B′] $= -$ [AB]. Ferner ist dann

$$A_1 = xA + yA',\ B_1 = xB - yB',$$

folglich

$$|A_1 = x|A + y|A' \qquad [101].$$

Da nun A und A′ nur Grössen des Normalsystems a, b, ··· als einfache Faktoren enthalten, und B und B′ die jedesmal übrigen, so gilt (nach der Annahme) für sie die obige Gleichung *, d. h. es ist

$$|A = [AB]B,\ |A' = [A'B']B' = -[AB]B',$$

letzteres, weil $[A'B'] = -[AB]$ war; somit ist

$$|A_1 = x[AB]B - y[AB]B' = [AB](xB - yB') = [AB]B_1.$$

Endlich ist (nach 156) $[A_1B_1] = [AB]$, indem die einfachen Faktoren von $[A_1B_1]$ aus denen von [AB] durch positive circuläre Aenderung hervorgehen. Also ist

$$|A_1 = [A_1B_1]B_1,$$

d. h. wenn die Gleichung * für irgend ein Normalsystem gilt, so gilt sie auch für jedes daraus durch positive circuläre

Aenderung hervorgehende, ebenfo aber auch für jedes daraus durch negative Aenderung hervorgehende. Denn die pofitive circuläre Aenderung, wie wir fie oben annahmen, wird (nach 154) in eine negative verwandelt, wenn man das Vorzeichen von b_1 ändert, dann ändert fich auch das Vorzeichen von B_1, wobei die gefundene Gleichung bestehen bleibt. Alfo bleibt die Gleichung * überhaupt bei jeder circulären Aenderung des Normalsystems bestehen, wenn fie für irgend ein Normalsystem gilt. Nach Beweis 1 gilt fie aber für das Normalsystem der urfprünglichen Einheiten, alfo nun auch für jedes daraus circulär abgeleitete. Nun lässt fich aber (nach 161) jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist, aus jenem ableiten, alfo gilt die Gleichung für jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist.

168. Alle bisher aufgestellten Sätze gelten noch, wenn man statt des Systems der urfprünglichen Einheiten ein beliebiges vollständiges Normalsystem fetzt, dessen numerischer Werth Eins ist.

Beweis. Alle in den ersten drei Kapiteln entwickelten Rechnungsgefetze gelten (nach 110) auch dann noch, wenn man statt der n urfprünglichen Einheiten beliebige n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe fetzt, alfo auch, wenn man die Grössen eines vollständigen Normalsystems einfetzt. Ferner gilt (nach 167) der Begriff der Ergänzung wie er in 91 in Bezug auf das System der urfprünglichen Einheiten aufgestellt ist, auch in Bezug auf jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth Eins ist. Aber auf diefem Begriff der Ergänzung und den in den ersten drei Kapiteln entwickelten Rechnungsgefetzen beruhen alle Sätze des inneren Produktes, wie fie bisher entwickelt wurden. Alfo gelten diefe Sätze noch, wenn man statt des Systems der urfprünglichen Einheiten ein Normalsystem fetzt, dessen numerischer Werth Eins ist.

Anm. Vermöge des fo eben bewiefenen Satzes ist alfo der Begriff des inneren Produktes in fofern nicht mehr an das System der urfprünglichen Einheiten geknüpft, als man statt diefes Systems ein beliebiges Normalsystem fetzen kann, dessen numerischer Werth Eins ist, ohne dass irgend einer der bisher aufgestellten Sätze eine Aenderung

erleidet. Es erscheint alfo der Begriff des inneren Produktes nur noch an den Begriff des Normalsystems geknüpft, und dies tritt daher in den folgenden Entwickelungen statt des Systems der ursprünglichen Einheiten hervor.

169. Das innere Produkt zweier Grössen ändert feinen Werth nicht, wenn man statt des einen Faktors feine normale Zurückleitung auf das Gebiet des andern fetzt, d. h.

$$[A|B] = [A|B'] \text{ und}$$
$$[B|A] = [B'|A],$$

wenn B' die normale Zurückleitung von B auf das Gebiet A ist (alfo A von gleicher oder höherer Stufe als B ist).

Es fei A von m-ter Stufe, B von p-ter, das Hauptgebiet von n-ter, fo kann man (nach 163) ein vollständiges Normalsystem $a_1 \cdots a_n$ fo annehmen, dass m feiner Grössen, etwa $a_1 \cdots a_m$, in A liegen, und fein numerischer Werth 1 fei. Die p Faktoren von B find dann (nach 157) aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableitbar, alfo B aus den multiplikativen Kombinationen von $a_1 \cdots a_n$ zur p-ten Klasse numerisch ableitbar. Diefe Kombinationen feien $B_1, B_2, \cdots B_q, B_{q+1}, \cdots B_r$, wo $B_1 \cdots B_q$ die Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ find; und fei

$$B = \beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q + \beta_{q+1} B_{q+1} \cdots \beta_r B_r,$$

fo find (nach 147 u. 168) $[A|B_{q+1}], \cdots [A|B_r]$ alle gleich null, da jede der Grössen B_{q+1} bis B_r folche Faktoren enthält, die in A nicht vorkommen, und diefe Grössen alfo der Grösse A nicht incident find, alfo wird

$$[A|B] = \beta_1 [A|B_1] + \cdots \beta_q [A|B_q]$$
$$= [A|(\beta_1 B_1 + \cdots \beta_q B_q)].$$

Aber (nach 127) ist $\beta_1 B_1 + \cdots \beta_q B_q$ die Zurückleitung von B auf das Gebiet $[a_1 \cdots a_m]$, mit Ausschluss des Gebietes $[a_{m+1} \cdots a_n]$, letzteres Gebiet ist aber (nach 167) Ergänzung des ersteren; alfo ist $\beta_1 B_1 + \cdots \beta_q B_q$ die normale Zurückleitung von B auf das Gebiet $[a_1 \cdots a_m]$, d. h. auf das Gebiet von A, alfo gleich B' und fomit

$$[A|B] = [A|B'].$$

Aus gleichem Grunde ist $[B|A] = [B'|A]$.

170. Wenn man in einem inneren Produkte zweier gleichstufiger Grössen die eine auf das Gebiet der andern normal zurückleitet, und diefe Zurückleitung fo wie die Grösse,

auf deren Gebiet zurückgeleitet ist, durch ein und dasselbe Maass misst, dessen numerischer Werth Eins ist, so ist das Produkt der beiden Messungs-Quotienten gleich dem gegebenen inneren Produkt, d. h.

$$[A|B] = \alpha\beta', \text{ wenn } A = \alpha E,$$

und die normale Zurückleitung B′ von A auf B gleich $\beta' E$, und der numerische Werth von E gleich Eins ist.

Beweis. Nach 145 ist

$$[A|B] = [A|B'].$$

Es sei E ein Gebietstheil von A, dessen numerischer Werth Eins ist, und sei $A = \alpha E$, $B' = \beta' E$, so ist $[A|B'] = \alpha\beta'[E|E] = \alpha\beta' E^2 = \alpha\beta'$, da $E^2 = 1$ ist.

171. Wenn die Gebiete von A und B zu einander allseitig normal sind, und C eine beliebige Grösse von niederer oder gleicher Stufe wie B ist, so ist

$$[AB|AC] = A^2[B|C] \text{ und}$$
$$[CA|BA] = A^2[C|B].$$

Beweis. Es sei ein Normalsystem angenommen, dessen Grössen sich auf die Gebiete A und B vertheilen, und dessen numerischer Werth 1 ist, und sei dasselbe zu einem vollständigen Normalsysteme ergänzt; so ist C aus den multiplikativen Kombinationen der Grössen jenes Normalsystems (69, 77b) numerisch ableitbar. Es sei $C = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots$, ferner sei $A = \alpha A_1$, $B = \beta B_1$, wo A_1, B_1 kombinatorische Produkte der Grössen des Normalsystems sind, so ist

$$[AB|AC] = \alpha^2\beta[A_1B_1|A_1(\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots)]$$
$$= \alpha^2\beta\gamma_1[A_1B_1|A_1C_1] + \alpha^2\beta\gamma_2[A_1B_1|A_1C_2] + \cdots.$$

Aber $[A_1B_1|A_1C_r]$ ist, wenn A_1, B_1, C_r Einheiten höherer Stufe, d. h. kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten sind, (nach 149) gleich $[B_1|C_r]$. Dasselbe findet aber (nach 168) noch statt, wenn jene Grössen kombinatorische Produkte der Grössen eines einfachen Normalsystems sind, also in unserm Falle. Somit wird

$$[AB|AC] = \alpha^2\beta\gamma_1[B_1|C_1] + \alpha^2\beta\gamma_2[B_1|C_2] + \cdots$$
$$= \alpha^2\beta[B_1|(\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots)]$$
$$= \alpha^2\beta[B_1|C].$$

Da nun A_1^2 gleich 1 ist, weil A_1 ein kombinatorisches

Produkt von Grössen eines einfachen Normalsystems ist, so ist der gefundene Ausdruck

$$= \alpha^2\beta A_1^2[B_1|C] = (\alpha A_1)^2[\beta B_1|C]$$
$$= A^2[B|C].$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich die zweite Formel des Satzes.

172. Wenn A mit $\mathfrak{A}$ von gleicher Stufe, B aber von gleicher oder höherer Stufe wie $\mathfrak{B}$ ist, und [AB] nicht verschwindet, so ist

(a) $[AB|\mathfrak{AB}] = [A|\mathfrak{A}][B|\mathfrak{B}] + [A_1|\mathfrak{A}][B_1|\mathfrak{B}] + \cdots$ und

(b) $[\mathfrak{BA}|BA] = [\mathfrak{B}|B][\mathfrak{A}|A] + [\mathfrak{B}|B_1][\mathfrak{A}|A_1] + \cdots$,

wo A, $A_1, \cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus den einfachen Faktoren (erster Stufe) von [AB], und B, $B_1, \cdots$ die zu A, $A_1, \cdots$ ergänzenden Kombinationen sind (so dass also $[AB] = [A_1B_1] =$ u. s. w.).

Anm. Wenn nämlich A eine der multiplikativen Kombinationen aus $a_1, a_2, \cdots a_n$ ist, so nenne ich diejenige multiplikative Kombination B, welche die sämmtlichen in A nicht enthaltenen Elemente enthält, und mit einem solchen Vorzeichen ($\pm$) versehen ist, dass $[AB] = [a_1a_2\cdots a_n]$ ist, die zu A ergänzende Kombination.

Beweis 1. Es seien die einfachen Faktoren von [AB] alle zu einander normal. Da $\mathfrak{A}$ von gleicher Stufe mit A ist, so ist es aus den multiplikativen Kombinationen A, $A_1, \cdots$ numerisch ableitbar. Es sei

$$\mathfrak{A} = \alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots,$$

so ist

$$[AB|\mathfrak{AB}] = [AB|(\alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots)\mathfrak{B}]$$
$$= \alpha[AB|A\mathfrak{B}] + \alpha_1[AB|A_1\mathfrak{B}] + \cdots.$$

Da nun (nach der Annahme) $[AB] = [A_1B_1] = \cdots$ ist, so erhalten wir den gefundenen Ausdruck

$$= \alpha[AB|A\mathfrak{B}] + \alpha_1[A_1B_1|A_1\mathfrak{B}] + \cdots.$$

Da nun die einfachen Faktoren von [AB] alle zu einander normal sind, und identisch sind mit denen von $\mp[A_1B_1]$ u. s. w. (nach der Annahme), so ist A zu B allseitig normal, und ebenso A_1 zu B_1 u. s. w. Folglich ist (nach 171) der zuletzt gewonnene Ausdruck

$$= \alpha A^2[B|\mathfrak{B}] + \alpha_1 A_1^2[B_1|\mathfrak{B}] + \cdots.$$

Nun ist aber $[A_r|A] = [A_r|(\alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots)] = \alpha_r A_r^2$, weil A_r mit den zu ihm normalen Grössen A, $A_1, \cdots$, ausgenommen A_r, innerlich multiplicirt, null giebt (nach 147, 168). Alſo kann man in dem vorher gefundenen Ausdruck $A_r|A$ statt $\alpha_r A_r^2$ ſetzen und jener Ausdruck wird

$$= [A|A][B|B] + [A_1|A][B_1|B] + \cdots,$$

d. h. die Formel (a) gilt für unſere Vorausſetzung.

2. Nun zeige ich, dass, wenn die Formel (a) für irgend eine Reihe von einfachen Faktoren gilt, aus denen [AB] beſteht, ſie auch noch beſtehen bleiben, wenn man dieſe Faktorenreihe lineal ändert (ſiehe 71), d. h. statt irgend eines Faktors a ſetzt $a + \beta b$, wo b einer der andern Faktoren und β eine Zahl ist. Hierbei behält (nach 72) das Produkt [AB], alſo auch die linke Seite unſerer Formel, denſelben Werth. Betrachtet man nun irgend ein Glied der rechten Seite, z. B. $[A_r|A][B_rB]$, ſo können a und b entweder beide in A_r vorkommen, oder beide in B_r, oder eins in A_r, das andere in B_r. In den beiden erſten Fällen bleibt ſowohl der Werth von A_r als der von B_r unverändert, alſo auch das betrachtete Glied. Im letzten Falle kommt noch ein anderes Glied $[A_s|A][B_s|B]$ vor von der Art, dass A_r und A_s, im Uebrigen dieſelben Faktoren enthalten, nur dass, wo das eine dieſer Produkte den Faktor a enthält, das andere den Faktor b enthalte. Dann ſtehen B_r und B_s, da ſie die jedesmal dem A_r und A_s fehlenden Faktoren enthalten, in derſelben gegenſeitigen Beziehung zu einander. Es kommt alſo a in einer der Grössen A_r und A_s vor; es mag a in A_r vorkommen. Nun ſei A' die Grösse, welche aus A_r hervorgeht, indem man darin b statt a ſetzt, und B' die Grösse, welche aus B_r hervorgeht, indem man darin a statt b ſetzt. Dann enthält alſo A' dieſelben Faktoren wie A_s und B' wie B_s; es ſind alſo dann A' und B' (nach 57) den Grössen A_s und B_s entweder gleich oder entgegengeſetzt. Da $[A'B']$ aus $[A_rB_r]$ durch Vertauſchung der beiden einfachen Faktoren a und b hervorgeht, ſo ist (nach 55) $[A'B'] = -[A_rB_r]$, und dies $= -[A_sB_s]$ (nach der Annahme). Wenn alſo $A' = \mp A_s$ ist, ſo ist $B' = \pm B_s$. Wenn man nun die lineale Substitution von $a + \beta b$ für a einführt, ſo verwandelt ſich

$[A_r|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}] + [A_s|\mathcal{A}][B_s|\mathcal{B}] = [A_r|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}] - [A'|\mathcal{A}][B'|\mathcal{B}]$ in
$[(A_r + \beta A')|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}] - [A'|\mathcal{A}][(B' + \beta B_r)|\mathcal{B}]$,

weil nämlich B_r und A' kein a enthalten und alſo unverändert bleiben, während A_r in $A_r + \beta A'$ und B' in $B' + \beta B_r$ ſich verwandelt. Alſo verwandelt ſich jene Summe in

$[A_r|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}] - [A'|\mathcal{A}][B'|\mathcal{B}] + \beta[A'|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}] - \beta[A'|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}]$,

d. h., da die letzten Glieder ſich aufheben, der Werth jener Summe bleibt ungeändert. Es bleibt ſomit die ganze rechte Seite unſerer Formel bei jener linealen Substitution ungeändert, indem die Glieder entweder einzeln ungeändert bleiben oder, wenn ſie geändert werden, ſich zu Gliederpaaren gruppiren, deren Summe ungeändert bleibt. Da ſomit beide Seiten der Formel bei linealer Substitution ungeändert bleiben, ſo bleibt die Formel, wenn ſie für irgend eine Faktorreihe gilt, auch bei deren linealer Aenderung beſtehen.

3. Es ſei endlich die Faktorreihe a, b, $\cdots$ eine ganz beliebige, doch ihr kombinatoriſches Produkt [AB] nicht null, ſo läſst ſich (nach 163) ſtets eine Reihe zu einander normaler Grössen erſter Stufe a_1, a_2, $\cdots$ angeben, von der Art, dass $[ab\cdots] = [a_1 a_2 \cdots]$. Dann läſst ſich aber (nach 76) die Grössenreihe a, b, $\cdots$ aus a_1, a_2, $\cdots$ durch lineale Aenderung ableiten. Nun gilt nach Beweis 1 unſere Formel für die Reihe der zu einander normalen Faktoren a_1, a_2, $\cdots$, alſo nach Beweis 2 auch für die durch fortgeſetzte lineale Aenderung daraus hervorgehende Faktorreihe, alſo auch für a, b, $\cdots$ d. h. allgemein.

173. Wenn A und $\mathcal{A}$ von gleicher Stufe ſind, ebenſo B und $\mathcal{B}$ u. ſ. w., endlich L und $\mathcal{A}$, M aber von gleicher oder höherer Stufe iſt wie $\mathcal{M}$ und [AB$\cdots$LM] ein nicht verſchwindendes kombinatoriſches Produkt von Grössen erſter Stufe iſt, ſo iſt

$$[AB\cdots LM|\mathcal{AB}\cdots\mathcal{AM}] = \sum [A_a|\mathcal{A}][B_b|\mathcal{B}]\cdots[L_l|\mathcal{A}][M_m|\mathcal{M}],$$

wo $[A_a B_b \cdots L_l M_m]$ dieſelben einfachen Faktoren enthält wie [AB$\cdots$LM], nur in anderer Folge, doch in der Art, dass beide Produkte einander gleich ſind, wo ferner A_a eben ſo viel Faktoren enthält wie A, B_b wie B u. ſ. w.; und wo endlich

die Summe ſich auf alle möglichen verſchiedenen Ausdrücke dieſer Art bezieht, ſo dass nämlich $A_a B_b \cdots L_l M_m$ und $A_{a'} B_{b'} \cdots L_{l'} M_{m'}$ als verſchiedene Ausdrücke gelten, wenn wenigstens eins der Grössenpaare A_a und $A_{a'}$, B_b und $B_{b'}$, $\cdots$ aus zwei Grössen beſteht, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen.

Beweis 1. Für zwei Faktoren iſt der Satz in 148 bewieſen, wir können nämlich die Formel 172 auch in folgender Weiſe ſchreiben

$$* \quad [AB|\mathcal{AB}] = \sum [A_a|\mathcal{A}][B_b|\mathcal{B}],$$

wo $A_a B_b$ die im Satze dargeſtellte Bedeutung haben, welche mit der Bedeutung der Grössenpaare AB, $A_1 B_1, \cdots$ in 172 zuſammenfällt.

2. Durch wiederholte Anwendung des Satzes für zwei Faktoren gelangt man zu dem Satze für beliebig viele Faktoren. In der That kann man das Produkt [AB$\cdots$LM] zunächſt als aus den zwei Faktoren A und [BC$\cdots$LM] beſtehend anſehen. Dann wird

$$[AB\cdots LM|\mathcal{AB}\cdots\mathcal{M}] = [A(BC\cdots LM)|\mathcal{A}(\mathcal{B\Gamma}\cdots\mathcal{M})]$$
$$= \sum [A_a|\mathcal{A}][(BC\cdots LM)_b|\mathcal{B\Gamma}\cdots\mathcal{M}],$$

wo der Index b unter der Klammer andeuten ſoll, dass der in der Klammer ſtehende Ausdruck als Eine Grösse, gemäss der Formel *, behandelt werden ſoll. Der gefundene Ausdruck iſt aus demſelben Grunde wieder

$$= \sum [A_a|\mathcal{A}][B_b|\mathcal{B}][(CD\cdots LM)_c|\mathcal{\Gamma\Delta}\cdots\mathcal{M}],$$

und ſetzt man dies fort, ſo erhält man ihn zuletzt

$$= \sum [A_a|\mathcal{A}][B_b|\mathcal{B}]\cdots[L_l\mathcal{A}][M_m|\mathcal{M}].$$

Anm. Die geſammte Schaar der Grössenreihe A_a, $B_b \cdots M_m$ kann man auf folgende Weiſe kombinatoriſch entwickeln: Man betrachtet die einfachen Faktoren des Produktes [AB$\cdots$] als kombinatoriſche Elemente, entwickelt aus ihnen die multiplikativen Kombinationen zur ſo vielten Klaſſe, als die Stufe von A beträgt, ſo erhält man die Grössen A_a; zu jeder derſelben entwickelt man die multiplikativen Kombinationen aus den in ihr nicht vorkommenden Elementen zur ſo vielten Klaſſe, als die Stufe von B beträgt, ſo erhält man zu jedem A_a die ſämmtlichen zugehörigen Grössen B_b und ſo fort; endlich die letzten dieſer multiplikativen Kombinationen, die zu der Grösse M gehören, ſetzt man gleich $\mp M_m$, wobei man das Vorzeichen ſo beſtimmt, dass $[A_a B_b \cdots M_m] = [AB\cdots M]$ wird. Zum Beiſpiel, wenn $A = ab$, $B = cd$,

$C = M = e$ ist, so erhält man folgende Schaar von je drei Grössen, von denen jedesmal die erste eine Grösse A_a, die zweite eine zugehörige Grösse B_b, die dritte die zu beiden gehörige Grösse C_c darstellt:

ab, cd, e	ad, bc, e	bc, ad, e	be, ac, d	ce, ab, — d
ab, ce, — d	ad, be, — c	bc, ae, — d	be, ad, — c	ce, ad, b
ab, de, c	ad, ce, b	bc, de, a	be, cd, a	ce, bd, — a
ac, bd, — e	ae, bc, — d	bd, ac, — e	cd, ab, e	de, ab, c
ac, be, d	ae, bd, c	bd, ae, c	cd, ae, — b	de, ac, — b
ac, de, — b	ae, cd, — b	bd, ce, — a	cd, be, a	de, bc, a.

174. Zusatz. Wenn in dem inneren Produkte $[AB\cdots|\mathit{AB}\cdots]$ die Grössen A und A von gleicher Stufe sind, ebenso B und B und so fort, so ist

$$[AB\cdots|\mathit{AB}\cdots] = \frac{[A'B'\cdots]}{[AB\cdots]},$$

wo $A' = \sum[A_r|\mathit{A}]A_r$, $B' = \sum[B_r|\mathit{B}]B_r$, u. s. w., und wo die A_r die multiplikativen Kombinationen aus den einfachen Faktoren des äusseren Produktes $[AB\cdots]$ zur so vielten Klasse sind, als die Stufenzahl von A beträgt und entsprechend die B_r u. s. w.

Beweis. Nach 173 ist

$$[AB\cdots|\mathit{AB}\cdots] = \sum\overline{[A_a|\mathit{A}][B_b|\mathit{B}]\cdots}, \text{ wo}$$
$$[A_aB_b\cdots] = [AB\cdots]$$

ist, mit den näheren in 173 angegebenen Bestimmungen.

Da nun A mit A von gleicher Stufe ist, also auch A_a mit A, so ist (nach 141) $[A_a|\mathit{A}]$ eine Zahl und aus gleichem Grunde $[B_b|\mathit{B}]$, u. s. w. Folglich können wir statt $\sum\overline{[A_a|\mathit{A}][B_b|\mathit{B}]\cdots}$ schreiben

$$= \sum\frac{\overline{[A_a|\mathit{A}][B_b|\mathit{B}]\cdots[A_aB_b\cdots]}}{[A_aB_b\cdots]}.$$

Also, da $[A_aB_b\cdots]$ gleich $[AB\cdots]$ ist,

$$= \sum\overline{[A_a|\mathit{A}][B_b|\mathit{B}]\cdots[A_aB_b\cdots]} : [AB\cdots].$$

Oder, da (nach 46) die Zahlfaktoren beliebigen Faktoren eines Produktes zugeordnet werden können,

$$= \sum\overline{([A_a|\mathit{A}]A_a\cdot[B_b|\mathit{B}]B_b\cdots)} : [AB\cdots].$$

Hier enthält (nach 173) jedes Produkt $[A_aB_b\cdots]$ dieselben Faktoren erster Stufe wie $[AB\cdots]$, also enthält in jedem derselben A_a andere als B_b, u. s. w. Da nun aber die Produkte, in denen A_a, B_b, $\cdots$ gleiche Faktoren erster Stufe enthalten,

null sind, so können wir diese Produkte zu dem obigen Ausdrucke hinzufügen, und erhalten dann denselben (nach 45)

$$= [\Sigma [A_r|A]A_r \cdot \Sigma [B_r|B]B_r \cdots] : [AB \cdots],$$

$$\text{d. h.} = \frac{[A'B' \cdots]}{[AB \cdots]}.$$

175. Das innere Produkt zweier Grössen m-ter Stufe A und B, deren jede aus m einfachen Faktoren besteht, ist gleich der Determinante aus m Reihen von je m Gliedern, die man erhält, indem man nach der Ordnung jeden einfachen Faktor von A mit jedem von B zu einem inneren Produkte verknüpft, d. h. es ist

$$[abc \cdots | a'b'c' \cdots] = \text{Determ.} \begin{cases} [a|a'], & [a|b'], & [a|c'], \cdots \\ [b|a'], & [b|b'], & [b|c'], \cdots \\ [c|a'], & [c|b'], & [c|c'], \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$= \Sigma \mp (\alpha\beta_1\gamma_2 \cdots),$$

wo $\alpha = [a|a']$, $\alpha_1 = [a|b']$, $\alpha_2 = [a|c']$, $\cdots$

$\beta = [b|a']$, $\beta_1 = [b|b']$, $\beta_2 = [b|c']$, $\cdots$

$\gamma = [c|a']$, $\gamma_1 = [c|b']$, $\gamma_2 = [c|c']$, $\cdots$

u. f. w.

Beweis. Nach 174 ist

$$[abc \cdots | a'b'c' \cdots] = \frac{[a_1b_1c_1 \cdots]}{[abc \cdots]},$$

wo $a_1 = [a|a']a + [b|a']b + [c|a']c + \cdots = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots$

$b_1 = [a|b']a + [b|b']b + [c|b']c + \cdots = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \cdots$

$c_1 = [a|c']a + [b|c']b + [c|c']c + \cdots = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots$

$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$

ist. Aber nach 63 ist

$$[(\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots)(\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \cdots)(\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots) \cdots]$$

$$= \Sigma \mp (\alpha\beta_1\gamma_2 \cdots) \cdot [abc \cdots].$$

Also

$$[abc \cdots | a'b'c' \cdots] = \frac{[a_1b_1c_1 \cdots]}{[abc \cdots]} = \frac{\Sigma \mp (\alpha\beta_1\gamma_2 \cdots)[abc \cdots]}{[abc \cdots]}$$

$$= \Sigma \mp (\alpha\beta_1\gamma_2 \cdots).$$

176–179. Zusätze. Ins Besondere ist

176. $\cdots [ab|a'b'] = [a|a'][b|b'] - [a|b'][a'|b]$,

177. $\cdots [ab]^2 = a^2b^2 - [a|b]^2$,

178. $[abc]^2 = a^2b^2c^2 - a^2[b|c]^2 - b^2[c|a]^2 - c^2[a|b]^2 + 2[a|b][b|c][c|a]$,

179. $[abcd]^2 = \text{Determ.} \begin{cases} a^2, & [a|b], & [a|c], & [a|d] \\ [b|a], & b^2, & [b|c], & [b|d] \\ [c|a], & [c|b], & c^2, & [c|d] \\ [d|a], & [d|b], & [d|c], & d^2, \end{cases}$

180. $[ab|c] = [a|c]b - [b|c]a$,

181. $[abc|d] = [a|d][bc] + [b|d][ca] + [c|d][ab]$,

182. $[abcd|e] = [a|e][bcd] + [b|e][cad] + [c|e][abd] + [d|e][cba]$.

Denn in 180 bis 182 kann man den zweiten Faktor des inneren Produktes (c, d oder e) als Produkt betrachten, dessen zweiter Faktor 1 ist (alſo $c \cdot 1$, $d \cdot 1$ oder $e \cdot 1$), und kann dann No. 173 anwenden; wobei man zu beachten hat, dass nach den Geſetzen kombinatoriſcher Multiplikation

$$[ab] = -[ba],\quad [a \cdot bc] = [b \cdot ca] = [c \cdot ab] \text{ und}$$
$$[a \cdot bcd] = [b \cdot cad] = [c \cdot abd] = [d \cdot cba] \text{ ist.}$$

183. Wenn man aus einer Reihe von (n) Grössen erster Stufe die multiplikativen Kombinationen zu irgend einer Klasse bildet, und jede derſelben mit der ergänzenden Kombination zu einem inneren Produkte verknüpft, ſo ist die Summe dieſer Produkte null, d. h.

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = 0,$$

wenn $A, A_1, \cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus den n Grössen erster Stufe $a_1, a_2, \cdots a_n$ zu irgend einer (m-ten) Klasse, und $B, B_1, \cdots$ die ergänzenden Kombinationen ſind.

Beweis 1. Es ſei zuerst angenommen $m >= n - m$. Da nun A eine der multiplikativen Kombinationen von $a_1, \cdots a_n$ ist, ſo wird es die Form haben

$$A = [a_r a_s \cdots \cdots a_z],$$

wo r, s, ··z beliebige m verſchiedene unter den Zahlen $1 \cdots n$ ſind. Da ferner B die ergänzende Kombination zu A ist, ſo muss es als Faktoren diejenigen $n - m$ unter den Grössen $a_1 \cdots a_n$ enthalten, welche unter den Grössen $a_r, a_s, \cdots a_z$ nicht vorkommen. Es ſeien dies $a_{r'}, a_{s'} \cdots, a_{u'}$, ſo dass alſo $B = (-1)^p [a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}]$ ist. Ferner muss das durch $(-1)^p$ angedeutete Vorzeichen (nach 172 Anm.) ſo bestimmt werden, dass $[AB] = [a_1 \cdots a_n]$ wird, d. h. dass

* $(-1)^p[a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}] = [a_1 a_2 \cdots a_n]$ ist. Von gleicher Form sind die sämmtlichen übrigen Produkte $[A_1|B_1]$ u. s. w. Sollen die Kombinationen A, B, A_1, B_1, $\cdots$ wohlgeordnete sein, so hat man noch die Bedingungen hinzuzufügen, dass $r < s < \cdots < u < v < \cdots < z$ und $r' < s' < \cdots < u'$ sei. Fügen wir diese Bedingung hinzu, so wird

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = \sum (-1)^p [a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z | a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}].$$

Fassen wir hier $a_v \cdots a_z$ zu einem Faktor zusammen und fügen dem zweiten Faktor des inneren Produktes an letzter Stelle noch den Faktor 1 hinzu, so wird die Bedingung von No. 173 erfüllt, also wird der obige Ausdruck

** $[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = \sum (-1)^p [a_r|a_{r'}][a_s|a_{s'}] \cdots [a_u|a_{u'}] \cdot [a_v a_w \cdots a_z]$,

wobei noch die Gleichung (*) bestehen bleibt, und auch die Bedingungen $r' < s' < \cdots < u'$ und $v < w < \cdots < z$ geltend bleiben, hingegen die Bedingung, dass $r < s < \cdots < u$ sei, wegfällt, und die Summe sich auf alle unter jenen Bedingungen möglichen Glieder bezieht. Ich zeige nun, dass in dieser Summe alle Glieder paarweise einander entgegengesetzt sind, und sich also heben. Es sei irgend eins dieser Glieder betrachtet, etwa

$$(-1)^p [a_r|a_{r'}][a_s|a_{s'}] \cdots [a_u|a_{u'}][a_v a_w \cdots a_z]$$

wo die Indices bestimmte (von einander verschiedene) Werthe haben, die den obigen Bedingungen genügen, und wo nach dem Obigen p einen solchen Werth hat, dass die Gleichung (*) erfüllt wird. Da die Indices r, r', s, s', $\cdots$ u, u' alle von einander verschieden sind, so wird irgend einer der kleinste unter ihnen sein müssen, und unter den Produkten $[a_r|a_{r'}]$, $[a_s|a_{s'}]$, $\cdots [a_u|a_{u'}]$ wird irgend eins diesen kleinsten Index enthalten; es sei dies beispielsweise das Produkt $[a_r|a_{r'}]$. Dies angenommen, vertausche man r und r' und ändere das Zeichen, so erhält man einen Ausdruck

*** $(-1)^{p+1}[a_{r'}|a_r][a_s|a_{s'}] \cdots [a_u|a_{u'}][a_v a_w \cdots a_z]$,

von welchem ich zeigen werde, dass er gleichfalls als Glied in der obigen Summe (**) vorkommt. Sollte der Index r grösser sein als s', so gebe man dem Faktor $[a_{r'}|a_r]$ unter den

übrigen Faktoren $[a_s|a_{s'}]\cdots[a_u|a_{u'}]$ eine solche Stellung, dass die Bedingung erfüllt wird, vermöge welcher der zweite Index in jedem dieser Faktoren kleiner sein soll als der zweite Index des nächst folgenden Faktors. Ich will annehmen, dass diese Bedingung erfüllt sei, wenn man den Faktor $[a_{r'}|a_r]$ um q Stellen nach rechts rückt, was gestattet ist, da alle diese Faktoren Zahlen sind. Es ist nun noch zu zeigen, dass auch die durch Gleichung (*) ausgedrückte Bedingung für das so hervorgehende Glied gilt, d. h. dass sie noch bestehen bleibt, wenn man in ihr $p+1$ statt p setzt, auf der linken Seite $a_{r'}$ mit a_r vertauscht und diese beiden Faktoren um q Stellen nach rechts rückt. Das Produkt, welches auf diese Weise aus $(-1)^p[a_r a_s\cdots a_u a_v\cdots a_z a_{r'} a_{s'}\cdots a_{u'}]$ hervorgeht, heisset P; so ist

$$P=(-1)^{p+1}[a_{r'}a_s\cdots a_u a_v\cdots a_z a_r a_{s'}\cdots a_{u'}]$$

Denn man kann in diesem Produkte P die Faktoren a_r und $a_{r'}$ gleichzeitig wieder um 9 Stellen zurückrücken, ohne dass sich (nach 58) der Werth des Produktes ändert. Ferner ist der letzte Ausdruck (nach 55), indem man a_r und $a_{r'}$ vertauscht,

$$\begin{aligned}&=-(-1)^{p+1}[a_r a_s\cdot a_u a_v\cdots a_z a_{r'}a_{s'}\cdots a_{u'}]\\&=(-1)^p[a_r a_s\cdot\cdots\cdot a_u a_v\cdots a_z a_{r'}a_{s'}\cdots a_{u'}]\\&=[a_1 a_2\cdots a_n]\qquad\qquad[\text{nach }*].\end{aligned}$$

Also $P=[a_1 a_2\cdots a_n]$. Also ist jener Ausdruck (***) allen Bedingungen unterworfen, denen die Glieder der Summe (**) unterworfen sind, ist also, da jene Summe alle Glieder enthält die jenen Bedingungen genügen, selbst ein Glied jener Summe. Dies Glied hebt sich nun mit dem zuerst betrachteten Gliede auf; denn

$$\begin{aligned}&(-1)^p[a_r|a_{r'}][a_s|a_{s'}]\cdots[a_u|a_{u'}][a_v a_w\cdots a_z]\\&\quad+(-1)^{p+1}[a_{r'}|a_r][a_s|a_{s'}]\cdots[a_u|a_{u'}][a_v a_w\cdots a_z]\end{aligned}$$

ist null, da $[a_{r'}|a_r]=[a_r|a_{r'}]$ ist (nach 144) und $(-1)^{p+1}=-(-1)^p$ ist. Aber auf dieselbe Weise, wie aus dem ersteren dieser beiden Glieder das letztere hervorgeht, geht aus diesem jenes hervor. Und auf gleiche Weise findet sich zu jedem Gliede jener Summe ein ihm zugepaartes, welches sich mit ihm aufhebt; also ist jene Summe null, also auch das dieser Summe gleiche

$$[A|B]+[A_1|B_1]+\cdots=0.$$

2. Wenn $m < n - m$ ist, so ist (nach 150), wenn noch $m(n-m-1) = c$ gesetzt wird,

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = (-1)^c|[B|A] + (-1)^c|[B_1|A_1] + \cdots$$
$$= (-1)^c|([B|A] + [B_1|A_1] + \cdots) \quad [98].$$

Hier ist (nach Beweis 1) die in Klammer geschlossene Summe 0, also

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = (-1)^c|(0) = 0 \quad [89].$$

184. Zusatz. Wenn man aus einer Reihe von $4m$ Grössen erster Stufe $a_1 \cdots a_{4m}$ die sämmtlichen multiplikativen Kombinationen A, B, C$\cdots$ zur $2m$-ten Klasse, welche eine dieser Grössen, z. B. a_1 enthalten, bildet, und jede derselben mit der ergänzenden Kombination zu einem inneren Produkte verknüpft, so ist die Summe dieser Produkte null, d. h.

$$[A|A'] + [B|B'] + \cdots = 0,$$

wo A, B,$\cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1, \cdots a_{4m}$ zur $2m$-ten Klasse, welche a_1 enthalten, und A′, B′,$\cdots$ deren ergänzende Kombinationen sind.

Beweis. Da A, B,$\cdots$ die sämmtlichen a_1 enthaltenden multiplikativen Kombinationen aus $4m$ Elementen zur $2m$-ten Klasse sind, so sind ihre ergänzenden Kombinationen A′, B′,$\cdots$ die sämmtlichen Kombinationen aus denselben Elementen zu derselben Klasse, welche a_1 nicht enthalten. Ferner, da die Stufenzahlen von A, B,$\cdots$ A′, B′,$\cdots$ gerade sind, so ist (nach 58) $[AA'] = [A'A]$, und also (nach 172 Anm.), wenn A′ die ergänzende Kombination von A ist, auch A die ergänzende Kombination von A′, und ebenso B die von B′, somit (nach 183)

$$[A|A'] + [B|B'] + \cdots + [A'|A] + [B'|B] + \cdots = 0.$$

Aber (nach 144) $[A|A'] = [A'|A]$, $[B|B'] = [B'|B]\cdots$.

Also

$$2[A|A'] + 2[B|B'] + \cdots = 0, \text{ d. h.}$$
$$[A|A'] + [B|B'] + \cdots = 0.$$

185—187. Zusätze. Ins Besondere ist

185. $[ab|cd] + [ac|db] + [ad|bc] = 0,$

186. $[ab|c] + [bc|a] + [ca|b] = 0,$

187. $[abc|d] - [bcd|a] + [cda|b] - [dab|c] = 0.$

§. 4. Besondere Sätze über die innere Multiplikation zweier Grössen erster Stufe.

188. Die Bedingungsgleichungen für die innere Multiplikation zweier Grössen erster Stufe sind

(a) $[e_r|e_s] = 0$, wenn $r \gtrless s$,

(b) $[e_r|e_r] = [e_s|e_s] = \cdots$,

und zwar gelten dieselben auch, wenn man statt der Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ ein beliebiges vollständiges Normalsystem setzt.

Beweis. Die Geltung der beiden Gleichungsgruppen für die Einheiten ist in No. 142 bewiesen. Also gelten sie (nach 168) auch für jedes einfache vollständige Normalsystem. Sie gelten aber auch für jedes beliebige vollständige Normalsystem. Denn sind a, b, zwei Grössen desselben und ist λ der numerische Werth des Normalsystems, so dass $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$ gesetzt werden kann, wo a' und b' den numerischen Werth 1 haben, so ist $[a'|b'] = 0$, also auch $[\lambda a'|\lambda b'] = 0$, d. h. $[a|b] = 0$ und $[a'|a'] = 1$, also $[a|a] = [\lambda a'|\lambda a'] = \lambda^2[a'|a'] = \lambda^2$. Ebenso $[b|b] = \lambda^2$, also $[a|a] = [b|b]$. Zu zeigen ist noch, dass die beiden obigen Gruppen die vollständigen Bestimmungsgleichungen enthalten, d. h. (nach 48) dass zwischen den Produkten $[e_r|e_s]$ keine andere Zahlbeziehung herrscht, als eine aus jenen beiden Gruppen ableitbare. Es lassen sich vermöge der beiden Gruppen alle Produkte $[e_r|e_s]$, sofern r gleich s ist, gleich $[e_1|e_1]$ setzen, während sie verschwinden, sobald r von s verschieden ist. Hat man also irgend eine Bedingungsgleichung

$$\sum \alpha_{r,s}[e_r|e_s] = 0,$$

so verwandelt sie sich in

$$\sum \alpha_{r,r}[e_1|e_1] = 0,$$

also, da $[e_1|e_1]$ gleich 1 ist, in

$$\sum \alpha_{r,r} = 0.$$

Ist aber letzteres der Fall, so geht die Gleichung

$$\sum \alpha_{r,s}[e_r|e_s] = 0$$

schon aus den obigen beiden Gruppen hervor, somit enthalten jene beiden Gruppen das vollständige System der Bestimmungsgleichungen.

Anm. Für die innere Multiplikation zweier beliebiger Grössen

von den Stufen p und q ($q \geqq p$) ist das System der Bestimmungsgleichungen in den beiden Gleichungsgruppen enthalten:

(a) $[E|F] = 0$, wenn E nicht mit F incident ist,

(b) $[E|EG] = [E'|E'G]$, wo E, F, G, E' kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten sind, E, E' von p-ter, F, [EG] und [E'G] von q-ter Stufe und die letzteren beiden nicht null sind.

189. $[a|b] = [b|a]$ (specieller Fall von No. 144).

190. Es ist

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)|(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)] = \alpha_1\beta_1 a_1^2 + \alpha_2\beta_2 a_2^2 \cdots,$$

wenn $a_1, a_2, \cdots$ zu einander normal sind.

Beweis. Denn wenn $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots$ mit $\sum \alpha_r a_r$ und $\beta_1 a + \beta_2 a_2 + \cdots$ mit $\sum \beta_r a_r$ bezeichnet wird, so ist

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)|(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)] = [\sum \alpha_r a_r | \sum \beta_r a_r]$$
$$= \sum \alpha_r \beta_s [a_r|a_s] \qquad [42]$$
$$= \sum \alpha_r \beta_r [a_r|a_r],$$

weil a_r und a_s, wenn r von s verschieden ist, nach der Annahme zu einander normal sind, also (nach 188) ihr inneres Produkt null ist. Der letzte Ausdruck ist aber

$$= \sum \alpha_r \beta_r a_r^2 = \alpha_1\beta_1 a_1^2 + \alpha_2\beta_2 a_2^2 + \cdots.$$

191. Es ist

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)|(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)] = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots,$$

wenn $a_1, a_2, \cdots$ ein einfaches Normalsystem bilden.

Beweis. Denn nach 190 ist

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)] = \alpha_1\beta_1 a_1^2 + \alpha_2\beta_2 a_2^2 + \cdots,$$

aber, wenn $a_1, a_2, \cdots$ ein einfaches Normalsystem bilden, so ist $a_1^2 = a_2^2 = \cdots = 1$, also der gefundene Ausdruck

$$= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots.$$

192. Wenn $a_1, a_2, \cdots$ zu einander normal sind, so ist

$$(a_1 + a_2 + \cdots)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots.$$

Beweis aus 190.

193. Es ist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2[a|b] + b^2.$$

Beweis. Es ist

$$(a + b)^2 = [(a + b)|(a + b)]$$
$$= [a|a] + [a|b] + [b|a] + [b|b] \qquad [42],$$

alſo (nach 189)

$$= a^2 + 2[a|b] + b^2.$$

194. Es iſt

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2[b|c] + 2[c|a] + 2[a|b].$$

Beweis wie in 193.

Anm. Die Sätze 192—194 ſtellen, geometriſch gedeutet, den Pythagoräiſchen Lehrſatz nebſt ſeiner Erweiterung für die Ebene wie für den Raum dar.

§. 5. Einführung der Winkel.

195. Unter $\angle AB$ (Winkel AB) verſtehe ich, wenn A und B von gleicher Stufe aber nicht null, und α und β ihre numeriſchen Werthe ſind, denjenigen Winkel zwiſchen 0 und π (dieſe Gränzen mit eingeſchloſſen), deſſen Coſinus gleich dem durch die numeriſchen Werthe dividirten inneren Produkte jener Grössen iſt, d. h. ich ſetze

$$\cos. \angle AB = \frac{[A|B]}{\alpha\beta}, \quad \angle AB = 0 \cdots \pi.$$

Ferner verſtehe ich, wenn a, b, c, $\cdots$ Grössen erſter Stufe ſind, und α, β, γ, $\cdots$ ihre numeriſchen Werthe, unter ſin. (abc $\cdots$) den Ausdruck, welcher numeriſch gleich $\frac{[abc\cdots]}{\alpha\beta\gamma\cdots}$ und nicht negativ iſt, d. h.

$$\text{ſin. (abc}\cdots) \geqq 0 \text{ und numeriſch } = \frac{[abc\cdots]}{\alpha\beta\gamma\cdots},$$

d. h $\text{ſin.}^2(abc\cdots) = \frac{[abc\cdots]^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2\cdots}$.

196. Wenn a, b Grössen erſter Stufe ſind, ſo iſt

$$\text{ſin. (ab)} = \text{ſin. } \angle ab.$$

Beweis. Denn nach 195 iſt

$$\text{ſin.}^2(ab) = \frac{[ab]^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{a^2b^2 - [a|b]^2}{\alpha^2\beta^2} \qquad [177]$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^2 - [a|b]^2}{\alpha^2\beta^2} \qquad [151]$$

$$= 1 - \left[\frac{a|b}{\alpha\beta}\right]^2$$

$$= 1 - \cos.^2 \angle ab \qquad [195]$$

$$= \text{ſin.}^2 \angle ab.$$

Und da nach der Definition ſin. (ab) nie negativ und ∠ab ein Winkel zwiſchen 0 und π, alſo ſin. ∠ab auch nicht negativ iſt, ſo folgt aus ſin. ^{2}(ab) = ſin. ^{2}∠ab, daſs ſin. (ab) = ſin. ∠ab ſei.

197. [A|B] = $\alpha\beta$ cos. ∠AB, wenn A und B von gleicher Stufe und α und β ihre numerischen Werthe ſind.

Beweis aus 195.

198. $[ab]^2 = (\alpha\beta \text{ſin.}\angle ab)^2$, wo α und β die numerischen Werthe von a und b ſind.

Beweis. Nach 177 iſt
$$[ab]^2 = \alpha^2\beta^2 - [a|b]^2$$
$$= \alpha^2\beta^2 - (\alpha\beta \cos.\angle ab)^2 \quad [197]$$
$$= \alpha^2\beta^2(1 - \cos.^2\angle ab)$$
$$= \alpha^2\beta^2 \text{ſin.}^2\angle ab.$$

Anm. In dieſen Formeln tritt der Gegenſatz zwiſchen dem äusseren und inneren Produkte in einfachster Geſtalt hervor. Während das innere Produkt zweier Grössen erſter Stufe gleich dem Produkte der numerischen Werthe in den coſinus des Zwiſchenwinkels iſt, ſo iſt das äussere Produkt derſelben, abgeſehen vom $\mp$ Zeichen, gleich dem Produkte der numerischen Werthe in den ſinus des Zwiſchenwinkels.

199. Es iſt
$$[ab|cd] = \alpha\beta\gamma\delta \text{ſin.}\angle ab \text{ſin.}\angle cd \cos.(\angle ab \cdot cd),$$
wenn α, β, γ, δ die numerischen Werthe von a, b, c, d ſind.

Beweis. Der numeriſche Werth von [ab] iſt $([ab]^2)^{\frac{1}{2}}$ und der von [cd] iſt $([cd]^2)^{\frac{1}{2}}$, alſo iſt (nach 197)
$$[ab|cd] = ([ab]^2[cd]^2)^{\frac{1}{2}} \cos.(\angle ab \cdot cd)$$
$$= [(\alpha\beta \text{ſin.}\angle ab\gamma\delta \text{ſin.}\angle cd)^2]^{\frac{1}{2}} \cos.(\angle ab \cdot cd) \quad [198].$$

Aber da das Produkt $\alpha\beta$ ſin. ∠ab$\gamma\delta$ ſin. ∠cd poſitiv iſt, ſo hebt ſich das fortſchreitende Potenziren dieſer Grösse durch 2 und $\frac{1}{2}$ auf, und es wird
$$[ab|cd] = \alpha\beta\gamma\delta \text{ſin.}\angle ab \text{ſin.}\angle cd \cos.(\angle ab \cdot cd).$$

200. Die normale Zurückleitung von A auf eine Grösse gleicher Stufe B iſt numeriſch gleich A cos. ∠AB.

Beweis. Wenn A′ die normale Zurückleitung von A auf B iſt, ſo iſt (nach 166)
$$A' = \frac{[A|B]B}{\beta^2} = \frac{\alpha\beta \cos.\angle AB \cdot B}{\beta^2} \quad [197]$$
$$= \alpha \cos.\angle AB \cdot \frac{B}{\beta}, \text{ alſo numeriſch} = A \cos.\angle AB.$$

201. Wenn a, b, c,··· zu einander normal sind, so ist für jede aus ihnen numerisch ableitbare Grösse k

$$\frac{k}{\varkappa} = \frac{a}{\alpha}\cos.\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos.\angle bk + \cdots,$$

wo $\varkappa$, α, β,··· die numerischen Werthe von k, a, b,··· sind.

Beweis. Es sei $k = xa + yb + \cdots$, so erhalten wir durch innere Multiplikation mit a, da [b|a] u. s. w. null sind,

$$[a|k] = x[a|a] = x\alpha^2 \qquad [151],$$

also

$$x = \frac{[a|k]}{\alpha^2} = \frac{\alpha\varkappa\cos.\angle ak}{\alpha^2}, \qquad [197]$$

$$= \frac{\varkappa}{\alpha}\cos.\angle ak.$$

Aus gleichem Grunde ist $y = \frac{\varkappa}{\beta}\cos.\angle bk$ u. s. w. Diese Werthe von x, y,··· in die obige Formel eingesetzt, giebt

$$k = \frac{\varkappa}{\alpha}\cos.\angle ak \cdot a + \frac{\varkappa}{\beta}\cos.\angle bk \cdot b + \cdots, \text{ d. h.}$$

$$\frac{k}{\varkappa} = \frac{a}{\alpha}\cos.\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos.\angle bk + \cdots.$$

202. Wenn a, b zu einander normal und k und l aus ihnen numerisch ableitbar sind, so ist

$$\cos.\angle kl = \cos.\angle ak\cos.\angle al + \cos.\angle bk\cos.\angle bl + \cdots.$$

Beweis. Nach 195 ist, wenn $\varkappa$, λ, α, β,··· die numerischen Werthe von k, l, a, b,··· sind,

$$\cos.\angle kl = \frac{[k|l]}{\varkappa\lambda} = \left[\frac{k}{\varkappa}\middle|\frac{l}{\lambda}\right] = \left[\left(\frac{a}{\alpha}\cos.\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos.\angle bk + \cdots\right)\left(\frac{a}{\alpha}\cos.\angle al + \frac{b}{\beta}\cos.\angle bl + \cdots\right)\right] \qquad [201]$$

$$= \frac{a^2}{\alpha^2}\cos.\angle ak\cos.\angle al + \frac{b^2}{\beta^2}\cos.\angle bk\cos.\angle bl + \cdots,$$

weil [a|b] u. s. w. null sind. Da nun $a^2 = \alpha^2$, $b^2 = \beta^2$, u. s. w., so erhält man

$$\cos.\angle kl = \cos.\angle ak\cos.\angle al + \cos.\angle bk\cos.\angle bl + \cdots.$$

Zusatz. Man kann diesen Satz auch so ausdrücken: Statt eine Grösse erster Stufe (k) auf eine andere l zurückzuleiten, kann man jene zuerst auf die Grössen eines Normalsystems zurückleiten und dann die so erhaltenen Zurück-

leitungen auf 1 zurückleiten, und diese letzten Zurückleitungen addiren, vorausgesetzt, dass hierbei alle Zurückleitungen normale sind.

203. Wenn a, b,··· zu einander normal sind, so ist für jedes aus ihnen numerisch ableitbare k

$$1 = \cos.^2\angle ka + \cos.^2\angle kb + \cdots.$$

Beweis. Die Formel geht aus 202 hervor, wenn man $l = k$ setzt.

204. Wenn a, b,··· zu einander normal und k und l aus ihnen numerisch ableitbar und gleichfalls zu einander normal sind, so ist

$$0 = \cos.\angle ak \cos.\angle al + \cos.\angle bk \cos.\angle bl + \cdots.$$

Beweis. Die Formel geht aus 202 hervor, wenn man $\angle lk = 90°$ setzt.

205. Wenn $a + b + \cdots = 0$ ist, und $\alpha, \beta, \cdots$ die numerischen Werthe von a, b,··· sind, so ist

a) $\alpha : \beta : \cdots = \sin.a' : \sin.b' : \cdots,$

wo a', b',·· die zu a, b,··· ergänzenden Kombinationen aus a, b,··· sind,

b) $\alpha \cos.\angle ax + \beta \cos.\angle bx + \cdots = 0,$

wo x eine beliebige Grösse ist,

c) $\sin.a' \cos.\angle ax + \sin.b' \cos.\angle bx + \cdots = 0.$

Beweis 1. Multiplicirt man die Gleichung

$$a + b + \cdots = 0$$

kombinatorisch mit cd····, so erhält man

$$[acd\cdots] + [bcd\cdots] = 0, \text{ also } [acd\cdots]^2 = [bcd\cdots]^2,$$

wo [acd···] das Produkt aller Grössen a, b, c,···, mit Ausnahme von b, und [bcd···] das Produkt aller Grössen, mit Ausnahme von a, ist. Somit ist (nach 195)

$$(\alpha\gamma\delta\cdots)^2 \sin.^2[acd\cdots] + (\beta\gamma\delta\cdots)^2 \sin.^2[bcd\cdots] = 0,$$

oder $$\alpha^2 \sin.^2[acd\cdots] = \beta^2 \sin.^2[bcd\cdots].$$

Nun ist cad··· die ergänzende Kombination zu b, also = b', und bcd··· die ergänzende zu a, also = a', also $\sin.b' = \sin.(cad\cdots)$ und $\sin.a' = \sin.(bcd\cdots)$, also, da $\alpha, \beta, \sin.a', \sin.b'$ positiv sind,

$$\alpha \sin.b' = \beta \sin.a', \text{ d. h. } \alpha : \beta = \sin.a' : \sin.b',$$

und somit allgemein

$$\alpha : \beta : \cdots = \sin.a' : \sin.b : \cdots.$$

2. Multiplicirt man die Gleichung $a + b + \cdots = 0$ innerlich mit einer beliebigen, von null verschiedenen, Grösse erster Stufe x, so erhält man

$$[a|x] + [b|x] + \cdots = 0,$$

also wenn ξ der numerische Werth von x ist, ist

$$\alpha\xi \cos.\angle ax + \beta\xi \cos.\angle bx + \cdots = 0, \text{ d. h.}$$
$$\alpha \cos.\angle ax + \beta \cos.\angle bx + \cdots = 0.$$

3. Substituirt man in die so erhaltene Gleichung die vorher gewonnenen Werthe von $\alpha : \beta : \gamma : \cdots$, so erhält man

$$\sin.a' \cos.\angle ax + \sin.b' \cos.\angle bx + \cdots = 0.$$

Anm. Die entwickelten Formeln haben nur dann eine Bedeutung, wenn zwischen den Grössen a, b, ··· keine andere Beziehung herrscht, als die durch die Gleichung $a + b + \cdots = 0$ dargestellt ist, d. h. wenn die n Grössen a, b, ··· in keinem Gebiete von niederer als $(n-1)$ter Stufe vereinigt sind. Für drei Grössen enthält die erste den bekannten Satz, dass im Dreieck die Seitenlängen sich wie die sinus der Gegenwinkel verhalten.

206—213. Aus den Formeln 172, 175–178, 184, 185 ergeben sich mit Hülfe der angegebenen Winkelbezeichnungen folgende Formeln:

206. $$\sin.\angle AB \cdot \sin.\angle AB \cos.(\angle AB \cdot AB) = \sum \cos.\angle A_r A \cos.\angle B_r B,$$

wo A_r die Kombinationen aus den einfachen Faktoren von [AB], zur so vielten Klasse, als die Stufe von A beträgt, und B_r die ergänzenden Kombinationen sind.

207. $$\sin.(abc\cdots)\sin.(a'b'c'\cdots)\cos.(\angle abc\cdots a'b'c'\cdots) = \text{Determ.} \begin{Bmatrix} \cos.\angle aa', & \cos.\angle ab', \cdots \\ \cos.\angle ba', & \cos.\angle bb', \cdots \\ \vdots & \vdots \end{Bmatrix}$$

208. $$\sin.ab \sin.cd \cos.(\angle ab \cdot cd) = \cos.ac \cos.bd - \cos.bc \cos.ad,$$

und wenn hier a und c statt c und d gesetzt wird

209. $$\sin.ab \sin.ac \cos.(\angle ab \cdot ac) = \cos.bc - \cos.ab \cos.ac,$$

eine bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie, ferner

210. $$\sin.^2 ab = 1 - \cos.^2 ab,$$

was hier als die Transformation von 177 mit aufgeführt ist.

211. $$\sin.^2[abc] = 1 - \cos.^2 bc - \cos.^2 ca - \cos.^2 ab + 2 \cos.bc \cos.ca \cos.ab.$$

212. $\sin.A \sin.B \cos.\angle AB + \sin.A_1 \sin.B_1 \cos.\angle A_1B_1 + \cdots = 0,$

wenn A, $A_1, \cdots$ die Kombinationen aus 2n Grössen erster Stufe zur n-ten Klasse, und B, $B_1, \cdots$ deren Ergänzungen sind.

213. $\sin.ab \sin.cd \cos.(\angle ab \cdot cd) + \sin.ac \sin.bd \cos.(\angle ab \cdot cd) + \sin.ad \sin.bc \cos.(\angle ad \cdot bc) = 0.$

Anm. Ebenso würden sich die übrigen Formeln aus §. 3 haben umgestalten lassen, wenn man noch $\frac{[abcd]}{\alpha\beta\gamma\delta} = \cos.\angle abcd$ gesetzt hätte u. s. w.

214–215. Ferner aus 193, 194 ergiebt sich.

214. $(a + b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta \cos.\angle ab + \beta^2.$

215. $(a + b + c)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos.\angle bc + 2\gamma\alpha \cos.ca + 2\alpha\beta \cos.ab,$

wo α, β, γ die numerischen Werthe von a, b, c sind.

Kap. 5. Anwendungen auf die Geometrie.

§. 1. Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung von Punkten und Strecken.

216. Erklärung. Wenn ein Punkt E und drei gegen einander senkrechte und gleich lange Linien als ursprüngliche Einheiten angenommen sind, und α, α_1, α_2, α_3 beliebige Zahlen sind, so verstehe ich

a) unter

$$E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

den Punkt A, zu welchem man gelangt, indem man von E aus zuerst um eine Strecke EB fortschreitet, welche gleich $\alpha_1 e_1$ ist, d. h. welche mit e_1 gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem α_1 positiv oder negativ ist, und deren Länge sich zu der von e_1 wie α_1 zu 1 verhält, dann von B aus um eine Strecke BC, welche in demselben Sinne gleich $\alpha_2 e_2$, und endlich von C aus um eine Strecke CA, welche in demselben Sinne gleich $\alpha_3 e_3$ ist, fortschreitet,

b) zweitens verstehe ich dann unter

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

eine Strecke, d. h. eine gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung, und zwar diejenige Strecke, welche gleiche

Länge und Richtung hat mit der von E nach dem Punkte $E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ gezogenen geraden Linie,

c) drittens unter

$$\alpha(E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha E + \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3$$

das α-fache des Punktes $E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, und ſetze feſt, dass für alle dieſe Grössen und ihre Verknüpfungen die in Kap. I. gegebenen Bestimmungen, und alſo auch die daraus abgeleiteten Sätze gelten.

Anm. Grössen erster Stufe ſind alſo hier die einfachen und vielfachen Punkte und die Strecken von bestimmter Länge und Richtung. Durch die Erklärungen in §. 1 ist dann die Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung dieſer Grössen bestimmt, und durch die Sätze in §. 1 die Geltung der algebraischen Verknüpfungsgeſetze für ſie nachgewieſen und in den folgenden §§. die beſonderen Eigenschaften, welche ihnen als extenſiven Grössen zukommen. Wir leiten hier zunächst aus dieſen formellen Bestimmungen die Konstruktionen ab, durch welche die Reſultate der verschiedenen Verknüpfungen erfolgen.

217. Wenn $A = E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ ist, ſo ſind $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_1$, $\alpha_3 e_3$ die ſenkrechten Projektionen (normalen Zurückleitungen) von EA auf die 3 von E ausgehenden mit e_1, e_2, e_3 gleichgerichteten Axen.

Beweis folgt unmittelbar aus der Definition.

218. Lehrſatz aus der Geometrie. Gleichgerichtete Strecken, auf dieſelbe gerade Linie ſenkrecht projicirt, liefern gleichgerichtete Projektionen, die ſich ihrer Länge nach wie die projicirten Strecken verhalten; und umgekehrt, wenn die ſenkrechten Projektionen zweier gerader Linien auf drei gegen einander ſenkrechte Axen gleich lang und gleich gerichtet ſind, ſo ſind die projicirten Linien ſelbſt einander gleich lang und gleich gerichtet.

219. Lehrſatz aus der analytischen Geometrie. Wenn A, B, C drei beliebige Punkte einer geraden Linie ſind, und AB, BC, AC durch ein Stück DE dieſer Linie gemessen, beziehlich die Quotienten α, β, γ geben, wobei jeder Quotient poſitiv oder negativ genommen ist, je nachdem die gemessene Linie mit der messenden (DE) gleich oder entgegengeſetzt ist, ſo ist allemal

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

was man auch, der Kürze wegen, schreiben kann

$$AB + BC = AC.$$

220. Mehrere Strecken (von gegebener Richtung und Länge) addirt man, indem man sie, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander legt, d. h. sie so legt, dass wo die eine aufhört, die nächst folgende anfängt, dann ist die gerade Linie vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkte der letzten der gesuchten Summe gleich lang und gleichgerichtet.

Beweis. Erstens für 2 Strecken a und b. Es sei

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

also (nach 6)

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + (\alpha_3 + \beta_3)e_3.$$

Ferner sei $E + a = A$, $E + b = B$, $E + (a + b) = C$, so ist (nach 216) die gerade Linie EA mit a gleich lang und gleichgerichtet, EB mit b, EC mit $a + b$. Endlich sei FG mit EA gleich lang und gleichgerichtet und GH mit EB, so ist zu beweisen, dass FH mit EC gleich lang und gleichgerichtet sei. Da FG mit EA gleich lang und gleichgerichtet ist, so gilt dies (nach 218) auch für ihre Projektionen; nach 217 sind aber die Projektionen von EA gleich und gleichgerichtet mit $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$, somit gilt dies auch von den Projektionen von FG; aus gleichem Grunde sind die Projektionen von GH gleich lang und gleichgerichtet mit $\beta_1 e_1$, $\beta_2 e_2$, $\beta_3 e_3$. Es seien nun F_1, G_1, H_1 die Projektionen von F, G, H auf die von E ausgehende mit e_1 gleichgerichtete Axe, so ist also F_1G_1 mit $\alpha_1 e_1$ gleich lang und gleichgerichtet, G_1H_1 mit $\beta_1 e_1$, d. h. F_1G_1 und G_1H_1 liefern, durch e_1 gemessen, die Quotienten α_1 und β_1, somit liefert (nach 119), da F_1, G_1, H_1 in Einer geraden Linie liegen, F_1H_1, durch e_1 gemessen, den Quotienten $\alpha_1 + \beta_1$, d. h. F_1H_1 ist mit $(\alpha_1 + \beta_1)e_1$ gleich lang und gleichgerichtet. F_1H_1 ist aber die Projektion von FH auf die durch E in der Richtung von e_1 gelegte Axe. Wendet man dieselbe Schlussfolge auch auf die übrigen Axen an, so ergiebt sich, dass die Projektionen von FH gleich lang und gleichgerichtet sind mit $(\alpha_1 + \beta_1)e_1$, $(\alpha_2 + \beta_2)e_2$, $(\alpha_3 + \beta_3)e_3$, d. h. mit den

Projektionen von EC, fomit ist (nach 118) FH mit EC gleich lang und gleichgerichtet, d. h. mit a + b, was zu beweifen war.

Zweitens. Hat man nun mehrere Strecken a, b, c u. f. w., und ist a mit FG, b mit GH, c mit HI, ... u. f. w. gleich lang und gleichgerichtet, fo ist nach dem ersten Theil des Beweifes a + b mit FH gleich lang und gleichgerichtet, alfo auch wieder, da a + b mit FH, und c mit HI gleich lang und gleichgerichtet ist, a + b + c mit FI, u. f. w.

221. Das Produkt einer Strecke a mit einer Zahl α ist wieder eine Strecke (b), welche mit der ersteren (a) gleich oder entgegengefetzt gerichtet ist, je nachdem die Zahl α pofitiv oder negativ ist, und deren Länge fich zu der von a, wie α zu 1 verhält.

Beweis. Es feien E, e_1, e_2 e_3 als Einheiten genommen, und fei

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \text{ fo ist}$$
$$b = \alpha a = \alpha(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)$$
$$= \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3.$$

Der letzte Ausdruck bedeutet aber (nach 216) eine Strecke, welche gleiche Länge und Richtung hat mit der von E nach dem Punkte $B = E + \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3$ gezogenen geraden Linie EB. Die Projektionen diefer Linie auf die 3 von E ausgehenden mit e_1, e_2, e_3 parallelen Axen find (nach 217) $\alpha\alpha_1 e_1$, $\alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3$. Ebenfo ist $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ eine Strecke, die gleiche Länge und Richtung mit der von E nach dem Punkte $A = E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ gezogenen Linie hat, und $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$ find die Projektionen von EA auf die genannten 3 Axen. Ist nun zuerst α pofitiv, fo find $\alpha\alpha_1 e_1$, $\alpha\alpha_2 e_2$, $\alpha\alpha_3 e_3$ beziehlich mit $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$ gleichgerichtet, und verhalten fich zu ihnen wie $\alpha : 1$, alfo gilt dasfelbe (nach 218) auch für die projicirten Linien, d. h. EB ist mit EA gleichgerichtet, und feine Länge verhält fich zu der von EA, wie $\alpha : 1$; da nun b mit EB und a mit EA gleiche Länge und Richtung hat, fo find auch a und b einander gleichgerichtet, und verhalten fich ihrer Länge nach, wie $1 : \alpha$.

Ist aber α negativ $= -\beta$, fo find $\alpha\alpha_1 e_1$, $\alpha\alpha_2 e_2$, $\alpha\alpha_3 e_3$, d. h. $-\beta\alpha_1 e_1$, $-\beta\alpha_2 e_2$, $-\beta\alpha_3 e_3$, die Projektionen von EB,

und ſind (nach 216) denen von EA, nämlich $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$ entgegengeſetzt gerichtet, ſomit ſind die von BE, nämlich $\beta\alpha_1 e_1$, $\beta\alpha_2 e_2$, $\beta\alpha_3 e_3$, mit denen von EA gleichgerichtet, und ihre Längen verhalten ſich, wie $\beta : 1$, alſo ſind auch BE und EA gleichgerichtet, und verhalten ſich, wie $\beta : 1$, alſo ſind EB und EA und ebenſo alſo auch b und a einander entgegengeſetzt gerichtet, während ihre Längen ſich noch wie $1 : \beta$ verhalten.

222. Die Summe $\alpha A + \beta B + \cdots$, in welcher A, B, $\cdots$ Punkte, α, β, $\cdots$ Zahlen ſind, iſt eine Strecke oder ein vielfacher Punkt, je nachdem $\alpha + \beta + \cdots$ gleich oder ungleich Null iſt, und zwar iſt im erſten Falle

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots,$$

im zweiten

$$\alpha A + \beta B + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots)S,$$

wo $$S - R = \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\alpha + \beta + \cdots},$$

und R ein beliebiger Punkt iſt.

Beweis. Es iſt

$$A = R + A - R, \quad B = R + B - R.$$

Setzt man dieſe Werthe in den Ausdruck $\alpha A + \beta B + \cdots$ ein, ſo erhält man

$$\alpha A + \beta B + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots)R + \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots.$$

Alſo erſtens, wenn $\alpha + \beta + \cdots = 0$ iſt,

$$= \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots.$$

Iſt hingegen $\alpha + \beta + \cdots$ von Null verſchieden, etwa gleich σ, ſo wird

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta B + \cdots &= \sigma R + \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots \\ &= \sigma\left(R + \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\sigma}\right) \\ &= \sigma S, \end{aligned}$$

wenn $$S = R + \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\sigma},$$

d. h. $$S - R = \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\sigma}$$

geſetzt iſt.

Zuſatz. Wenn A und B Punkte ſind, ſo iſt $A - B$ die

Strecke, welche mit der geraden Linie BA gleich lang und gleichgerichtet ist.

Beweis. Nach 218 ist A — E eine Strecke, welche gleich lang und gleichgerichtet ist mit der geraden Linie EA und B — E eine mit EB gleich lange und gleichgerichtete Strecke; nun ist

$$A-B=(A-E)-(B-E), \text{ alſo}$$
$$=(A-E)+(E-B)=(E-B)+(A-E).$$

Da nun E — B und A — E Strecken ſind, die mit BE und EA beziehlich gleich lang und gleichgerichtet ſind, ſo ist ihre Summe (nach 220) mit BA gleich lang und gleichgerichtet, d. h. A — B mit BA.

Anm. Hierdurch ſind alſo die Strecken auf Differenzen von Punkten zurückgeführt, und ihre durch stetiges Aneinanderlegen gebildete Summe stellt ſich als eine Summe ſolcher Differenzen dar, in denen ſich der Endpunkt jeder Strecke mit dem Anfangspunkte der nächst folgenden aufhebt.

223. Wenn man von einem beweglichen Punkte (R) nach einer Reihe fester Punkte (A, B, ···) gerade Linien zieht, und dieſe, nach konstanten Verhältnissen ($1:\alpha$, $1:\beta$, ···) ändert (ſo dass dadurch die Linien RA′, RB′, ··· hervorgehen, welche mit RA, RB, ··· beziehlich gleich oder entgegengeſetzt gerichtet ſind, je nachdem α, β, ·· poſitiv oder negativ ſind, und ſich ihrer Länge nach zu RA, RB, ··· verhalten wie die Zahlen α, β, ·· zur Einheit), und dann die ſo erhaltenen Linien (RA′, RB′, ···), ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig aneinander legt, ſo hat die Linie (RP) vom Anfangspunkt (R) der ersten zum Endpunkt (P) der letzten folgende Eigenschaft,

1) wenn die Summe der Verhältnisszahlen (α, β, ··) null ist, ſo ist dieſe Linie [RP] von konstanter Länge und Richtung,

2) wenn die Summe der Verhältnisszahlen ungleich null ist, ſo geht dieſe Linie (RP) durch einen festen Punkt (S), welcher von dieſer Linie (RP) den ſo vielten Theil abschneidet, als jene Summe ($\alpha+\beta+\cdots$) beträgt.

Beweis. Der Satz ist nur ein anderer Wortausdruck von 222.

Anm. Der Punkt S ist bekanntlich der Schwerpunkt zwischen den Punkten A, B, ···, wenn deren Gewichte ſich wie $\alpha:\beta:\cdots$ verhalten; hier wird er naturgemäss den Namen Summenpunkt führen.

224. Der Summenpunkt S der Summe $\alpha A + \beta B + \cdots$, in welcher $\alpha + \beta + \cdots \gtrless 0$ ist, hat die Eigenschaft, dass

$$\alpha(A - S) + \beta(B - S) + \cdots = 0$$

ist; und kein zweiter Punkt besitzt diese Eigenschaft.

Beweis. Denn setzt man in 222b. den Punkt $R = S$, so wird

$$S - S = \frac{\alpha(A - S) + \beta(B - S) + \cdots}{\alpha + \beta + \cdots},$$

d. h. $$0 = \alpha(A - S) + \beta(B - S) + \cdots.$$

Soll diese Gleichung noch für einen zweiten Punkt R gelten, also

$$0 = \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots$$

sein, so erhält man durch Subtraktion

$$0 = \alpha(R - S) + \beta(R - S) + \cdots$$
$$= (\alpha + \beta + \cdots)(R - S),$$

also, da $\alpha + \beta + \cdots$ (nach Hyp.) ungleich null ist,

$$0 = R - S,$$

also $R = S$, d. h. es giebt keinen zweiten von S verschiedenen Punkt, der jene Eigenschaft hat.

225. Die Summe zweier einfachen Punkte ist gleich ihrer doppelten Mitte, und die Summe zweier vielfachen Punkte ist, wenn die Koefficienten gleich bezeichnet sind, ein vielfacher Punkt, dessen Koefficient die Summe der Koefficienten der Summanden ist, und dessen Ort zwischen den Orten der Summanden so liegt, dass er von ihnen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Koefficienten absteht, hingegen wenn die Koefficienten entgegengesetzt bezeichnet und numerisch nicht gleich sind, ein vielfacher Punkt, dessen Koefficient die algebraische Summe der Koefficienten der Summanden ist, und dessen Ort in der Verlängerung der geraden Linie, welche die Orte der Summanden verbindet, so liegt, dass er von diesen Orten im umgekehrten Verhältnisse ihrer Koefficienten absteht.

Beweis liegt unmittelbar in 222.

226. Die Summe eines einfachen Punktes und einer Strecke ist der Endpunkt der geraden Linie, welche dieser Strecke gleich lang und gleichgerichtet ist, und deren Anfangspunkt der gegebene Punkt ist.

Beweis. Es sei die gerade Linie AB gleich lang und gleichgerichtet mit der Strecke p, so ist (nach 222 Zus.)

$$B - A = p.$$

Also $$A + p = A + B - A = B.$$

227. Die Summe eines α-fachen Punktes (αA) und einer Strecke (p) ist der α-fache Endpunkt einer geraden Linie (AB), deren α-faches mit dieser Strecke (p) gleich lang und gleichgerichtet und deren Anfangspunkt (A) der gegebene Punkt ist.

Beweis. $\alpha A + p = \alpha\left(A + \frac{p}{\alpha}\right)$, also wenn das α-fache von AB mit p gleich lang und gleichgerichtet ist, also AB mit $\frac{p}{\alpha}$, so ist

$$B - A = \frac{p}{\alpha},$$

und also $\alpha A + p = \alpha(A + B - A) = \alpha B$.

Anm. Die Addition der Punkte ist zuerst (1827) von Moebius in seinen barycentrischen Kalkül gelehrt worden. Die Addition der Strecken scheint zuerst von Bellavitis in mehreren Aufsätzen (1835, 1837) der Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto veröffentlicht zu sein. Ganz unabhängig davon ist die Bearbeitung meiner Ausdehnungslehre von 1844 (§. 24, §. 101—102), in welcher auch zuerst der Zusammenhang zwischen beiden Additionen ans Licht gestellt ist. Es fehlt jedoch sowohl in jenen Werken als auch in diesem der Nachweis, dass es keine andere Addition der Punkte und Strecken giebt, als die hier angegebene, und dennoch erscheint dieser Nachweis nothwendig, wenn jene Addition als eine wirkliche Addition jener Grössen, und nicht blos als eine abgekürzte Schreibart aufgefasst werden soll, wie letzteres Moebius will. Es ist daher zu zeigen, dass der allgemeine Begriff der Addition, wenn er ins Besondere auf Punkte (oder auch auf Strecken von gegebener Länge und Richtung) angewandt werden soll, keine andere als die oben dargestellte Addition liefern kann. Zu dem Ende ist zunächst die allgemeine Bestimmung festzuhalten, dass keine Verknüpfung geometrischer Gegenstände als solche an einen bestimmten Ort im Raume gebunden sein darf; oder, um diese Bestimmung rein mathematisch auszudrücken: „Alle Verknüpfungen räumlicher Grössen müssen von der Art sein, dass jede Gleichung, welche zwischen einem Verein von Punkten statt findet, auch bestehen bleiben muss, wenn man statt dieser Punkte die entsprechenden Punkte eines kongruenten Vereines setzt.“ Die Addition und Subtraktion ist nun dadurch bestimmt, dass erstens die 4 Grundformeln

1) $a + b = b + a$,
2) $a + (b + c) = a + b + c$,
3) $a + b - b = a$,
4) $a - b + b = a$

gelten; und dass ausserdem die durch die Verknüpfung entstehenden Grössen in möglichst weitem Umfang von gleicher Gattung sein müssen, wie die verknüpften. Diese letztere Bestimmung muss noch individualisirt werden. Da nach der dritten Grundformel, auch wenn A und B Punkte sind,

$$A + B - B = A,$$

also ein Punkt, und nach der ersten und dritten

$$A + B - A = B,$$

also auch ein Punkt ist, so liegt die Annahme nahe, dass auch $A + B - C$ als Punkt zu setzen ist. Doch genügt es, diese Annahme nur für den Fall zu machen, dass C die Mitte zwischen A und B ist. Wir machen also, um der angeführten Bestimmung zu genügen, die Annahme, „dass wenn C die Mitte zwischen den Punkten A und B ist, allemal $A + B - C$ wieder ein Punkt sei." Hiermit sind die nothwendigen Annahmen erschöpft. Zunächst folgt aus dem Gelten der 4 Grundformeln das Gelten aller allgemeinen Additions- und Subtraktionsgesetze. Demnächst beweise ich, dass, wenn der Punkt C die Mitte zwischen den Punkten A und B ist, $A + B - C = C$ sei. Es sei $A + B - C = X$ gesetzt, so kann X nicht von C verschieden sein. Denn angenommen, X wäre von C verschieden, so verlängere man XC um sich selbst bis Y, so dass $XC = CY$ wird. Dreht man nun die Figur, welche die Punkte A, B, C, X enthält, innerhalb einer Ebene, in welcher diese Figur liegt, um den Punkt C herum, bis sie einen Winkel von 180° beschrieben hat, so fällt nun A dahin, wo vorher B, B dahin, wo vorher A lag, und X fällt auf Y, d. h. der Verein A, B, C, X ist kongruent dem Vereine B, A, C, Y. Da nun nach der Annahme

$$A + B - C = X$$

war, so muss nach der obigen Bedingung, welcher alle geometrischen Verknüpfungen unterliegen, diese Gleichung auch noch bestehen bleiben, wenn man statt A, B, C, X beziehlich B, A, C, Y setzt, also

$$B + A - C = Y.$$

Also hat man

$$Y = B + A - C = A + B - C \text{ (nach Grundformel 1)}$$
$$= X \text{ (nach Annahme)},$$

also $Y = X$. Es entstand aber Y aus X dadurch, dass man XC um sich selbst verlängerte bis Y; soll also Y mit X zusammen fallen, so muss X in C fallen, d. h. es ist $X = C$, also $A + B - C = C$.

Bringt man in dieser Gleichung C auf die rechte Seite, so erhält man

$$A + B = 2C,$$

d. h. „die Summe zweier Punkte ist das Doppelte des in der Mitte

zwischen beiden liegenden Punktes.“ Es seien nun AB und CD zwei beliebige gerade Linien von gleicher Länge und Richtung, so ist das Viereck ABDC ein Parallelogramm. Die Diagonalen mögen sich in E schneiden. Da nun die Diagonalen eines Parallelegramms sich halbiren, so ist E sowohl die Mitte zwischen A und D, als auch zwischen B und C, d. h. es ist

$$A + D = 2E = B + C, \text{ also } A + D = B + C.$$

Bringt man in dieser letzten Gleichung D und B auf die andere Seite, so erhält man

$$A - B = C - D.$$

Umgekehrt, wenn diese letzte Gleichung gilt, so gilt auch die vorhergehende $A + D = B + C$, d. h. die Mitte zwischen A und D muss zugleich Mitte zwischen B und C sein, d. h. das Viereck ABDC muss ein Parallelogramm, also AB mit CD gleich lang und gleichgerichtet sein. Daraus folgt der Satz: „Eine Differenz $A - B$ zweier Punkte ist einer Differenz $C - D$ zweier anderer Punkte dann und nur dann gleich, wenn AB und CD gleich lange und gleichgerichtete Linien sind.“ Nennt man der Kürze wegen die Differenz $A - B$ oder $-B + A$ eine Strecke, B ihren Anfangspunkt, A ihren Endpunkt, so folgt sogleich der Satz: „Strecken (von gegebener Richtung und Länge) addirt man, indem man sie (ohne ihre Richtung und Länge zu verändern) stetig, d. h. so aneinander legt, dass der Endpunkt einer jeden mit dem Anfangspunkte der nächstfolgenden zusammen fällt, dann ist die Strecke, welche den Anfangspunkt der ersten Strecke zu ihrem Anfangspunkt und den Endpunkt der letzten zu ihrem Endpunkte hat, die Summe, jener Strecken.“ Denn in der That, es sei z. B. die erste Strecke gleich $-A + B$, die zweite gleich $-B + C$, die dritte gleich $-C + D$, so ist die Summe $= -A + B - B + C - C + D = -A + D$, was zu beweisen war.

Für die Division einer Strecke durch eine ganze positive Zahl ist noch die Bestimmung zu machen, dass der Quotient wieder eine Strecke sei (wobei unter Strecke hier immer die Differenz zweier Punkte, also eine Strecke von gegebener Länge und Richtung verstanden ist). Dann folgt nach der bekannten Schlussweise, dass das Produkt einer Strecke in eine beliebige ganze oder gebrochene rationale oder irrationale Zahl a wieder eine Strecke ist, welche der gegebenen gleichgerichtet oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem a positiv oder negativ ist, und deren Länge sich zu der Länge der gegebenen Linie wie a zu 1 verhält. Hierdurch löst sich dann die allgemeine Aufgabe, die Summe $aA + bB + \cdots$ zu finden, wo a, b, $\cdots$ Zahlgrössen, A, B, $\cdots$ Punkte sind. Nämlich für jeden beliebigen Punkt R ist

$$aA + bB + \cdots = (a + b + \cdots) R + a(A - R) + b(B - R) + \cdots.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem $a + b + \cdots$ null ist, oder nicht. Im ersteren Falle wird

$$aA + bB + \cdots = a(A - R) + b(B - R) + \cdots,$$

alſo gleich einer Strecke, welche nach dem Obigen konſtruirbar iſt. Zweitens wenn $a + b + \cdots = s \gtrless 0$ iſt, ſo wird

$$aA + bB + \cdots = sR + a(A - R) + b(B - R) + \cdots.$$

Hier iſt $a(A - R) + b(B - R) + \cdots$ eine Strecke; der s-te Theil dieſer Strecke ſei ſo gelegt, dass R ſein Anfangspunkt iſt; dann ſei ſein Endpunkt mit S bezeichnet, ſo iſt

$$a(A - R) + b(B - R) + \cdots = s(S - R).$$

Dieſer Werth in die obige Gleichung eingeſetzt, giebt

$$\begin{aligned} aA + bB + \cdots &= sR + s(S - R) \\ &= s(R + S - R) \\ &= sS, \end{aligned}$$

wodurch die Aufgabe vollſtändig gelöst, und der Begriff der Addition einfacher und vielfacher Punkte und Strecken vollkommen bestimmt iſt, und zwar in Harmonie mit den im Haupttexte gegebenen Beſtimmungen.

§. 2. Räumliche Gebiete.

228. Erklärung. Unter einem unendlich entfernten Punkte ſeien die Richtungen einer geraden Linie, unter einer unendlich entfernten geraden Linie die ſämmtlichen Richtungen einer Ebene, unter einer unendlich entfernten Ebene die ſämmtlichen Richtungen des Raumes verſtanden, d. h. es ſei von zwei parallelen geraden Linien geſagt, dass ſie einen unendlich entfernten Punkt gemein haben, von zwei parallelen Ebenen, dass ſie eine unendlich entfernte gerade Linie gemein haben, und von allen unendlich entfernten Punkten und geraden Linien, dass ſie in einer unendlich entfernten Ebene liegen.

Um die räumlichen Grössen erster Stufe, d. h. die einfachen oder vielfachen Punkte und die Strecken (von gegebener Länge und Richtung) auf gleiche Weiſe behandeln zu können, will ich ſagen, der Ort einer Strecke ſei der unendlich entfernte Punkt, welchen die dieſer Strecke parallelen Linien gemein haben, oder auch, es ſei jene Strecke eine Grösse erster Stufe, welche in dieſen Linien in unendlicher Entfernung liege. Auch will ich der Einfachheit wegen, um den Ausdruck räumliche Grössen erster Stufe durch einen einfacheren zu erſetzen, ſowohl die einfachen und vielfachen

Punkte als auch die Strecken kurzweg Punkte nennen, und zwar die letzteren unendlich entfernte.

Anm. Zum Wesen der räumlichen Grössen, wie der Grössen überhaupt, gehört ein bestimmter metrischer Werth, vermöge dessen sie (in bestimmten Verhältnissen) vermehrt oder vermindert werden können. Dieser wird bei den einfachen und vielfachen Punkten durch den Zahlkoefficienten dargestellt, bei den Strecken durch ihre Länge. Es würde an sich noch möglich sein, unendlich entfernte Punkte anzunehmen, deren metrischer Werth nicht durch die Länge einer Strecke, sondern durch einen Zahlkoefficienten dargestellt wäre, d. h. welche aus dem vielfachen Punkte αA dadurch hervorginge, dass man, ohne α zu ändern, den Punkt A ins Unendliche verlegte. Allein was dadurch hervorginge, würde, wie man leicht sieht, ganz den Charakter des Unendlichen an sich tragen, insofern es durch Hinzufügung einer endlichen Grösse (eines endlich entfernten Punktes, oder auch einer Strecke) gar nicht verändert würde. Mit solchem Unendlichen darf aber überhaupt gar nicht gerechnet werden, weil kein algebraisches Gesetz für das Unendliche gilt, und die Analysis des Unendlichen überhaupt nur dann zu richtigen Resultaten führen kann, wenn man das Falsche, was man durch Annahme des Unendlichen hineingebracht hat, noch vor der Ableitung irgend eines Resultates wieder herausschafft. Die Strecke dagegen, obgleich man sich der Bequemlichkeit wegen den Ausdruck gestatten darf, dass ihr Ort unendlich entfernt sei, ist doch eine endliche Grösse, indem sie durch Hinzufügung jeder von Null verschiedenen Grösse sich ändert.

229. Alle Strecken des Raumes lassen sich aus beliebigen 3 Strecken, welche nicht Einer Ebene parallel sind, numerisch ableiten.

Beweis. Es seien a, b, c drei Strecken, welche nicht einer Ebene parallel sind, und e eine beliebige Strecke, von der gezeigt werden soll, dass sie aus a, b, c numerisch ableitbar ist. Man ziehe von einem beliebigen Punkte D die mit a, b, c, e, gleich langen und gleichgerichteten Linien DA, DB, DC, DE, so ist (nach 222 Zus.) $A - D = a$, $B - D = b$, $C - D = c$, $E - D = e$. Ferner ziehe man durch E die Parallele mit DC, welche die Ebene ABD in F treffe, durch F die Parallele mit DB, welche DA in G treffe, so ist $DG \| DA$, $GF \| DB$, $FE \| DC$. Es möge sich $DG : DA = \alpha : 1$, $GF : DB = \beta : 1$, $FE : DC = \gamma : 1$ algebraisch (d. h. auch dem Vorzeichen nach) verhalten, so ist (nach 221)

$$G - D = \alpha(A - D) = \alpha a,$$
$$F - G = \beta(B - D) = \beta b,$$
$$E - F = \gamma(C - D) = \gamma c.$$

Alſo addirt

$$E - D = \alpha a + \beta b + \gamma c, \text{ d. h. } e = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

230. Alle Strecken einer Ebene laſſen ſich aus beliebigen 2 einander nicht parallelen Strecken der Ebene numeriſch ableiten.

Beweis. Es ſeien a, b zwei nicht parallele Strecken einer Ebene und d eine beliebige Strecke der Ebene, von der gezeigt werden ſoll, daſs ſie aus a und b numeriſch ableitbar iſt. Man ziehe von einem beliebigen Punkte C der Ebene die mit a, b, d gleich langen und gleichgerichteten Linien CA, CB, CD, ziehe durch D eine Parallele mit CB, welche CA in E treffen, ſo iſt $CE \| CA$, $ED \| CB$. Es verhalte ſich algebraiſch $CE : CA = \alpha : 1$, $ED : CB = \beta : 1$, ſo iſt nach

$$E - C = \alpha(A - C) = \alpha a,$$
$$D - E = \beta(B - C) = \beta b,$$

alſo

$$D - C = \alpha a + \beta b, \text{ d. h. } d = \alpha a + \beta b.$$

231. Wenn zwiſchen 3 Strecken eine Zahlbeziehung herrſcht, ſo ſind ſie Einer Ebene parallel.

Beweis. Es ſeien a, b, c die 3 Strecken und

$$c = \alpha a + \beta b$$

ihre Zahlbeziehung. Sollten a und b parallel ſein, ſo würde auch c ihnen parallel ſein, und es alſo unendlich viele Ebenen geben, mit welchen a, b, c zugleich parallel ſind. Iſt a nicht parallel b, ſo ziehe man von einem beliebigen Punkte D eine Linie DA, welche mit a parallel iſt und ſich zu a verhält wie $\alpha : 1$, und von A eine Linie AB, welche mit b parallel iſt und ſich zu b verhält wie $\beta : 1$, ſo iſt

$$A - D = \alpha a,$$
$$B - A = \beta b.$$

Alſo addirt

$$B - D = \alpha a + \beta b = c.$$

Folglich iſt c eben ſo wie a und b der Ebene ABD parallel.

232. Alle Punkte des Raumes lassen sich numerisch ableiten aus beliebigen 4 Punkten, welche nicht in Einer Ebene liegen; ins Besondere

a) aus einem endlich entfernten Punkte und drei nicht Einer Ebene parallelen Strecken,

b) aus 2 endlich entfernten, nicht zusammenfallenden Punkten und 2 Strecken, welche nicht einer durch jene 2 Punkte gelegten Ebene parallel sind,

c) aus 3 endlich entfernten Punkten, die nicht in Einer geraden Linie liegen und aus einer Strecke, die der durch die 3 Punkte gelegten Ebene nicht parallel ist,

d) aus 4 endlich entfernten Punkten, die nicht in Einer Ebene liegen.

Beweis a. Es seien a, b, c drei nicht Einer Ebene parallele Strecken und $d' = \delta D$ ein endlich entfernter Punkt, D sein Ort und $e' = \varepsilon E$ ein beliebiger endlich entfernter Punkt und E sein Ort; und sei zu zeigen, dass e' aus a, b, c, d' numerisch ableitbar sei. Nach 229 ist die Strecke E — D aus a, b, c numerisch ableitbar; es sei

$$E - D = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

so ist

$$E = D + \alpha a + \beta b + \gamma c, \text{ d. h. } \frac{e'}{\varepsilon} = \frac{d'}{\delta} + \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

also

$$e' = \frac{\varepsilon}{\delta} d' + \varepsilon\alpha a + \varepsilon\beta b + \varepsilon\gamma c,$$

d. h. e' aus a, b, c, d' numerisch ableitbar. Ist der abzuleitende Punkt ein unendlich entfernter, d. h. eine Strecke, so ist diese (nach 229) schon aus a, b, c, also auch aus a, b, c, d' numerisch ableitbar. $(= \alpha a + \beta b + \gamma c + 0d)$.

b. Es seien a, b zwei Strecken, $c' = \gamma C$, $d' = \delta D$ zwei endlich entfernte Punkte, C und D ihre Orte, und sei vorausgesetzt, dass sich durch C und D keine mit a und b parallele Ebene legen lasse. Man setze C — D = c, so sind a, b, c 3 nicht Einer Ebene parallele Strecken, folglich jeder Punkt e' (nach Beweis a) aus a, b, c, d' numerisch ableitbar. Setzt man in den Ausdruck dieser Ableitung statt c seinen Werth

$C - D$, d. h. $\frac{c'}{\gamma} - \frac{d'}{\delta}$, so erhält man einen Ausdruck, durch welchen e' aus a, b, c', d' numerisch abgeleitet ist.

c) Es sei a eine Strecke, $b' = \beta B$, $c' = \gamma C$, $d' = \delta D$ 3 endlich entfernte Punkte, B, C, D ihre Orte, und sei vorausgesetzt, dass a nicht mit der Ebene BCD parallel sei. Man setze $B - D = b$, so ist (nach Beweis b) jeder Punkt e' aus a, b, c', d' numerisch ableitber. Setzt man in dem Ausdrucke dieser Ableitung statt b seinen Werth $B - D$, d. h. $\frac{b'}{\beta} - \frac{d'}{\delta}$, so erhält man einen Ausdruck, durch welchen e' aus a, b', c', d' numerisch abgeleitet ist.

d) Es seien $a' = \alpha A$, $b' = \beta B$, $c' = \gamma C$, $d' = \delta D$ vier endlich entfernte Punkte, A, B, C, D ihre Orte, und sei vorausgesetzt, dass diese Punkte nicht in einer Ebene liegen. Man setzte $A - D = a$, so ist (nach Beweis c) jeder Punkt e' aus a, b', c', d' numerisch ableitbar. Setzt man in dem Ausdrucke dieser Ableitung statt a seinen Werth $\frac{a'}{\alpha} - \frac{d'}{\delta}$, so erhält man einen Ausdruck, durch welchen e' aus a', b', c', d' numerisch abgeleitet ist.

Anm. Das erste der 4 im Satze bezeichneten Ableitungssysteme ist, wenn die 3 Strecken gleich lang sind, das gewöhnliche Parallelkoordinatensystem, das letzte ist, wenn die Punkte einfach sind, das barycentrische von Möbius, wenn sie beliebig sind, das allgemeinste lineale Koordinatensystem, wie es von Plücker und anderen behandelt ist.

233. Alle Punkte der Ebene lassen sich aus beliebigen 3 nicht in gerader Linie liegenden Punkten derselben numerisch ableiten.

Beweis wie in 232.

234. Alle Punkte der geraden Linie lassen sich aus beliebigen zwei räumlich verschiedenen Punkten derselben numerisch ableiten.

Beweis wie in 232.

235. Wenn 3 Punkte in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so liegen sie in einer geraden Linie.

Beweis. Es seien a, b, c die 3 Punkte, und

$$a = \beta b + \gamma c$$

ihre Zahlbeziehung. Sind b und c unendlich entfernt, so ist (in 231) gezeigt, dass dann a, b, c drei Einer Ebene parallele Strecken sind, d. h. (nach 228) dass a, b, c unendlich entfernte Punkte sind, die in Einer unendlich entfernten Ebene liegen. Sind hingegen b und c nicht beide zugleich unendlich entfernt, so verbinde man sie durch die gerade Linie DE, und nehme D und E als zwei einfache, endlich entfernte Punkte dieser geraden Linie an. Dann sind (nach 234) b und c, da sie in der durch D und E gelegten geraden Linie liegen, aus D und E numerisch ableitbar, also auch $a = \beta b + \gamma c$. Es sei $a' = \delta D + \varepsilon E$. Ist nun $\delta + \varepsilon = 0$, also $\varepsilon = -\delta$, so ist $a = \delta(D - E)$. Aber $\delta(D - E)$ ist eine mit DE parallele Strecke, d. h. ein unendlich entfernter Punkt der Linie DE, also liegen dann a, b, c in DE. Ist aber $\delta + \varepsilon = \sigma$, von Null verschieden, so ist

$$a = \delta D + \varepsilon E = \sigma D + \varepsilon(E - D),$$

d. h. $a = \sigma A$, wo $A = D + \frac{\varepsilon}{\sigma}(E - D)$ ist, d. h. $D - A = \frac{\varepsilon}{\sigma}(E - D)$. Also ist $D - A$ mit $E - D$ parallel, d. h. A ein Punkt der Linie DE, also auch in diesem Falle b, c, d in einer geraden Linie.

Anm. Der letzte Theil des Beweises thut nur dar, dass der Schwerpunkt zweier Punkte mit beliebigen Gewichten in der diese Punkte verbindenden geraden Linie liegt.

236. Wenn 4 Punkte in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so liegen sie in Einer Ebene.

Beweis. Es seien a, b, c, d 4 Punkte und

$$a = \beta b + \gamma c + \delta d$$

die Zahlbeziehung. Sind zuerst b, c, d alle drei zugleich unendlich entfernt, so ist zu zeigen, dass a in der unendlich entfernten Ebene liegt, d. h. auch unendlich entfernt, d. h. eine Strecke sei. Dies folgt aus 228, da dann b, c, d also auch ihre Vielfachen Strecken sind, und somit auch (nach 220) ihre Summe. Sind b, c, d nicht alle drei zugleich unendlich entfernt, so sei DEF die durch sie gelegte Ebene und D, E,

F drei einfache, endlich entfernte Punkte dieſer Ebene. Dann laſſen ſich (nach 233) b, c, d aus D, E, F numeriſch ableiten, alſo auch $\beta b + \gamma c + \delta d$, d. h. a. Es ſei

$$a = \delta D + \varepsilon E + \zeta F.$$

Iſt zuerſt $\delta + \varepsilon + \zeta = 0$, ſo iſt

$$a = \delta D + \varepsilon E + \zeta F - (\delta + \varepsilon + \zeta)D = \varepsilon(E - D) + \zeta(F - D),$$

alſo a aus E — D und F — D numeriſch ableitbar, d. h. (nach 231) die Strecken a, D — E und F — D ſind Einer Ebene parallel, folglich iſt a der Ebene DEF parallel, d. h. ein unendlich entfernter Punkt dieſer Ebene.

Iſt $\delta + \varepsilon + \zeta = \sigma$ ungleich null, ſo iſt

$$a = \delta D + \varepsilon E + \zeta F = \sigma D + \varepsilon(E - D) + \zeta(F - D)$$

$$= \sigma A, \text{ wenn } A = D + \frac{\varepsilon}{\sigma}(E - D) + \frac{\zeta}{\sigma}(F - D)$$

iſt, alſo iſt D — A (nach 231) mit der Ebene DEF parallel, d. h. A ein Punkt der Ebene DEF, alſo auch a ein Punkt dieſer Ebene.

237. Das räumliche Gebiet erſter Stufe iſt ein Punkt (als Ort betrachtet), das zweiter Stufe eine unbegränzte gerade Linie, das dritter Stufe eine unbegränzte Ebene, das vierter Stufe der unbegränzte Raum.

Beweis. Ein Gebiet n-ter Stufe iſt (nach 14) die Geſammtheit der Grössen, welche aus n Grössen numeriſch ableitbar ſind, vorausgeſetzt, dass jene Grössen ſich nicht ſämmtlich aus weniger als n Grössen numeriſch ableiten laſſen. Nun ſind (nach 232) alle Punkte des Raumes aus vier Grössen erſter Stufe numeriſch ableitbar; nach 236 bilden die aus drei ſolcher Grössen ableitbaren Punkte eine Ebene, folglich laſſen ſich die Punkte des Raumes nicht aus weniger als 4 Grössen erſter Stufe ableiten. Alſo iſt der Raum ein Gebiet 4-ter Stufe. Ebenſo folgt aus 233 und aus 235, dass das Gebiet 3-ter Stufe eine Ebene, und aus 234 und daraus, dass aus einem Punkt nur örtlich identiſche Punkte ableitbar ſind, folgt, dass das Gebiet 2-ter Stufe eine gerade Linie, ſo wie das Gebiet erſter Stufe ein Punkt ſei.

238. Aufgabe. Die Ableitzahlen (Koordinaten), durch welche ein Punkt (p) aus 4 nicht in einer Ebene liegenden

Punkten (a, b, c, d) hervorgeht, auszudrücken durch die Ableitzahlen, durch welche derfelbe Punkt (p) aus 4 neuen Punkten a', b', c', d' ableitbar ist; vorausgefetzt, dass diefe 4 neuen Punkte durch die 4 alten ausgedrückt find.

Auflöfung. Es fei

1) $a' = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$,
2) $b' = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c + \delta' d$,
3) $c' = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c + \delta'' d$,
4) $d' = \alpha''' a + \beta''' b + \gamma''' c + \delta''' d$,
5) $p = x' a + y' b + z' c + u' d$,
6) $p = x a' + y b' + z c' + u d'$.

Man fetze in 6) für a', b', c', d', p die Werthe aus 1) bis 5) fo erhält man, nach a, b, c, d geordnet,

7) $x'a + y'b + z'c + u'd$
$= (x\alpha + y\alpha' + z\alpha'' + u\alpha''')a + (x\beta + y\beta' + z\beta'' + u\beta''')b \cdots$.

Da hier a, b, c, d nicht in einer Ebene liegen, fo ftehen fie (nach 236) in keiner Zahlbeziehung zu einander. Folglich find (nach 29) in der gefundenen Gleichung die entfprechenden Koefficienten gleich, alfo

$$x' = x\alpha + y\alpha' + z\alpha'' + u\alpha'''$$
$$y' = x\beta + y\beta' + x\beta'' + u\beta'''$$
$$z' = x\gamma + y\gamma' + z\gamma'' + u\gamma'''$$
$$u' = x\delta + y\delta' + z\delta'' + u\delta'''.$$

Anm. Dies ist die Auflöfung des allgemeinsten Problems der Koordinatenverwandlung.

§. 3. Kombinatorische Multiplikation der Punkte.

239. Erklärung. Das Parallelogramm, in welchem AB und BC zwei Seiten find, werde ich der Kürze wegen das Parallelogramm ABC nennen, und zwar werde ich, wenn es auf diefe Weife benannt ist, AB feine erste Seite, BC feine zweite Seite nennen. Ferner alle Parallelogramme, deren erste Seite der Strecke a und deren zweite Seite der Strecke b gleich lang und gleichgerichtet find, werde ich die Parallelogramme ab nennen. Zwei Parallelogramme ABC und DEF, welche in parallelen Ebenen liegen, werde ich dann und nur dann als gleichbezeichnet betrachten, wenn man fie durch

parallele Fortbewegung ihrer Ebenen und durch Bewegung der Parallelogramme innerhalb ihrer Ebenen in eine solche Lage bringen kann, dass, während AB und DE in derselben geraden Linie nach derselben Richtung hin liegen, C und F auf ein und derselben Seite dieser geraden Linie sich befinden.

240. Erklärung. Den Spat (das Parallelepipedum), in welchem AB, BC, CD drei nicht in einer Ebene liegende Kanten sind, werde ich der Kürze wegen den Spat (das Parallelepipedum) ABCD nennen, AB seine erste, BC seine zweite, CD seine dritte Kante. Und alle Spate (Parallelepipeda), deren erste Kante der Strecke a, deren zweite der Strecke b, und deren dritte Kante der Strecke c gleich lang und gleichgerichtet sind, werde ich die Spate (Parallelepipeda) abc nennen. Zwei Spate ABCD und EFGH werde ich dann und nur dann als gleichbezeichnet betrachten, wenn man sie in eine solche Lage bringen kann, dass, während ABC und EFG gleichbezeichnete Parallelogramm derselben Ebene werden, D und H auf ein und derselben Seite dieser Ebene liegen.

Zusatz. Die Spate (Parallelepipeda) abc, bca, cab sind einander gleich (auch dem Zeichen nach).

241. Lehrsatz. Zwei Parallelogramme, deren erste und deren zweite Seiten gleich lang und gleichgerichtet sind, sind einander gleich (auch dem Zeichen nach), und liegen in parallelen*) Ebenen. Zwei Spate (Parallelepipeda), deren entsprechende (erste, zweite, dritte) Kanten gleich lang und gleichgerichtet sind, sind einander gleich (auch dem Zeichen nach); d. h. alle durch dasselbe Symbol ab bezeichneten Parallelogramme und ebenso alle durch dasselbe Symbol abc bezeichneten Spate sind einander gleich (auch dem Zeichen nach).

242. Erklärung. Von zwei Parallelogrammen, die in parallelen Ebenen liegen und ebenso von zwei beliebigen Spaten (Parallelepipeda) sage ich, dass sie sich wie 2 Zahlen α und β verhalten, wenn sie einander gleich- oder entgegengesetzt bezeichnet sind, je nachdem α und β es sind, und sie sich, abgesehen vom Zeichen, wie α zu β verhalten (vgl. 221).

*) Zu den Parallelen ist überall das Identische mit hinzugerechnet.

243. Lehnfatz. Zwei Parallelogramme ABC und ABD (von derfelben Grundfeite AB) find dann und nur dann gleich (auch dem Zeichen nach), wenn CD mit AB parallel ist.

244. Lehnfatz. Zwei Spate (Parallelepipeda) ABCD und ABCE (von derfelben Grundfläche ABC) find dann und nur dann gleich (auch dem Zeichen nach), wenn DE mit der Ebene ABC parallel ist.

Anm. Nach diefen vorbereitenden Sätzen, welche aus der Geometrie entlehnt find, können wir nun den Begriff des kombinatorischen Produktes von Punkten aus dem allgemeinen Begriffe des kombinatorischen Produktes direkt ableiten.

245. Das kombinatorische Produkt zweier Punkte ist dann und nur dann null, wenn die beiden Punkte zufammenfallen, das kombinatorische Produkt dreier Punkte, wenn fie in gerader Linie liegen, das kombinatorische Produkt von vier Punkten, wenn fie in einer Ebene liegen, das kombinatorische Produkt von fünf Punkten ist immer null.

Beweis. Nach 61 und 66 ist das kombinatorische Produkt zweier oder mehrerer Grössen dann und nur dann null, wenn fie in einer Zahlbeziehung zu einander stehen; nach 221 stehen zwei Punkte dann und nur dann in einer Zahlbeziehung, wenn fie zufammenfallen, drei Punkte (nach 234 und 235), wenn fie in einer geraden Linie liegen, vier Punkte (nach 233, 236), wenn fie in einer Ebene liegen, und nach 232 stehen fünf Punkte stets in einer Zahlbeziehung. Alfo bewiefen.

246. Wenn A ein endlich entfernter Punkt, b, c, d unendlich entfernte Punkte, d. h. Strecken find, fo folgt

aus $[Ab] = 0$, die Gleichung $b = 0$,
aus $[Abc] = 0$, die Gleichung $[bc] = 0$,
aus $[Abcd] = 0$, die Gleichung $[bcd] = 0$.

Beweis. Es fei $[Abcd] = 0$. Angenommen nun, $[bcd]$ fei ungleich null, fo können (nach 61) b, c, d in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Da aber $[Abcd] = 0$ ist, fo muss zwischen A, b, c, d eine Zahlbeziehung herrschen, und da b, c, d in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo müsste (nach 2) A aus b, c, d numerisch ableitbar fein.

Aber aus den unendlich entfernten Punkten oder Strecken b, c, d gehen durch numerische Ableitung (nach 220) nur Strecken, d. h. Punkte der unendlich entfernten Ebene hervor, alſo nicht der endlich entfernte Punkt A. Somit iſt die Annahme, dass [bcd] von null verſchieden ſei, mit der Vorausſetzung im Widerſpruch, d. h. [bcd] muss null ſein. Ganz ebenſo ergeben ſich die übrigen Theile des Satzes.

247. Ein kombinatoriſches Produkt [AB] zweier einfachen Punkte A und B iſt einem kombinatoriſchen Produkte [CD] zweier einfachen Punkte C und D dann und nur dann gleich, wenn die unendlichen geraden Linien AB und CD zuſammenfallen, und AB mit CD gleich lang und gleichgerichtet iſt.

Beweis 1. Es ſeien die unendlichen geraden Linien AB und CD zuſammenfallend, und AB mit CD gleich lang und gleichgerichtet, ſo iſt zu beweiſen, dass [AB] = [CD] ſei. Da AB und CD gleich lang und gleichgerichtet ſind, ſo iſt (nach 222 Zuſ.)

* $B - A = D - C.$

Ferner, da A, B, C in einer geraden Linie liegen (Hypotheſis), ſo ſind B — A und C — A Strecken einer und derſelben geraden Linie, ſtehen alſo (nach 221) in einer Zahlbeziehung zu einander. Es ſei

** $C - A = \alpha(B - A).$

Nun iſt

$$\begin{aligned}
[CD] &= [C(D - C)] && [67]\\
&= [C(B - A)] && [*]\\
&= [(A + C - A)(B - A)]\\
&= [(A + \alpha(B - A))(B - A)] && [**]\\
&= [A(B - A)] && [67]\\
&= [AB] && [67].
\end{aligned}$$

2. Es ſei vorausgeſetzt

$$[AB] = [CD],$$

ſo iſt zu beweiſen, dass A, B, C, D in einer geraden Linie liegen und AB und CD gleich lang und gleichgerichtet ſind. Wenn [AB] = [CD] iſt, ſo müſſen (nach 76) C und D aus A und B durch lineale Umwandlung ableitbar ſein. Die ein-

fache lineale Umwandlung zweier Grössen besteht (nach 71) darin, dass zu einer derselben ein Vielfaches der andern addirt wird, also z. B. A und B sich verwandeln in A und $B + \alpha A$. Die so hervorgehende neue Grösse ist, also aus den beiden ursprünglichen Grössen numerisch abgeleitet, liegt also (nach 235) in der jene Grössen verbindenden geraden Linie, somit werden aus A und B durch fortgesetzte lineale Umwandlung nur Punkte der geraden Linie AB hervorgehen; somit liegen C und D in der geraden Linie AB. Nun sei E ein Punkt der geraden Linie AB von der Art, dass CE mit AB gleich lang und gleichgerichtet sei, so ist (nach Bew. 1)

$$[CE] = [AB],$$

und nach der Voraussetzung

$$[AB] = [CD],$$

also auch

$$[CE] = [CD]; \text{ folglich}$$
$$0 = [CD] - [CE] = [C(D - E)].$$

Somit (nach 246)

$$D - E = 0, \text{ d. h. } D = E.$$

Da nun nach der Annahme CE mit AB gleich lang und gleichgerichtet ist, so ist auch das mit CE identische CD mit AB gleich lang und gleichgerichtet.

248. Zusatz. Wenn A, B, C und D einfache Punkte sind, so folgt aus der Gleichung

$$[AB] = [CD],$$

die Gleichung

$$A - B = C - D,$$

aber nicht umgekehrt, aus dieser jene.

249. Erklärung. Wir nennen das Produkt [AB] einen Linientheil, und sagen, derselbe sei ein Theil der unbegränzten geraden Linie AB, und er sei mit der begränzten geraden Linie AB gleich lang und gleichgerichtet.

250. Zusatz. Zwei Linientheile werden also dann und nur dann gleichgesetzt, wenn sie gleich lang, gleichgerichtet und Theile derselben unbegränzten geraden Linie sind.

251. Das kombinatorische Produkt eines einfachen Punktes in eine Strecke ist ein Linientheil, welcher in der durch

den Punkt parallel der Strecke gezogenen geraden Linie liegt, und der Strecke gleich lang und gleichgerichtet ist.

Beweis. Es sei A ein einfacher Punkt und p eine Strecke. Man ziehe durch A eine gerade Linie AB, welche mit p gleich lang und gleichgerichtet ist, so ist (nach 222 Zus.)

$$p = B - A, \text{ also } [Ap] = [A(B - A)] = [AB] \quad [67]$$

und [AB] ist ein Linientheil, welcher in der geraden Linie AB, also in der durch A mit p parallel gezogenen geraden Linie liegt, und mit AB, also auch mit p, gleich lang und gleichgerichtet ist.

252. Das Produkt eines Linientheiles [AB] mit einer Zahl α ist ein Linientheil, welcher mit jenem in derselben unbegränzten geraden Linie liegt, und sich zu ihm algebraisch wie $\alpha : 1$ verhält.

Beweis. $\alpha[AB] = \alpha[A(B - A)],$ [67]

$= [A\alpha(B - A)].$ [40]

Das letztere Produkt ist (nach 251) ein Linientheil, welcher in der durch A mit $\alpha(B - A)$ parallel gezogenen geraden Linie, d. h. in der geraden Linie AB liegt, und welcher mit $\alpha(B - A)$ gleich lang und gleichgerichtet ist, d. h. (nach 221) sich zu AB wie $\alpha : 1$ verhält.

253. Wenn A und B einfache Punkte, α und β Zahlen sind, so ist $[\alpha A \cdot \beta B]$ ein Linientheil, der in der unbegränzten geraden Linie AB liegt und sich zu der begränzten geraden Linie AB algebraisch $\alpha\beta$ zu 1 verhält.

Beweis. $[\alpha A \cdot \beta B] = \alpha\beta[AB]$ (nach 46), also (nach 252) ein Linientheil der unbegränzten geraden Linie AB, welcher sich zu der begränzten AB algebraisch wie $\alpha\beta : 1$ verhält.

254. Zwei von Null verschiedene kombinatorische Produkte [ab] und [cd] je zweier Strecken a und b, c und d, sind dann und nur dann einander gleich, wenn die Parallelogramme ab und cd gleich an Inhalt und gleichbezeichnet sind und in parallelen Ebenen liegen.

Beweis. In 72 und 76 ist bewiesen, dass zwei kombinatorische Produkte [ab] und [cd] dann und nur dann einander gleich sind, wenn c und d aus a und b durch lineale Aenderung ableitbar sind; und zwar bestand die einfache lineale

Aenderung zweier Grössen (nach 71) darin, dass zu einer derselben ein Vielfaches der andern addirt wurde, während diese andere unverändert blieb, d. h. also, dass a und b, wenn α und β beliebige Zahlen sind, entweder in a und $b + \alpha a$, oder in $a + \beta b$ und b übergingen. Nun sei AB mit a, BC mit b gleich lang und gleichgerichtet, und ändere sich b in $b' = b + \alpha a$, ferner sei CD parallel mit AB gezogen und verhalte sich zu AB algebraisch wie $\alpha : 1$, so ist (nach 222) $B - A = a$, $C - B = b$, $D - C = \alpha a$. Also

$$D - B = D - C + C - B = \alpha a + b = b',$$

d. h. BD ist mit b' gleich lang und gleichgerichtet. Ferner da AB und CD parallel sind, so sind (nach 243) die Parallelogramme ABC und ABD einander gleich (auch dem Zeichen nach), und liegen in einer Ebene. Also sind auch die Parallelogramme ab und ab' gleichbezeichnet und in derselben Ebene liegend. Dasselbe gilt, wenn sich a und b in $a + \beta b$ und b ändern. Also ergiebt sich, dass, wenn aus a und b durch einfache lineale Aenderung c und d hervorgehen, auch die Parallelogramme ab und cd gleich (auch dem Zeichen nach) sind und in parallelen Ebenen liegen. Dasselbe gilt also auch, wenn c und d aus a und b durch mehrmalige Anwendung einer einfachen linearen Aenderung, d. h. durch eine beliebige lineale Aenderung hervorgehen. Somit ergiebt sich:

Erstens. Wenn $[ab] = [cd]$ ist, so müssen c und d aus a und b durch lineale Aenderung ableitbar sein (76); und wenn c und d aus a und b durch lineale Aenderung ableitbar sind, so müssen die Parallelogramme ab und cd gleich (auch dem Zeichen nach) sein und in parallelen Ebenen liegen.

Zweitens. Wenn umgekehrt vorausgesetzt wird, dass ab und cd gleiche (auch gleichbezeichnete) Parallelogramme in parallelen Ebenen sind, so müssen, da a, b, c, d dann einer und derselben Ebene parallel sind, c und d (nach 230) aus a und b numerisch ableitbar sein, folglich stehen (nach 63) die kombinatorischen Produkte [ab] und [cd] in einer Zahlbeziehung zu einander.

Es sei $[cd] = \alpha[ab]$ der Ausdruck dieser Zahlbeziehung. Setzen wir $\alpha b = b'$, so wird $[cd] = [a \cdot \alpha b] = [ab']$. Also sind

(nach Beweis 1) die Parallelogramme cd und ab' gleich und gleichbezeichnet, alſo da auch cd und ab nach der Vorausſetzung gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme ſind, ſo ſind auch ab und ab' gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme. Nun ſei AB mit a, BC mit b, BD mit b' gleich lang und gleichgerichtet, ſo iſt das Parallelogramm ABC eins der mit ab bezeichneten und ABD eins der mit ab' bezeichneten Parallelogramme. Alſo ABC mit ABD gleich und gleichbezeichnet, folglich da ABC und ABD auch in einer Ebene liegen, ſo liegen (nach 243) C und D in einer mit AB parallelen Linie. Nun ſind BC und BD beide mit b parallel, alſo auch untereinander, alſo da ſie einen Punkt (B) gemein haben, ſo liegen ſie in einer geraden Linie, ſomit fallen C und D, da D auch in der durch C mit AB parallel gezogenen geraden Linie liegt, zuſammen, alſo ſind BC und BD identiſch, alſo ſind b und b', von denen das erſte mit BC, das zweite mit BD gleich lang und gleichgerichtet iſt, auch unter einander gleich lang und gleichgerichtet; folglich, da auch $ab = b'$ geſetzt war, ſo iſt $a = 1$. Nun war

$$[cd] = a[ab]$$

geſetzt, alſo, da $a = 1$ iſt,

$$[cd] = [ab].$$

255. Zwei von null verſchiedene kombinatoriſche Produkte [ABC] und [DEF] je dreier einfacher Punkte A, B, C und D, E, F ſind dann und nur dann einander gleich, wenn die Parallelogramme ABC und DEF gleich und gleichbezeichnet ſind und in einer und derſelben Ebene liegen.

Beweis 1. Es ſeien ABC und DEF gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme einer und derſelben Ebene, ſo iſt zu beweiſen, dass $[ABC] = [DEF]$ ſei. Es ſeien AB mit a, BC mit b, DE mit c, EF mit d gleich lang und gleichgerichtet, d. h. $B - A = a$, $C - B = b$, $E - D = c$, $F - E = d$, * ſo iſt (nach 244)

** $[ab] = [cd]$.

Da ferner D in der Ebene ABC liegt, und ebenſo $B - A = a$ und $C - B = b$ Strecken dieſer Ebene ſind, ſo muss (nach 230) $D - A$ aus a und b numeriſch ableitbar ſein. Es ſei

*** $D - A = \alpha a + \beta b$,

so ist

$$[DEF] = [DE(F-E)] = [D(E-D)(F-E)] \quad [67]$$
$$= [Dcd] \quad [*]$$
$$= [D(cd)] \quad [80]$$
$$= [D(ab)] \quad [**]$$
$$= [\alpha a + \beta b + A)ab] \quad [***, 80]$$
$$= [Aab] \quad [67]$$
$$= [A(a + A)(b + A)] \quad [67]$$
$$= [ABC] \quad [*].$$

2. Es sei umgekehrt vorausgesetzt, dass

$$[ABC] = [DEF]$$

ist. Dann müssen (nach 76) D, E, F aus A, B, C durch lineale Aenderung, also auch numerisch ableitbar sein. Dann aber müssen (nach 236) D, E, F in der Ebene ABC liegen. Nun sei in der geraden Linie BC ein Punkt G von der Art angenommen, dass ABG und DEF gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme sind, so ist (nach Bew. 1), da ABG und DEF in ein und derselben Ebene (ABC) liegen,

$$[ABG] = [DEF].$$

Aber auch nach der Voraussetzung

$$[ABC] = [DEF].$$

Also $[ABG] = [ABC]$. Da nun G ein Punkt in BC ist, so ist $G - B$ aus $C - B$ numerisch ableitbar, es sei $G - B = \alpha(C - B)$, also $G = B + \alpha(C - B)$, so ist $[ABC] = [ABG] = [AB(B + \alpha(C - B))] = [AB\alpha(C - B)] = \alpha[ABC]$ [67, 40]. Also $\alpha = 1$. Somit, da $G - B = \alpha(C - B)$ war, $G - B = C - B$, d. h. $G = C$; oder die Punkte G und C fallen zusammen; also fallen auch die Parallelogramme ABG und ABC zusammen. Folglich, da ABG und DEF gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme derselben Ebene sind, so gilt dies auch von ABC und DEF.

256. Zusatz. Wenn A, B, C, D, E, F einfache Punkte sind, so folgt aus der Gleichung

$$[ABC] = [DEF]$$

auch die Gleichung

$$[(B - A)(C - B)] = [(E - D)(F - E)];$$

hingegen umgekehrt, aus letzterer die erstere nur dann, wenn

noch die Bedingung hinzutritt, dass die Ebenen ABC und DEF nicht bloss parallel, fondern auch identisch find.

257. Erklärung. Wir nennen das Produkt [ABC] einen Flächentheil und den Flächeninhalt des Parallelogramms ABC feinen Inhalt, und fagen, der Flächentheil ABC liege in der Ebene ABC.

Anm. Die genauere Benennung für das Produkt [ABC] würde Ebenentheil statt Flächentheil fein. Allein der erstere Ausdruck ist wegen des Gleichklangs feines Plurals „die Ebenentheile“ mit dem Ausdrucke „die ebenen Theile“ zu verwerfen.

258. Zufatz. Zwei Flächentheile find dann und nur dann einander gleich, wenn fie in derfelben Ebene liegen, und ihre Inhalte gleich und gleichbezeichnet find.

Anm. Man hätte als Inhalt des Flächentheiles [ABC] auch den Flächeninhalt des Dreiecks ABC fetzen können. Aber es wird fich in der Folge zeigen, dass dann der Inhalt des inneren Quadrates einer Strecke nur die Hälfte von dem Inhalte des Quadrates diefer Strecke fein würde, während beides bei unferer Benennung in Uebereinstimmung ist.

259. Das kombinatorische Produkt zweier einfacher Punkte A, B und einer Strecke c ist ein Flächentheil, welcher in der durch AB mit c parallel gelegten Ebene liegt, und dessen Inhalt gleich dem eines Parallelogrammes ABC ist, in welchem BC mit c gleich lang und gleichgerichtet ist, d. h. $[ABc] = [ABC]$, wenn $c = C - B$.

Beweis. $[ABc] = [AB(C - B)] = [ABC]$ [67].

260. Das kombinatorische Produkt eines einfachen Punktes A mit 2 Strecken b und c ist ein Flächentheil, welcher in der durch A mit b und c parallel gelegten Ebene liegt, und zum Inhalt den Flächeninhalt eines Parallelogrammes (ABC) hat, dessen erste Seite (AB) mit b, und dessen zweite Seite (BC) mit c gleich lang und gleichgerichtet ist, d. h.

$[Abc] = [ABC]$, wenn $b = B - A$, $c = C - B$ ist.

Beweis.

$$[Abc] = [A(B - A)(C - B)] = [AB(C - B)] \quad [67]$$
$$= [ABC] \quad [67].$$

261 a. Das Produkt $\alpha[ABC]$ eines Flächentheils [ABC] mit einer Zahl α ist ein Flächentheil derfelben Ebene, dessen Inhalt fich zu dem von ABC wie $\alpha : 1$ verhält.

Beweis. $\alpha[ABC] = \alpha[AB(C - B)]$ [67]
$= [AB \cdot \alpha(C - B)]$ [46]
$= [AB(D - B)]$,

wenn BD mit BC parallel ist, und sich zu ihm, wie $\alpha : 1$ verhält. Dies ist wieder (nach 67)

$= [ABD]$,

d. h. gleich einem Flächentheil derselben Ebene (ABC), dessen Inhalt dem Flächeninhalte des Parallelogramms ABD gleich ist. Da aber BD und BC parallel sind und sich algebraisch wie $\alpha : 1$ verhalten, so verhalten sich auch die Parallelogramme ABD und ABC wie $\alpha : 1$, d. h. die Inhalte von $\alpha[ABC]$ und $[ABC]$ wie $\alpha : 1$.

261 b. Wenn A, B, C einfache Punkte, und α, β, γ Zahlen sind, so ist $[\alpha A \cdot \beta B \cdot \gamma C]$ ein Flächentheil der Ebene ABC, dessen Inhalt zu dem des Parallelogramms ABC sich algebraisch wie $\alpha\beta\gamma : 1$ verhält.

Beweis. $[\alpha A \cdot \beta B \cdot \gamma C] = \alpha\beta\gamma[ABC]$ (No. 46), also nach 261 bewiesen.

262. Zwei von null verschiedene kombinatorische Produkte [abc] und [def] je dreier Strecken a, b, c und d, e, f sind dann und nur dann einander gleich, wenn die Spate (Parallelepipeda) abc und def gleich und gleichbezeichnet sind.

Beweis 1. Es sei vorausgesetzt, dass

$[abc] = [def]$

sei, so ist zu zeigen, dass die Spate abc und def gleich und gleichbezeichnet sind. Da $[abc] = [def]$ ist, so müssen (nach 76) d, e, f aus a, b, c durch lineale Aenderung hervorgehen. Nun können wir zeigen, dass durch einfache lineale Aenderung der 3 Seiten a, b, c eines Spates abc stets ein gleicher und gleichbezeichneter Spat hervorgehe. Die einfache lineale Aenderung der 3 Grössen a, b, c besteht (nach 71) darin, dass zu einer derselben ein Vielfaches von einer der beiden andern hinzuaddirt wird, während diese beiden andern ungeändert bleiben. Es möge zuerst zu der dritten c ein Vielfaches von irgend einer der beiden andern, z. B. von a hinzutreten, also a, b, c sich ändern in a, b, c', wo $c' = c + \alpha a$

ist. Dann seien AB, BC, CD, DE beziehlich gleich lang und gleichgerichtet mit a, b, c, αa, d. h.

$$B - A = a,\ C - B = b,\ D - C = c,\ E - D = \alpha a,$$

so ist

$$E - C = E - D + D - C = \alpha a + c = c',$$

also CE mit c' gleich lang und gleichgerichtet. Ferner da DE mit a, also auch mit AB parallel, und folglich auch mit der Ebene ABC ist, so sind (nach 244) die Spate ABCD und ABCE gleich und gleichbezeichnet, d. h. die Spate abc und abc', d. h. der Spat abc bleibt gleich und gleichbezeichnet, wenn zu der dritten Seite ein Vielfaches von einer der beiden andern hinzuaddirt wird. Nun ist ferner (nach 240 Zus.) $abc = bca = cab$, und ebenso $abc' = bc'a = c'ab$. Also auch da $abc = abc'$ war, $bca = bc'a$ und $cab = c'ab$, d. h. ein Spat bleibt gleich und gleichbezeichnet, wenn die zweite Kante, und ebenso wenn die erste Kante sich dadurch ändert, dass zu ihr ein Vielfaches von einer der beiden andern Kanten hinzuaddirt wird. Somit bleibt überhaupt ein Spat bei fortgesetzt wiederholter einfacher linealer Aenderung seiner Kanten, d. h. bei beliebiger linealer Aenderung gleich und gleichbezeichnet. Also da nach dem Obigen d, e, f aus a, b, c durch lineale Aenderung ableitbar sind, so muss nun auch der Spat def mit abc gleich und gleichbezeichnet sein.

Beweis 2. Es sei jetzt umgekehrt vorausgesetzt, dass die Spate def und abc gleich und gleichbezeichnet seien, so ist zu beweisen, dass $[def] = [abc]$ ist. Da angenommen ist, dass die kombinatorischen Produkte von null verschieden sind, so sind namentlich a, b, c nicht Einer Ebene parallel, also (nach 229) d, e, f aus ihnen numerisch ableitbar, also auch (nach 63) das Produkt [def] aus [abc] numerisch ableitbar. Es sei $[def] = \alpha[abc]$, also wenn $\alpha c = c'$ gesetzt wird, $[def] = [abc']$, folglich (nach Beweis 1) die Spate def und abc' gleich; nun waren die Spate def und abc nach der Voraussetzung gleich. Also die Spate abc und abc' gleich. Es seien AB, BC, CD, CD' beziehlich gleich lang und gleichgerichtet mit a, b, c, c'. Also die Spate

$$ABCD = abc,\ ABCD' = abc',\ \text{und somit}$$
$$ABCD = ABCD'.$$

Folglich liegen (nach 244) D und D′ in einer mit der Ebene ABC parallelen Ebene, D und D′ liegen aber auch in der geraden Linie CD, da CD mit c′, d. h. mit αc, alſo auch mit c, d. h. mit CD parallel iſt. Folglich liegen D und D′ in dem Durchſchnittspunkte jener Ebene und dieſer Geraden, d. h. fallen zuſammen. Alſo ſind CD und CD′ identiſch, alſo $c = c'$, alſo, vermöge der Gleichung $c' = \alpha c$, $\alpha = 1$; ſomit verwandelt ſich die Gleichung $[def] = \alpha[abc]$ in

$$[def] = [abc].$$

263. Zwei von null verſchiedene kombinatoriſche Produkte [ABCD] und [EFGH] von je vier einfachen Punkten A, B, C, D und E, F, G, H ſind dann und nur dann einander gleich, wenn die Spate (Parallelepipeda) ABCD und EFGH gleich (und gleichbezeichnet) ſind.

Beweis 1. Es ſeien ABCD und EFGH gleiche und gleichbezeichnete Spate, und ſeien AB, BC, CD, EF, FG, GH beziehlich mit b, c, d, f, g, h gleichlang und gleichgerichtet, d. h. $B - A = b$ u. ſ. w., ſo iſt (nach 262)

$$* \quad [bcd] = [fgh].$$

Da ferner aus b, c, d (nach 229) alle Strecken des Raumes numeriſch ableitbar ſind, ſo muss auch die Strecke $E - A$ es ſein; es ſei

$$E - A = \beta b + \gamma c + \delta d, \text{ d. h. } E = A + \beta b + \gamma c + \delta d.$$

Dann erhält man

$$[EFGH] = [EFG(H - G)] = [EF(G - F)(H - G)]$$
$$= [E(F - E)(G - F)(H - G)] \quad [67].$$

Alſo, da $F - E = f$, $G - F = g$, $H - G = h$ iſt, ſo erhält man den zuletzt gefundenen Ausdruck

$$= [Efgh] = [E(fgh)] \quad [79]$$
$$= [E(bcd)] \quad [*]$$

Ferner iſt der gefundene Ausdruck

$$= [Ebcd] \quad [79]$$
$$= [(A + \beta b + \gamma c + \delta d)bcd] = [Abcd] \quad [67]$$
$$= [A(B - A)(C - B)(D - C),$$

wenn wir ſtatt b, c, d ihre Werthe ſetzen, und hieraus erhält man mit Anwendung von 67

$$= [AB(C - B)(D - C)] = [ABC(D - C)] = [ABCD].$$

Alſo

$$[EFGH] = [ABCD].$$

Beweis 2. Es ſei umgekehrt vorausgeſetzt, dass

$$[ABCD] = [EFGH]$$

ist, und ſei in der geraden Linie CD ein Punkt D′ angenommen von der Art, dass der Spat ABCD′ mit EFGH gleich (und gleichbezeichnet) ſei, ſo ist (nach Beweis 1)

$$[ABCD'] = [EFGH].$$

Alſo auch, da $[EFGH] = [ABCD]$ vorausgeſetzt ist,

$$[ABCD'] = [ABCD].$$

Da nun $D - C$ und $D' - C$ parallel ſind, ſo ist $D' - C$ aus $D - C$ numeriſch ableitbar. Es ſei

$$D' - C = \alpha(D - C),$$

ſo ist

$$[ABCD] = [ABCD'] = [ABC(D' - C)] = [ABC\alpha(D - C)]$$
$$= [ABC\alpha D] \quad [67]$$
$$= \alpha[ABCD] \quad [40].$$

Alſo, da $[ABCD]$ nicht null ist, $\alpha = 1$, alſo geht aus der Gleichung $(D' - C) = \alpha(D - C)$ die Gleichung

$$D' - C = D - C$$

hervor, alſo $D' = D$, d. h. D und D′ fallen zuſammen, folglich auch die Spate ABCD und ABCD′, und da das Spat ABCD′ gleich und gleichbezeichnet mit EFGH war, ſo ſind auch die Spate ABCD und EFGH gleich und gleichbezeichnet.

264. Zuſatz. Die Gleichungen

$$[ABCD] = [EFGH]$$

und

$$[(B - A)(C - B)(D - C)] = [(F - E)(G - F)(H - G)],$$

oder auch

$$[(B - A)(C - A)(D - A)] = [(F - E)(G - E)(H - E)]$$

ſind einander erſetzend, d. h. aus jeder von ihnen folgen die beiden andern.

Beweis. Die Gleichung

$$[ABCD] = [EFGH]$$

gilt (nach 263) dann und nur dann, wenn die Spate ABCD und EFGH einander gleich und gleichbezeichnet ſind. Ebenſo gilt (nach 262) die Gleichung

$$[(B-A)(C-B)(D-C)] = [(F-E)(G-F)(H-G)]$$

dann und nur dann, wenn das Spat, dessen drei Kanten mit AB, BC, CD gleich lang und gleichgerichtet sind, dem Spate, dessen Kanten mit EF, FG, GH gleich lang und gleichgerichtet sind, d. h. der Spat ABCD mit EFGH inhaltsgleich und gleichbezeichnet ist. Folglich sind beide Gleichungen stets in denselben Fällen geltend. Endlich, die dritte Gleichung ist nur eine Transformation der zweiten, denn

$$[(B-A)(C-B)(D-C)]$$
$$=[(B-A)(C-B)(D-C+C-B+B-A) \quad [67]$$
$$=[(B-A)(C-B)(D-A)]=[(B-A)(C-B+B-A)(D-A)] \quad [67]$$
$$=[(B-A)(C-A)(D-A)],$$

und aus gleichem Grunde ist

$$[(F-E)(G-F)(H-G)]=[(F-E)(G-E)(H-E)].$$

Also sind die zweite und dritte Gleichung gleichbedeutend.

265. Erklärung. Wir nennen das Produkt [ABCD] von vier einfachen Punkten einen Körpertheil und den Kubikinhalt des Spates ABCD (mit Beobachtung des Vorzeichens ($\mp$)) seinen Inhalt.

266. Das kombinatorische Produkt dreier einfacher Punkte A, B, C und einer Strecke d ist ein Körpertheil, dessen Inhalt gleich dem eines Spates ABCD ist, in welchem CD mit d gleich lang und gleichgerichtet ist, d. h.

$$[ABCd] = [ABCD], \text{ wenn } d = D - C.$$

Beweis. $[ABCd] = [ABC(D-C)] = [ABCD]$ [67].

267. Das kombinatorische Produkt zweier einfacher Punkte A, B und zweier Strecken c und d ist dem Spate (Parallelepipedum) ABCD, in welchem BC mit c, CD mit d gleich lang und gleichgerichtet sind, inhaltsgleich, d. h.

$$[ABcd] = [ABCD], \text{ wenn } c = C - B,\ d = D - C.$$

Beweis. $[ABcd]$
$$=[AB(C-B)(D-C)]=[ABC(D-C)]=[ABCD] \text{ [67]}.$$

268. Das kombinatorische Produkt eines einfachen Punktes A und dreier Strecken b, c, d ist dem Spate bcd inhaltsgleich, oder

$$[Abcd] = [ABCD],$$

wenn $b = B - A$, $c = C - B$, $d = D - C$.

Beweis.

$$[Abcd] = [A(B-A)(C-B)(D-CB)] = [AB(C-B)(D-C)]$$
$$= [ABC(D-C)] = [ABCD] \qquad [67].$$

269. Das Produkt $\alpha[ABCD]$ eines Körpertheils [ABCD] und einer Zahl ist ein Körpertheil, dessen Inhalt sich zu dem von [ABCD] wie $\alpha : 1$ verhält.

Beweis. $\alpha[ABCD] = \alpha[ABC(D-C)]$ [67]
$= [ABC \cdot \alpha(D-C)]$ [40]
$= [ABC(E-C)]$,

wenn CE mit CD parallel ist und sich zu ihm wie $\alpha : 1$ verhält. Dies ist wieder (nach 67)

$$= [ABCE].$$

Da aber CE und CD parallel sind und sich wie $\alpha : 1$ verhalten, so verhalten sich auch die Spate ABCE und ABCD algebraisch wie $\alpha : 1$, d. h. die Inhalte von $\alpha[ABCD]$ und [ABCD] wie $\alpha : 1$.

270. Wenn A, B, C, D einfache Punkte, und α, β, γ, δ Zahlen sind, so ist $[\alpha A \cdot \beta B \cdot \gamma C \cdot \delta D]$ ein Körpertheil, der sich zu ABCD wie $\alpha\beta\gamma\delta$ zu 1 verhält.

Beweis. $[\alpha A \cdot \beta B \cdot \gamma C \cdot \delta D] = \alpha\beta\gamma\delta[ABCD]$ (nach 46), also (nach 269) bewiesen.

Anm. Blicken wir zurück auf die verschiedenen kombinatorischen Produkte, deren Begriff wir näher bestimmt haben, so ergab sich für 2, 3, 4 einfache Punkte das einfache, zweifache, sechsfache des dazwischen liegenden Linien-, Flächen-, Körper-Theiles, und die zugehörigen Gebiete waren die unbegränzte gerade Linie, Ebene, der unbegränzte Raum. Ferner ebenso wie der unendlich entfernte Punkt als Strecke von bestimmter Länge und Richtung erschien, so der unendlich entfernte Linientheil als begränzte Ebene von bestimmtem Flächeninhalt und bestimmten Richtungen, so der unendlich entfernte Flächentheil als Körperraum von bestimmtem Inhalte. Wenn zu einer Strecke oder zu einem Produkt zweier oder dreier Strecken ein Punkt als erster Faktor hinzutrat, so lieferte dies Produkt denselben Inhalt und dieselben Richtungen, als wenn der Punkt nicht hinzutrat. Durch das Hinzutreten des Punktes trat zu den bisherigen Bestimmungen (Inhalt und Richtungen) noch im ersten Falle die durch den Punkt mit der Strecke parallel gelegte Linie, im zweiten die durch den Punkt mit den beiden Strecken parallel gelegte Ebene hinzu, welche

die Gebiete jener Grössen bilden, und so verwandelte sich die Strecke in einen Linientheil, die Fläche von bestimmtem Inhalt und bestimmten Richtungen in das, was wir einen Flächentheil genannt haben. Das Produkt dreier Strecken wird durch das Hinzutreten des Punktes nur formell geändert.

271. Wenn A, B, C, D, E, F Punkte, und a, b, c, d Strecken sind, so bedeutet

1) $A \equiv B$,

dass A mit B zusammenfällt,

2) $[AB] \equiv [CD]$,

dass die unbegränzten geraden Linien AB und CD,

3) $[ABC] \equiv [DEF]$,

dass die unbegränzten Ebenen ABC und DEF zusammenfallen,

4) $a \equiv b$,

dass a mit b parallel,

5) $[ab] \equiv [cd]$,

dass die Ebene, welche die Richtungen a und b enthält, der Ebene parallel ist, welche die Richtungen c und d enthält.

Beweis. Nach No. 2 bedeutet die Kongruenz zweier extensiver Grössen $p \equiv q$, dass p und q in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und keine von beiden null ist. Wenn das nun 1) für A und B gilt, so müssen (nach 221) ihre Orte zusammenfallen, wenn es 2) für [AB] und [CD] gilt, so müssen (nach 247) die unbegränzten geraden Linien AB und CD zusammenfallen, wenn es für [ABC] und [DEF] gilt, so müssen (nach 255) die Ebenen ABC und DEF zusammenfallen. Endlich 4) und 5) folgen aus 1) und 2), wenn man die Punkte in unendliche Entfernung rückt.

§. 4. Addition von Linien und Flächen.

272. Zwei Linientheile derselben Ebene geben zur Summe wieder einen Linientheil derselben Ebene, und zwei Flächentheile geben zur Summe wieder einen Flächentheil.

Beweis. Da der Linientheil (nach 249) ein kombinatorisches Produkt zweier Punkte, und (nach 251) der Flächentheil ein kombinatorisches Produkt dreier Punkte, und die Punkte (nach 228) Grössen erster Stufe sind, so sind (nach

77 b) der Linientheil und der Flächentheil beziehlich einfache Grössen zweiter und dritter Stufe. Da ferner alle Punkte der Ebene ſich aus dreien, aber nicht aus weniger Punkten derſelben numerisch ableiten lassen (233), ſo ist (nach 14) die Ebene ein Gebiet dritter Stufe, und ebenſo (nach 232 und 14) der Raum ein Gebiet vierter Stufe. Nach 88 geben die Grössen (n — 1)-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe zur Summe eine einfache (d. h. als kombinatorisches Produkt darstellbare) Grösse (n — 1)-ter Stufe desselben Hauptgebietes, alſo die Linientheile einer und derſelben Ebene einen Linientheil derſelben Ebene, die Flächentheile einen Flächentheil.

Zuſatz. Dasſelbe gilt alſo auch für mehr als zwei Linientheile derſelben Ebene, und für mehr als zwei Flächentheile.

273. Zwei endlich entfernte Linientheile, deren Linien ſich schneiden, geben zur Summe einen endlich entfernten Linientheil, dessen Linie durch denſelben Durchschnittspunkt geht, und welcher der Diagonale eines Parallelogrammes gleich lang und gleichgerichtet ist, dessen von derſelben Ecke ausgehende Seiten den ſummirten Linientheilen gleich lang und gleichgerichtet ſind.

Beweis. Es ſei A der Durchschnittspunkt der beiden Linien, und ſeien [AB] und [AC] die beiden Linientheile, wo A, B, C einfache Punkte ſind, ſo ist

$$[AB] + [AC] = [A(B + C)] = 2[AE],$$

wenn E die Mitte zwischen B und C ist. Aber AE ist die halbe Diagonale des Parallelogramms CAB, alſo 2AE die ganze.

274. Zwei endlich entfernte, gleichgerichtete Linientheile geben zur Summe wieder einen ebenſo gerichteten Linientheil, dessen Länge die Summe ist aus den Längen der Summanden, und dessen gerade Linie zwischen den geraden Linien der Summanden liegt und von dieſen Linien im umgekehrten Verhältnisse der Längen der Summanden absteht.

Beweis. Es ſeien [Ap] und [Bq], wo A und B einfache Punkte, p und q gleichgerichtete Strecken ſind, dieſe Linientheile, und ſei $1 : \alpha$ das Verhältniss ihrer Längen, d. h. (nach 251) das Verhältniss von p zu q, alſo $q = \alpha p$, ſo ist

$$[Ap] + [Bq] = [Ap] + [B \cdot \alpha p] = [Ap] + \alpha[Bp] \quad [40]$$
$$= [(A + \alpha B)p] = [(1 + \alpha)S \cdot p] \quad [225],$$

wenn S der Summenpunkt von A und αB ist,

$$= [S \cdot (1 + \alpha)p] \quad [40]$$
$$= [S[p + \alpha p)] = [S(p + q)],$$

d. h. die Summe ist ein mit den Summanden gleichgerichteter Linientheil, dessen Länge $(p + q)$ die Summe aus den Längen der Summanden ist, und dessen Linie durch S geht. S liegt aber (nach 225) in der geraden Linie AB, und steht von A und B in dem Verhältnisse von $\alpha : 1$, d. h. im umgekehrten Verhältnisse der Summanden (p und q) ab, alfo steht auch die gerade Linie $S(p + q)$ von den geraden Linien Sp und Sq in diefem Verhältnisse ab.

275. Zwei endlich entfernte, entgegengefetzt gerichtete, aber nicht gleich lange Linientheile geben zur Summe einen endlich entfernten Linientheil, welcher dem grösseren der Summanden gleichgerichtet ist, dessen Länge die Differenz der Längen der Summanden ist, und dessen Linie ausserhalb der Linien der Summanden (auf der Seite des grösseren Summanden) liegt, und von diefer Linie im umgekehrten Verhältnisse der Längen der Summanden absteht.

Beweis wie in 274, nur dass man $-\alpha$ statt α fetzt.

276. Die Summe zweier entgegengefetzt gerichteter und gleich langer Linientheile AB und CD ist ein Streckenprodukt, dessen Inhalt gleich und gleichbezeichnet dem eines Parallelogrammes ABCD ist, welches den einen Linientheil (gleich viel, welchen) zur Grundfeite, und den andern zur Deckfeite hat.

Beweis. Wenn AB mit CD gleich lang und entgegengefetzt gerichtet ist, fo ist (nach 222 Zuf.)

$$B - A = C - D.$$

Alfo ist

$$[AB] + [CD] = [A(B - A)] + [(C - D)D] \quad [67]$$
$$= [A(B - A)] + [(B - A)D] \quad [\text{Hyp.}]$$
$$= -[(B - A)A] + [(B - A)D] \quad [55]$$
$$= [(B - A)(D - A],$$

d. h. gleich einem Streckenprodukt, dessen Inhalt gleich dem

eines Parallelogrammes ist, dessen erste Seite mit AB, und dessen zweite Seite mit AD gleich lang und gleichgerichtet ist. Dies ist aber das Parallelogramm ABCD, also bewiesen.

277. Die Summe eines endlich entfernten Linientheiles [AB] und eines kombinatorischen Produktes [ab] zweier Strecken a und b, welche einer durch den Linientheil [AB] gelegten Ebene parallel sind, ist ein endlich entfernter Linientheil [CD] derselben Ebene, welcher mit dem ersteren gleich lang und gleichgerichtet ist, und so liegt, dass das Parallelogramm ABCD, welches den ersten Linientheil zur Grundseite, den zweiten zur Deckseite hat, dem kombinatorischen Produkte [ab] entgegengesetzt (d. h. inhaltsgleich, aber entgegengesetzt bezeichnet) sei.

Beweis. Bezeichnen wir das mit ABCD gleiche Streckenprodukt mit P, so ist nach dem vorigen Satze

$$[AB] + [DC] = P,$$

also

$$[CD] = [AB] - P$$
$$= [AB] + [ab],$$

da nach Hypothesis

$$-P = [ab] \text{ ist.}$$

278. Die Summe zweier kombinatorischer Produkte [ab] und [cd] von je zwei Strecken ist wieder ein kombinatorisches Produkt zweier Strecken, und zwar in der Art, dass, wenn jene in Form zweier Parallelogramme über derselben (oder gleich langer und gleichgerichteter) Grundseite dargestellt sind, die Summe sich als Parallelogramm über derselben (oder gleich langer und gleichgerichteter) Grundseite darstellen lässt, in welchem die zweite Seite die Streckensumme der zweiten Seiten jener Parallelogramme ist.

Beweis. Man lege eine Ebene mit a und b parallel, eine andere mit c und d parallel; es sei e eine Strecke, welche mit der Durchschnittslinie beider Ebenen (und wenn sie sich nicht schneiden mit einer beliebigen Linie derselben) parallel ist. Dann kann man (nach 254) [ab] auf die Form [ef] und [cd] auf die Form [eg] bringen, und es ist dann

$$[ab] + [cd] = [ef] + [eg] = [e(f + g)],$$

und dies war die verlangte Form der Summe.

279. Zwei endlich entfernte Flächentheile, deren Ebenen sich schneiden, geben zur Summe einen Flächentheil, dessen Ebene durch die Durchschnittskante jener Ebenen geht, und zwar, wenn die Summanden als Parallelogramme von gemeinschaftlicher Grundseite dargestellt sind, so lässt sich die Summe als Parallelogramm darstellen, welches dieselbe Grundseite hat, und in welchem die zweite Seite die Streckensumme aus den zweiten Seiten der Summanden ist, oder anders ausgedrückt: Die Summanden sind gleich den Projektionen der Summe auf die beiden Ebenen der Summanden, wenn auf jede Ebene parallel der andern projicirt wird.

Beweis. Es seien A und B zwei einfache Punkte in der Durchschnittskante jener Ebenen, und c und d zwei Strecken von der Art, dass die beiden zu addirenden Flächentheile gleich [ABc] und [ABd] seien, so ist

$$[ABc] + [ABd] = [AB(c + d)]$$

d. h. die Summe ist dargestellt durch ein Parallelogramm, in welchem AB Grundseite, und c + d die zweite Seite ist.

280. Die Summe zweier paralleler und gleichbezeichneter (endlich entfernter) Flächentheile (E_1 und E_2) ist ein ihnen paralleler und gleichbezeichneter Flächentheil, dessen Inhalt die Summe ist aus den Inhalten der Summanden, und dessen Ebene zwischen denen der Summanden so liegt, dass sie von ihnen im umgekehrten Verhältnisse der Inhalte der Summanden absteht.

Beweis. Es sei $E_1 = [Abc]$, wo A ein Produkt, b und c Strecken sind, und sei von A auf die Ebene von E_2 ein Loth AD gefällt, so ist [Dbc], da beide Ebenen parallel sind, ein Flächentheil der Ebene von E_2, steht also zu E_2 in einer Zahlbeziehung. Es sei $E_2 = \alpha[Dbc]$, so ist

$$E_1 + E_2 = [Abc] + \alpha[Dbc] = [(A + \alpha D)bc]$$
$$= [(1 + \alpha)Sbc],$$

wo S (nach 225) in AD liegt, und von A und D im Verhältnisse $\alpha : 1$ absteht. Folglich ist die Ebene der Summe eine durch S mit b und c, also auch mit den Ebenen von E_1 und E_2 parallel gelegte Ebene, welche von diesen letzteren im Verhältnisse $\alpha : 1$ absteht, d. h. im umgekehrten Verhältnisse

der Inhalte (bc und αbc). Der Inhalt der Summe ist (nach 260) gleich dem Inhalte von $(1 + \alpha)bc$, d. h. $= bc + \alpha bc$, d. h. gleich der Summe der Inhalte der Summanden.

281. Die Summe zweier paralleler und entgegengesetzt bezeichneter aber nicht inhaltsgleicher (endlich entfernter) Flächentheile E_1 und E_2 ist ein ihnen paralleler dem grösseren gleichbezeichneter Flächentheil, dessen Inhalt die Differenz der Inhalte der Summanden (E_1 und E_2) ist, und dessen Ebene ausserhalb der beiden Ebenen der Summanden so liegt, dass sie von diesen Ebenen im umgekehrten Verhältnisse der Summanden absteht.

Beweis wie in 277, nur dass statt α gesetzt wird $-\alpha$.

282. Die Summe zweier paralleler, entgegengesetzt bezeichneter aber inhaltsgleicher (endlich entfernter) Flächentheile E_1 und E_2 ist gleich einem kombinatorischen Produkte dreier Strecken, und zwar ist der Inhalt dieses Produktes gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet dem eines Prisma's, welches E_1 als Grundfläche hat und dessen Deckfläche in der Ebene von E_2 liegt.

Beweis. Es sei $E_1 = [Abc]$, $E_2 = -[Dbc]$, so ist

$$E_1 + E_2 = [Abc] - [Dbc] = [(A - D)bc]$$
$$= -[(D - A)bc].$$

Aber $[(D - A)bc]$ ist (nach 58) $= [bc(D - A)]$, und dies letztere ist (nach 262) dem Inhalte eines Spates gleich, dessen erste Seite mit b, dessen zweite Seite mit c und dessen dritte Seite mit $(D - A)$ gleich und gleichgerichtet ist, also dessen Grundfläche Abc ist und dessen Deckfläche durch D geht, also bewiesen.

283. Die Summe eines endlich entfernten Flächentheils E_1 und eines kombinatorischen Produktes P dreier Strecken, ist ein dem ersten parallel gelegener, inhaltsgleicher und gleichbezeichneter Flächentheil E_2, welcher so liegt, dass der Spat (Parallelepipedum), welcher den ersteren Flächentheil zur Grundfläche hat, dem gegebenen kombinatorischen Produkte P der drei Strecken inhaltsgleich und gleichbezeichnet ist.

Beweis. Nach 282 ist

$$E_1 - E_2 = -P, \text{ also}$$
$$E_2 = E_1 + P.$$

284. Die Summe dreier Flächentheile (E_1, E_2, E_3), deren Ebenen ſich in einem Eckpunkte (D) schneiden, ist ein Flächentheil (E_4), dessen Ebene durch denſelben Eckpunkt (D) geht; und ſo beſchaffen ist, dass, wenn man dieſen Flächentheil (E_4) nach und nach auf jede der drei Ebenen parallel der Durchschnittslinie der beiden andern projicirt, dieſe Projektionen den Summanden (E_1, E_2, E_3) gleich ſind.

Beweis. Es ſeien die Kanten, in welchen ſich beziehlich die Ebenen E_2 und E_3, E_3 und E_1, E_1 und E_2 schneiden, den drei Richtungen a, b, c parallel, ſo ist zunächst zu beweiſen, dass E_1, E_2, E_3 die Projection von E_4 auf die Ebenen E_1, E_2, E_3 nach den Richtungen a, b, c ſeien. Um dies zuerst für E_1 zu beweiſen, ſei $E_2 + E_3 = E'$ geſetzt, ſo ist a (nach der Annahme) mit der Durchschnittskante der beiden Ebenen E_2 und E_3 parallel; alſo auch (nach 279) mit E'. Projicirt man nun E_4 auf die Ebene E_1 nach der Richtung a, ſo ist, da a mit E' parallel und $E_4 = E' + E_1$ ist, dieſe Projection $= E_1$ (nach 279). Auf gleiche Weiſe folgt, dass die Projection von E_4 auf die Ebene E_2 nach der Richtung b, gleich E_2, und die auf die Ebene E_3 nach der Richtung c, gleich E_3 ist. Endlich muss auch E_4 durch D gehen; denn (nach 279) haben E', E_2 und E_3, vermöge der Gleichung $E' = E_2 + E_3$, dieſelbe Kante gemein, alſo auch den Punkt D, der (nach der Hypotheſis) in E_2 und E_3 liegt; ferner haben nach demſelben Satze E_4, E', E_1, vermöge der Gleichung $E_4 = E' + E_1$, dieſelbe Kante gemein, alſo auch den Punkt D, der, wie wir bewieſen, in E' und nach der Vorausſetzung auch in E_1 liegt, d. h. E_4 geht auch durch D.

285. Eine Summe S von Linientheilen lässt ſich stets auf eine Summe zweier Linientheile zurückführen, und zwar kann man für den einen dieſer beiden Linientheile einen Punkt (A), durch welchen die Linie desſelben gehen ſoll, und für den andern eine Ebene BCD, in welcher die Linie desſelben liegen ſoll, willkürlich annehmen, nur dass der Punkt A nicht innerhalb der Ebene BCD liegen darf.

Beweis. Da A, B, C, D nicht in einer Ebene liegen, ſo kann man aus ihnen (nach 232) alle Punkte des Raumes

numerisch ableiten, und alſo auch die Punkte, durch deren Multiplikation zu je zweien die Linientheile entſtanden ſind, deren Summe S iſt. Löſt man, nachdem man dieſe Ableitungsausdrücke eingeführt hat, alle Klammern auf, und ſetzt (nach 55) $[BA] = -[AB]$, $[CA] = -[AC]$, $[DA] = -[AD]$, $[CB] = -[BC]$, $[DB] = -[BD]$, $[DC] = -[CD]$, ſo erhält man einen Ausdruck der Form

$$S = \alpha[AB] + \beta[AC] + \gamma[AD] + \delta[BC] + \varepsilon[BD] + \zeta[CD],$$

wo α, β, γ, δ, ε, ζ Zahlen ſind. Dies iſt aber

$$= [A(\alpha B + \beta C + \gamma D)] + \delta[BC] + \varepsilon[BD] + \zeta[CD].$$

Ersteres giebt (nach 222 und 253) einen Linientheil, und $\delta[BC] + \varepsilon[BD] + \zeta[CD]$ giebt (nach 272 Zuſ.) einen (endlich oder unendlich entfernten) Linientheil der Ebene BCD, alſo bewieſen.

286. Eine Summe S von Linientheilen iſt dann und nur dann wieder ein Linientheil, wenn

$$[SS] = 0$$

iſt.

Beweis 1. Wenn S ein Linientheil $= [AB]$ iſt, ſo iſt

$$[SS] = [ABAB] = 0 \qquad [60].$$

2. Wenn $[SS] = 0$ iſt, ſo ſei S (nach 285) zurückgeführt auf 2 Linientheile, und $S = [AB] + [CD]$, ſo wird

$$0 = [SS] = [(AB+CD)(AB+CD)] = [ABCD] + [CDAB],$$

da [ABAB] und [CDCD] (nach 60) null ſind. Es iſt aber (nach 58) $[CDAB] = [ABCD]$, alſo

$$0 = 2[ABCD], \text{ oder } 0 = [ABCD],$$

d. h. A, B, C, D liegen in Einer Ebene (nach 236), alſo iſt (nach 272) AB + CD ein Linientheil.

Anm. Man ſieht, wie für die Statik der Schwerpunkt als Summe von Punkten, die ſtatiſche Kraft als Linientheil, die Reſultate der ſtatiſchen Kräfte als Summe der Linientheile, das ſtatiſche Moment als Flächentheil erſcheint, und ſchon daraus wird man entnehmen können, welche fruchtreiche Anwendung die hier ſich entwickelnde Analyſe für die Statik und Mechanik geſtatte, was ich in einem ſpäteren Werke zu zeigen gedenke.

§. 5. Planimetrische und stereometrische Multiplikation.

287. Wenn a, b, ··· die Stufenzahlen eines reinen Produktes P (114), n die des Hauptgebietes, ν die Stufenzahl des verbindenden, g die des gemeinschaftlichen Gebietes (15) und p die des Produktes ist, und $n - a = a'$, $n - b = b'$, ···, $n - g = g'$ gefetzt wird, fo ist,

1) wenn das Produkt P ein progressives ist, P dann und nur dann von null verschieden, wenn

$$\nu = a + b + \cdots$$

ist, und zwar ist dann $p = \nu$,

2) wenn das Produkt P ein regressives ist, fo ist P dann und nur dann von null verschieden, wenn

$$g' = a' + b' + \cdots$$

ist, und zwar ist dann $p = g$.

Beweis 1. Wenn das Produkt P ein progressives ist, fo kann man die Faktoren (nach 119 b) in lauter Faktoren erster Stufe auflöfen; die Anzahl diefer Faktoren erster Stufe ist (nach 77) $a + b + \cdots$, ihr Produkt ist (nach 61 und 66) dann und nur dann von null verschieden, wenn die Faktoren erster Stufe in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, d. h. (nach 23) wenn das verbindende Gebiet von $(a + b + \cdots)$-ter Stufe, alfo $\nu = a + b + \cdots$ ist. Dann ist die Stufe des Produktes (nach 77) $= a + b + \cdots$, d. h. $= \nu$.

2. Wenn das Produkt P ein regressives ist, fo gilt der Satz zunächst für zwei Faktoren. Denn nach 109 ist P dann und nur dann von null verschieden, wenn $g = a + b - n$, d. h. $n - g = n - a + n - b$, alfo

$$g' = a' + b'$$

ist. Nach 95 ist ferner $p = a + b - n$, alfo $= g$. Somit gilt der Satz für zwei Faktoren. Aus ihm erhält man aber durch wiederholte Anwendung den Satz für beliebig viele Faktoren.

Anm. Diefer Satz hätte nach 119 b folgen follen, und ist dort nur durch ein Verfehen ausgelassen.

288. Erklärung. Unter der planimetrischen Multiplikation verstehe ich die auf eine Ebene bezügliche, unter

der stereometrischen die auf den Raum (als Gebiet vierter Stufe) bezügliche Multiplikation.

289. Das planimetrische Produkt zweier Linientheile [AB] und [AC], deren Linien sich in endlicher Entfernung schneiden, ist ein Punkt, dessen Ort der Durchschnittspunkt (A) jener Linien, und dessen Koefficient, wenn A, B, C einfache Punkte sind, gleich dem Inhalte des Parallelogramms ABC ist, d. h.

$$[AB \cdot AC] = [ABC]A.$$

Beweis nach 104.

Anm. Da bei der planimetrischen Multiplikation (gemäss 94) ein Flächentheil als Einheit angenommen werden muss, so ist der Koefficient [ABC] eine Zahl, also [ABC]A in der That ein (einfacher oder vielfacher) Punkt.

290. Das planimetrische Produkt zweier paralleler Linientheile [AB] und [CD] ist eine Strecke, welche den beiden Linien parallel ist, und welche sich zur Strecke AB algebraisch wie das Parallelogramm BCD zur Einheit verhält.

Beweis. Da AB mit CD parallel ist, so stehen (nach 221) die Strecken $A - B$ und $C - D$ in einer Zahlbeziehung. Es sei $C - D = \alpha(A - B)$, so wird

$$\begin{aligned}
[AB \cdot CD] &= [(A - B)B \cdot (C - D)D] && [67]\\
&= \alpha[(A - B)B \cdot (A - B)D] && [\text{Annahme}]\\
&= \alpha[(A - B)BD](A - B) && [104]\\
&= [(C - D)BD](A - B) && [\text{Annahme}]\\
&= [CBD](A - B) && [67]\\
&= [BCD](B - A) && [55],
\end{aligned}$$

d. h. [AB·CD] ist gleich einer Strecke, die mit AB parallel ist, und sich zu AB algebraisch verhält wie [BCD] zu 1.

291. Das planimetrische Produkt eines Linientheiles [AB] und eines Punktes C ist, wenn A, B, C einfache Punkte sind, gleich dem Inhalte des Parallalogramms ABC, also null nur dann, wenn A, B, C in gerader Linie liegen.

Beweis nach 255.

292. Das planimetrische Produkt dreier Linientheile [AB], [AC], [BC], welche die Seiten eines Dreiecks bilden, ist, wenn A, B, C einfache Punkte sind, 4mal so gross als

das Quadrat dieſes Dreiecks, oder gleich dem Quadrate des Parallelogramms ABC, d. h.

$$[AB \cdot AC \cdot BC] = [ABC]^2.$$

Beweis. Es ſei $[ABC] = \alpha$. Dann ſetze man $A_1 = A : \alpha$, ſo iſt $[A_1BC] = 1$, alſo (nach 112)

$$[A_1B \cdot A_1C \cdot BC] = 1,$$

alſo

$$[AB \cdot AC \cdot BC] = \alpha^2 = [ABC]^2.$$

Anm. Wir hätten die Formel auch ſchreiben können:
$[AB \cdot BC \cdot CA] = [ABC]^2$.

293. Das planimetriſche Produkt zweier Grössen erſter oder zweiter Stufe iſt dann und nur dann null, wenn die Grössen incident ſind, d. h. zweier Punkte, wenn ihre Orte zuſammenfallen, zweier Linientheile, wenn ihre Linien zuſammenfallen, eines Linientheiles und eines Punktes, wenn der Ort des Punktes in die Linie (jenes Linientheiles) fällt.

Beweis nach 287.

294. Das planimetriſche Produkt zweier nicht incidenter Linientheile iſt dem Durchſchnittspunkte ihrer Linien kongruent, d. h.

$$[AB \cdot AC] \equiv A.$$

Beweis. $[AB \cdot AC] = [ABC]A$ (ſ. o.), alſo da $[ABC]$ eine Zahl iſt, $\equiv A$ (nach 2).

295. Das planimetriſche Produkt dreier Linientheile iſt dann und nur dann null, wenn ihre Linien ſich in einem (endlich oder unendlich entfernten) Punkte treffen.

Beweis nach 287.

296. Das ſtereometriſche Produkt zweier Flächentheile $[ABC]$ und ABD, deren Ebenen ſich in endlicher Entfernung ſchneiden, iſt ein Theil dieſer Durchſchnittslinie, und zwar verhält ſich derſelbe, wenn A, B, C, D einfache Punkte ſind, zu AB algebraiſch wie der Spat (das Parallelepipedum) ABCD zur Einheit.

Beweis. $[ABC \cdot ABD] = [ABCD][AB]$ [104].

Anm. Da bei der ſtereometriſchen Multiplikation (nach 94, 288) ein Körpertheil als Einheit genommen iſt, ſo iſt $[ABCD]$ eine Zahl, und alſo $[ABCD][AB]$ in der That ein Linientheil.

297. Das stereometrische Produkt zweier Flächentheile [ABC] und [DEF], deren Ebenen parallel sind, ist ein Produkt zweier Strecken, welche diesen Ebenen parallel sind, und zwar verhält sich der Inhalt dieses Produktes, wenn A, B, C, D, E, F einfache Punkte sind, zu dem des Parallelogramms ABC algebraisch wie der Spat (das Parallelepipedum) ADEF zur Einheit.

Beweis.

$$[ABC \cdot DEF] = [A(B-A)(C-A) \cdot D(E-D)(F-D)] \quad [67].$$

Da nun nach der Annahme die Ebenen ABC und DEF parallel sind, so sind (nach 230) $E-D$ und $F-D$ aus $B-A$ und $C-A$ ableitbar, also auch das Produkt der ersteren aus dem der letzteren. Es sei $B-A$ mit p und $C-A$ mit q bezeichnet, so ist $[(E-D)(F-D)]$ aus [pq] ableitbar, und sei $= \alpha[pq]$, so ist

$$\begin{aligned} [ABC \cdot DEF] &= [Apq \cdot \alpha Dpq] = \alpha[Apq \cdot Dpq] && [40] \\ &= \alpha[ADpq][pq] && [107] \\ &= [AD(E-D)(F-D)][pq] && [\text{Annahme}] \\ &= [ADEF][pq] && [67]. \end{aligned}$$

298. Das stereometrische Produkt zweier Linientheile [AB] und [CD], und ebenso das eines Flächentheiles [ABC] und eines Punktes, ist, wenn A, B, C, D einfache Punkte sind, gleich dem Spate ABCD.

Beweis. $[AB \cdot CD] = [ABC \cdot D] = [ABCD]$ [80].

299. Das stereometrische Produkt dreier Flächentheile [ABC], [ABD], [ACD], welche sich in einem endlich entfernten Punkte A schneiden, ist ein vielfacher Punkt, dessen Ort der Durchschnittspunkt A ist, und zwar, wenn A, B, C, D die einfachen Ecken eines Tetraeders sind, so ist der zu jenem Punkte gehörige Koefficient gleich dem Inhalte des Spates (Parallelepipedums) ABCD.

Beweis. Es sei $[ABCD] = \alpha$, und sei $B_1 = B : \alpha$, so ist $[AB_1CD] = 1$, also (nach 112)

$$[AB_1C \cdot AB_1D \cdot ACD] = A, \text{ also}$$
$$[ABC \cdot ABD \cdot ACD] = \alpha^2 A = [ABCD]^2 A.$$

300. Das stereometrische Produkt von vier Flächentheilen [ABC], [ABD], [ACD], [BCD] ist, wenn A, B, C,

D die einfachen Ecken eines Tetraeders sind, gleich der dritten Potenz des Spates (Parallelepipedums) ABCD.

Beweis. Es sei $[ABCD] = \alpha$, und sei $A_1 = A : \alpha$, so ist $[A_1BCD] = 1$, also (nach 112)

$$[A_1BC \cdot A_1BD \cdot A_1CD \cdot BCD] = 1, \text{ also}$$
$$[ABC \cdot ABD \cdot ACD \cdot BCD] = \alpha^3 = [ABCD]^3.$$

301. Das stereometrische Produkt zweier Linientheile ist dann und nur dann null, wenn ihre Linien in einer Ebene liegen; das stereometrische Produkt zweier Grössen, welche von erster, zweiter oder dritter Stufe, aber nicht beide zugleich von zweiter Stufe sind, ist dann und nur dann null, wenn die Grössen incident sind, also zweier Punkte, wenn ihre Orte zusammenfallen, zweier Flächentheile, wenn ihre Ebenen zusammenfallen, eines Punktes und eines Linien- oder Flächentheiles, wenn der Punkt in der Linie oder Ebene des letzteren liegt, eines Linientheiles und eines Flächentheiles, wenn die Linie des ersteren in der Ebene des letzteren liegt.

Beweis No. 287.

302. Das stereometrische Produkt zweier nicht incidenter Flächentheile ist der Durchschnittslinie ihrer Ebenen kongruent.

Beweis. Es seien a, b, c, d vielfache Punkte, so ist

$$[abc \cdot abd] = [abcd][ab]$$
$$\equiv [ab],$$

da [abcd] eine Zahl ist.

303. Das stereometrische Produkt eines Flächentheiles und eines Linientheiles, der nicht in der Ebene des ersteren liegt, ist dem Durchschnittspunkte der Ebene und der Linie kongruent.

Beweis. $[abc \cdot ad] = [abcd]\ a$
$$\equiv a,$$

wo wieder a, b, c, d vielfache Punkte sind.

304. Ich bezeichne bei der planimetrischen Multiplikation das Produkt [ab] zweier Strecken a und b, wenn das Parallelogramm ab gleich dem als Einheit angenommenen Flächeninhalte ist, mit U, und ebenso bezeichne ich bei der stereometrischen Multiplikation das Produkt [abc] dreier Strecken

a, b und c, wenn der Spat (Parallelepipedum) abc gleich dem als Einheit angenommenen Körperraume ist, mit U. Wenn beide unterschieden werden sollen, so werde ich jenes mit U_2, dieses mit U_3 bezeichnen.

305. Wenn a ein vielfacher Punkt, AB ein Linientheil, ABC ein Flächentheil ist, und A, B, C, einfache Punkte sind, so ist

[aU] der Koefficient von a,

[ABU] gleich der mit AB gleich langen und gleichgerichteten Strecke $= (B - A)$, und

[ABCU] gleich dem mit dem Parallelogramm ABC gleichen und parallel gelegenen Streckenprodukte

$$= [(B - A)(C - A)].$$

Beweis. Es sei $a = \alpha A$ und $U = [bcd]$, wo b, c, d (nach 304) Strecken sind, und der Spat bcd gleich 1 ist, so ist

$$[aU] = [\alpha Abcd] = \alpha[Abcd] = \alpha,$$

da [Abcd] (nach 268) mit [bcd] inhaltsgleich und gleich bezeichnet, also gleich 1 ist. Ferner

$$[ABU] = [AB \cdot bcd] = [A(B - A) \cdot bcd] \qquad [67].$$

Da hier B — A als Strecke aus b, c, d numerisch ableitbar ist (nach 229), so ist (nach 108)

$$[A(B - A) \cdot bcd] = [Abcd][B - A] = [B - A],$$

da $[Abcd] = 1$ ist. Ferner

$$[ABCU] = [ABC \cdot bcd] = [A(B - A)(C - A) \cdot bcd] \quad [67].$$

Da hier B — A und C — A Strecken, also aus b, c, d numerisch ableitbar sind (nach 229), so ist $[(B - A)(C - A)]$ dem [bcd] untergeordnet, also

$$[A(B - A)(C - A) \cdot bcd] = [Abcd][B - A)(C - A)] \quad [108]$$
$$= [(B - A)(C - A)],$$

da $[Abcd] = 1$ ist.

Anm. Diese Grössen (aU), [ABU], [ABCU] sind es, welche ich in der ersten Bearbeitung der Ausdehnungslehre von 1844 (pag. 159) die Ausdehnungen der Grössen a, [AB], [ABC] genannt, und dafür eine eigene Bezeichnung eingeführt habe, die nunmehr durch die Anwendung der unendlich entfernten Einheit (U) überflüssig gemacht worden ist.

§. 6. Besondere Gesetze für ein gleich Null gesetztes planimetrisches Produkt. Ebene Kurven.

306. Die Gleichung eines Punktes x, der mit den Punkten a, b in einer geraden Linie liegt, ist

$$[xab] = 0.$$

Beweis. Denn (nach 245) ist [xab] dann und nur dann null, wenn x mit a, b in einer geraden Linie liegt.

Anm. Da es bei den gleich null gesetzten Produkten nie auf den metrischen Werth der Faktoren ankommt, so brauchen einfache und vielfache und unendlich entfernte Punkte nicht mehr unterschieden zu werden, und ich will deshalb für dieselben überall die gleiche Bezeichnung durch kleine lateinische Buchstaben wählen, während ich zur Bezeichnung der Linientheile, oder, da es hier auf ihre Grösse nicht ankommt, der geraden Linien, die grossen lateinischen Buchstaben wähle.

307. Die Gleichung einer geraden Linie X, die mit den geraden Linien A und B durch denselben Punkt geht, ist

$$[XAB] = 0.$$

Beweis nach 301.

308. Die Stufenzahl eines planimetrischen Produktes aus beliebig vielen Faktoren, mögen dieselben nun Grössen erster oder zweiter Stufe sein, ist der Summe der Stufenzahlen aller Faktoren kongruent in Bezug auf den Modul 3.

Beweis nach 96.

309. Wenn $\mathfrak{P}_{n,x}$ ein planimetrisches Produkt nullter Stufe ist, welches den Punkt x n-mal, und ausserdem nur konstante Punkte und Linien als Faktoren enthält, so ist

$$\mathfrak{P}_{n,x} = 0,$$

wenn ihr nicht jeder Punkt x genügt, die Punkt-Gleichung einer algebraischen Kurve n-ter Ordnung, d. h. es drückt die Gleichung aus, dass der Punkt x in einer algebraischen Kurve n-ter Ordnung liegt.

Beweis. Es seien a, b, c drei beliebige, nicht in gerader Linie liegende Punkte, z. B. a ein einfacher Punkt, b und c zwei gegeneinander senkrechte und gleich lange Strecken (unendlich entfernte Punkte), so sind alle Punkte der Ebene

aus a, b, c numerisch ableitbar, also namentlich der Punkt x; es sei

$$x = x_1 a + x_2 b + x_3 c.$$

Führt man diesen Ausdruck statt x in die Gleichung

$$\mathfrak{P}_{n,x} = 0$$

ein, und löst die sämmtlichen Klammern, welche nun in dem Produkte $\mathfrak{P}_{n,x}$ den Ausdruck $(x_1 a + x_2 b + x_3 c)$ einschliessen, auf, so erhält man eine in Bezug auf x_1, x_2, x_3 homogene Gleichung n-ten Grades, deren Glieder alle die Form $\mathfrak{A} x_1^a x_2^b x_3^c$ haben, wo $a + b + c = n$ ist, und wo $\mathfrak{A}$ ein Produkt konstanter Linien und Punkte, und zwar ein Produkt nullter Stufe ist, da die Stufenzahlen der Faktoren nicht geändert sind. Also ist $\mathfrak{A}$ als Grösse nullter Stufe eine Zahl, und die Gleichung also eine gewöhnliche Zahlgleichung geworden, welche in Bezug auf x_1, x_2, x_3 homogen vom n-ten Grade ist. Es sind aber, wenn a ein einfacher Punkt und b und c zu einander senkrechte gleich lange Linien sind, $\frac{x_2}{x_1}$ und $\frac{x_3}{x_1}$ die gewöhnlichen Koordinaten des Punktes x, also, wenn die Gleichung nicht identisch $= 0$ ist, die durch sie dargestellte Kurve eine algebraische Kurve von n-ter Ordnung.

310. Wenn $\mathfrak{P}(n,X)$ ein planimetrisches Produkt nullter Stufe ist, welches die gerade Linie X n-mal und ausserdem nur konstante Punkte und Linien als Faktoren enthält, so ist

$$\mathfrak{P}(n,X) = 0$$

die Linien-Gleichung einer algebraischen Kurve n-ter Klasse, oder einfacher ausgedrückt, so ist der geometrische Ort für die Linie X, welche dieser Gleichung genügt, ein Ort n-ten Grades.

Beweis genau wie in 309.

311. Wenn $\mathfrak{P}_{n,x}$ ein stereometrisches Produkt nullter Stufe ist, welches den Punkt x n-mal, und ausserdem nur konstante Punkte, Linien und Ebenen als Faktoren enthält, so ist

$$\mathfrak{P}_{n,x} = 0$$

die Punktgleichung einer algebraischen Oberfläche n-ter Ordnung, oder einfacher ausgedrückt, so ist der geometrische Ort

des Punktes x, welcher der obigen Gleichung genügt, ein Ort n-ten Grades; vorausgefetzt jedoch, dass nicht jeder Punkt x der obigen Gleichung genügt.

Beweis. Es feien a, b, c, d vier beliebige Punkte, die nicht in Einer Ebene liegen, z. B. a ein einfacher Punkt, b, c, d drei gegeneinander fenkrechte und gleich lange Strecken (unendlich entfernte Punkte); fo lässt fich (nach 232) x aus a, b, c, d numerisch ableiten. Es fei

$$x = x_1 a + x_2 b = x_3 c + x_4 d,$$

wo x_1, x_2, x_3, x_4 Zahlen find. Führt man diefen Ausdruck ſtatt x in dem Produkt $P_{n,x}$ überall ein, und lösst die Klammern auf, fo erhält man lauter Glieder der Form $\mathfrak{A} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} x_3^{\mathfrak{c}} x_4^{\mathfrak{d}}$, wo $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = n$, und $\mathfrak{A}$ ein Produkt nullter Stufe, alfo eine Zahl ist. Somit ist die entstehende Gleichung eine Zahlgleichung, welche in Bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4 homogen vom n-ten Grade ist; falls nicht etwa die fämmtlichen Koefficienten $\mathfrak{A}$ u. f. w. Null find, d. h. der Gleichung durch jeden Punkt x genügt wird, was oben ausgeschlossen war. Nun find $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_1}$, $\frac{x_4}{x_1}$ die gewöhnlichen Koordinaten des Punktes x, weil nämlich $x = x_1\left(a + \frac{x_2}{x_1} b + \frac{x_3}{x_1} c + \frac{x_4}{x_1} d\right)$, alfo $x \equiv a + \frac{x_2}{x_1} b + \frac{x_3}{x_1} c + \frac{x_4}{x_1} d$ ist. Somit ist der geometrische Ort von x eine Oberfläche n-ter Ordnung.

312. Wenn $\mathfrak{P}(n, \xi)$ ein stereometrisches Produkt nullter Stufe ist, welches die Ebene ξ n-mal als Faktor enthält, und ausserdem nur konstante Punkte, Linien und Ebenen, fo ist

$$\mathfrak{P}(n, \xi) = 0$$

die Ebenen-Gleichung einer algebraischen Oberfläche n-ter Klasse; vorausgefetzt, dass nicht jede Ebene ξ der Gleichung genügt.

Beweis wie in 311.

313. Ein planimetrisches und ebenfo ein stereometrisches Produkt bleibt fich felbst kongruent, wenn man ſtatt eines beliebigen Faktors desfelben einen ihm kongruenten fetzt, oder

ihn mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl (einer Grösse nullter Stufe) multiplicirt oder dividirt.

Beweis. Zwei Grössen A und B heissen (nach 2) kongruent, wenn zwischen ihnen eine Gleichung der Form $A = nB$ besteht, in welcher n eine beliebige von Null verschiedene Zahl (positive, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale) bedeutet. Setzt man nun in einem Produkte $P(A)$, welches den Faktor A enthält, statt A eine ihr kongruente Grösse nA, so wird $P(nA)$ (nach 40) $= nP(A)$, also mit $P(A)$ kongruent.

Anm. Ein Produkt nullter Stufe ist nach dem angeführten Begriffe dann und nur dann einem anderen kongruent, wenn sie entweder beide zugleich null, oder beide zugleich von Null verschieden sind. Somit schliesst der Satz dies ein, dass wenn man in einem Produkte nullter Stufe statt eines beliebigen Faktors einen ihm kongruenten setzt, das Produkt null bleibt, wenn es null war, und von Null verschieden bleibt, wenn es von Null verschieden war. Da es in der ganzen folgenden Behandlung nur auf die Kongruenz ankommt, so werde ich statt der Linientheile und der Flächentheile überall gerade Linie und Ebene setzen.

314. Ein planimetrisches, und ebenso ein stereometrisches Produkt bleibt sich selbst kongruent, wenn die beiden Faktoren, aus denen es besteht, vertauscht, d. h. $[AB] \equiv [BA]$, was auch A und B für Grössen seien.

Beweis nach 120.

315. Ein planimetrisches Produkt dreier Punkte oder dreier Linien, ebenso ein stereometrisches von vier Punkten oder Ebenen bleibt sich selbst kongruent, wenn man seine Faktoren beliebig ordnet und zusammenfasst.

Beweis. Denn da das Produkt dann (nach 114) ein reines ist, so gelten für dasselbe die Sätze 120, 119 a.

316. Ein planimetrisches, und ebenso ein stereometrisches Produkt bleibt sich selbst gleich, wenn man zwei unmittelbar auf einander folgende, einander incidente Faktoren desselben (namentlich eine gerade Linie, oder eine Ebene und einen in ihr liegenden Punkt) vertauscht.

Beweis nach 123.

317. Ein planimetrisches, und ebenso ein stereometrisches Produkt nullter Stufe bleibt sich selbst kongruent, wenn

man die Ordnung der Faktoren umkehrt, oder die Reihe beliebig vieler letzter Faktoren in eine Klammer schliesst und umkehrt.

Beweis nach 126.

318. Ein stereometrisches Produkt von drei oder vier Punkten, oder von drei oder vier Ebenen, oder von zwei Punkten und einer Geraden, oder von zwei Ebenen und einer Geraden bleibt sich selbst kongruent, wenn man seine Faktoren beliebig ordnet und zusammenfasst.

Beweis. Denn da das Produkt dann (nach 114) jedesmal ein reines ist, so sind hier die Sätze 119 a und 120 anwendbar.

319. Ein stereometrisches Produkt [aBC] von einem Punkte a und zwei geraden Linien B und C, welche sich schneiden, bleibt sich selbst kongruent, wenn man diese geraden Linien vertauscht, d. h.

$$[aBC] \equiv [aCB], \text{ wenn B und C sich schneiden.}$$

Beweis nach 124 e.

Anm. Hiermit sind alle Fälle der Vertauschbarkeit für planimetrische und stereometrische Produkte erschöpft. (Vergl. 124.)

320. Wenn in einem planimetrischen Produkte der Form [xaBcD···] d. h. in welchem auf den Punkt x abwechselnd Punkte und gerade Linien folgen, oder in dem planimetrischen Produkte [XBcD···], in welchem auf die Linie X abwechselnd Linien und Punkte folgen, kein Faktor dem nächstfolgenden incident ist, so ist dasselbe von Null verschieden.

Beweis. Angenommen sei, dass von den Grössen x, a, B, c, D··· keine zwei aufeinander folgende incident seien, dann sind x und a zwei nicht incidente Punkte, ihr Produkt also eine von Null verschiedene, gerade Linie, diese gerade Linie ist nicht mit B incident, da a nicht in B liegt, also ist ihr Produkt [xaB] ein von Null verschiedener Punkt der geraden Linie B; dieser kann nicht mit c zusammenfallen, da c nicht in B liegt, also ist ihr Produkt [xaBc] eine von Null verschiedene, durch c gehende gerade Linie, diese kann nicht mit D zusammenfallen, da c nicht in D liegt, also ist ihr Produkt [xaBcD] ein von Null verschiedener Punkt der gera-

den Linie D u. f. w. Setzt man $xa = X$, so geht der zweite Theil des Satzes hervor.

321. Wenn in einem stereometrischen Produkte der Form

$$[xa\beta c\delta \cdots],$$

d. h. in welchem auf den Punkt x abwechselnd Punkte und Ebenen (die hier mit griechischen Buchstaben bezeichnet sind) folgen, oder in dem stereometrischen Produkte

$$[\xi\beta c\delta \cdots],$$

in welchem auf die Ebene ξ abwechselnd Ebenen und Punkte folgen, kein Faktor dem nächstfolgenden incident ist, so ist dasselbe von Null verschieden.

Beweis wie in 320.

322. Wenn in einem stereometrischen Produkte der Form

$$[xABC\cdots] \text{ oder } [\xi BC\cdots],$$

d. h. in welchem auf den Punkt x oder die Ebene ξ lauter gerade Linien als Faktoren folgen, die beiden ersten Faktoren einander nicht incident sind, und keine der Linien die nächstfolgende schneidet, so ist dasselbe von Null verschieden.

Beweis. Da x nicht in der geraden Linie A liegt, so ist [xA] von Null verschieden, und zwar der durch x und A gelegten Ebene kongruent; in dieser Ebene kann die gerade Linie B nicht liegen, da sie sonst die gerade Linie A derselben Ebene (wenn auch in unendlicher Entfernung) schneiden müsste, gegen die Annahme, also ist das Produkt [xAB] der Ebene [xA] und der geraden Linie B von Null verschieden, und zwar (nach 303) kongruent dem Durchschnittspunkte beider; da dieser in B liegt, also nicht in C (da B und C sich nicht schneiden), so ist das Produkt [xABC] eine von Null verschiedene durch C gehende Ebene u. s. w. Der zweite Theil des Satzes folgt, wenn man $[xA] = \xi$ setzt.

Anm. Die angeführten Sätze reichen hin, um die vorher aufgestellten Formeln für Kurven und Oberflächen mit der grössten Leichtigkeit zu diskutiren, wozu ich die folgenden zwei Beispiele wähle.

323. Die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die fünf Punkte a, b, c, d, e geht, von denen keine drei in einer geraden Linie liegen, ist

$$[xa(cd)(ab\cdot de)(bc)ex] = 0, \text{ oder}$$
$$[xaBc_1Dex] = 0,$$

wo $B = [cd]$, $c_1 = [ab\cdot de]$, $D = [bc]$ ist.

Beweis. Das Produkt der linken Seite ist, da die Summe der Stufenzahlen 12 durch 3 theilbar ist, von nullter Stufe. Dass nicht jeder Punkt x der Gleichung genügt, davon überzeugt man ſich leicht. Zieht man z. B. eine Linie ap, die nicht durch e geht, und nimmt an, x ſolle in dieſer geraden Linie liegen, aber nicht in a, ſo ist $[xa] \equiv [pa]$, ſomit können wir (nach 313) statt xa in der obigen Gleichung pa einſetzen, und erhalten

$$[paBc_1Dex] = 0,$$

d. h. der Punkt x muss in der geraden Linie liegen, die durch den Punkt $[paBc_1D]$, welcher q heisset, und durch den Punkt e geht; zugleich ſoll er nach der Annahme in der geraden Linie ap liegen, alſo zugleich in qe und ap, dieſe beiden geraden Linien ſind nothwendig verschieden, da e nicht in ap liegt, alſo treffen ſie ſich nur in einem Punkte, d. h. die gerade Linie ap enthält ausser dem Punkte p nur Einen Punkt, der der obigen Gleichung genügt. Alſo genügt ihr nicht jeder Punkt. Somit ist der geometrische Ort für x (nach 309) eine Kurve zweiter Ordnung, alſo ein Kegelschnitt. Es ist nur noch zu zeigen, dass er durch die fünf Punkte a,··· e geht, d. h. dass wenn x mit irgend einem der fünf Punkte a····e zuſammenfällt, die Gleichung erfüllt wird. Fällt x mit a zuſammen, ſo wird $xa = 0$, alſo auch das ganze Produkt, dasſelbe gilt für $x \equiv e$, wenn man die Gleichung (nach 317) in der Form

$$[xeDc_1Bax] = 0 \qquad [104]$$

schreibt. Wird $x \equiv c$, ſo wird $[ca(cd)] \equiv [cad]c$, und dies ist wieder $\equiv c$, da [cad] eine von Null verschiedene Zahl ist, alſo ist

$$[ca(cd)(ab\cdot de)(bc)ec] \equiv [c(ab\cdot de)(bc)ce]$$
$$\equiv [(ab\cdot de)c(bc)ce] \qquad [314]$$
$$\equiv [(ab\cdot de)(bc)cce] \qquad [123]$$
$$\equiv [(ab\cdot debc][cce], \text{ da } [(ab\cdot de)bc] \text{ von}$$

nullter Stufe, d. h. eine Zahl ist. Hier ist [ccc] (nach 60)

$= 0$, alſo auch das ganze Produkt null. Wird $x \equiv d$, ſo wird $[da \cdot cd] \equiv [da \cdot dc]$ (No. 314) $= [dac]d$ (No. 104) $\equiv d$. Somit wird dann

$$\begin{aligned}[da(cd)(ab \cdot de)(bc)ed] &\equiv [d(ab \cdot de)(bc)ed] \\ &\equiv [ab(de)d(bc)ed] && [314] \\ &\equiv [abd(de)(bc)ed] && [123] \\ &\equiv [abd][(de)(bc)(de)], && [40]\end{aligned}$$

weil $[abd]$ eine Zahl iſt. Aber $[de \cdot bc \cdot de]$ iſt null (nach 295), alſo das ganze Produkt $= 0$. Wird $x \equiv b$, ſo ergiebt ſich auf gleiche Weiſe aus der umgekehrten Gleichungsform, dass der Gleichung genügt wird. Somit ſind alle fünf Punkte $a \cdots e$ Punkte des Kegelschnittes.

324. Wenn A, B, C drei gerade Linien im Raume ſind, von denen keine zwei ſich schneiden, ſo iſt

$$[xABCx] = 0$$

die Gleichung derjenigen Fläche zweiter Ordnung, auf welcher die drei geraden Linien A, B, C liegen.

Beweis. Die Summe der Stufenzahlen iſt 8, alſo durch 4 theilbar, alſo das Produkt als stereometrisches von nullter Stufe. Nicht jeder Punkt x genügt ihr. Denn legt man durch die gerade Linie A eine Ebene α, und nimmt an, der Punkt x liegt in dieſer Ebene, aber ausserhalb A, ſo iſt $[xA] \equiv \alpha$, alſo $[xABC] \equiv [\alpha BC]$, und zwar von Null verſchieden (nach 322). Es iſt aber αB ein Punkt und $[\alpha BC]$ die durch dieſen Punkt und die gerade Linie C gelegte Ebene. Die Gleichung

$$[\alpha BCx] = 0$$

ſagt aus, dass der Punkt x in dieſer Ebene liegen muss, er liegt aber nach der Annahme auch in der Ebene α, alſo in beiden zugleich. Beide Ebenen fallen aber nicht zuſammen, da ſonſt A und C in dieſer Ebene liegen, alſo ſich schneiden müssten gegen die Annahme. Alſo muss x dann in der Durchschnittskante beider Ebenen liegen, um der Gleichung zu genügen. Somit genügt ihr nicht jeder Punkt. Da nun das obige Produkt von nullter Stufe iſt, x zweimal als Faktor enthält, und nicht durch jeden Punkt x erfüllt wird, ſo iſt (nach 311) der Ort von x eine Oberfläche zweiter Ordnung. In ihr liegen A und C, denn wenn x in A liegt, ſo wird

$[xA] = 0$, alſo das Produkt null, ebenſo wenn x in C liegt. Liegt endlich x in B, ſo hat man

$$[xABCx] \equiv [AxBCx] \quad [314]$$
$$\equiv [ABxCx] \quad [123]$$
$$\equiv [AB][xCx],$$

da [AB] von nullter Stufe iſt; endlich xCx (nach 60) null, alſo das Produkt gleich null, d. h. jeder Punkt x, der in C liegt, genügt der Gleichung.

Anm. Für den umgekehrten Satz, dass jede algebraische Kurve der Ebene ſich in Form eines gleich null geſetzten planimetrischen Produktes darstellen lässt, kommt es darauf an, jede algebraische Funktion der Koordinaten eines Punktes in Form eines planimetrischen Produktes darzustellen. Dieſe Aufgabe wird gelöst ſein, wenn bei irgend einer Methode, die Zahlen räumlich darzustellen, ſo wohl das Produkt als auch die Summe zweier räumlich dargestellter Zahlen durch ein planimetrisches Produkt dargestellt werden können. Das Entsprechende gilt für die algebraischen Oberflächen. Für den ersten Fall wollen wir die Entwickelung ſo weit führen, dass aus jeder gegebenen algebraischen Gleichung ſogleich die entsprechende planimetrische abgeleſen werden kann.

325. Es ſei c ein einfacher Punkt, a und b ſeien zwei nicht parallele Strecken, und x ein beliebiger einfacher Punkt der Ebene cab, und zwar ſei $x = x_1a + x_2b + c$. Es ſei $d = a + b + c$ (d. h. d ſei in einem Parallelogramme, deſſen eine Ecke c ist, und deſſen von dieſer Ecke ausgehende Seiten mit a und b gleich lang und gleichgerichtet ſind, die der Ecke c gegenüberliegende Ecke). Wenn dann (x_1) und (x_2) diejenigen Punkte der Diagonale cd ſind, für welche die Gleichungen

$$[c(x_1)] : [cd] = x_1, \quad [c(x_2)] : [cd] = x_2$$

gelten, ſo ist

$(x_1) \equiv [xbC]$, $(x_2) \equiv [xaC]$ und $[(x_1)b] = [xb]$, $[(x_2)a] = xa$, wo der Kürze wegen [cd] mit C bezeichnet ist.

Beweis. Nach 221 ist, da die Punkte c, (x_1), d in gerader Linie liegen, und $c(x_1) : cd = x_1 : 1$ ſich verhält,

$$(x_1) - c = x_1(d - c) = x_1(a + b),$$

da (nach Hyp.) $d = a + b + c$ war, alſo

$$(x_1) = x_1a + x_1b + c, \text{ folglich}$$
$$[(x_1)b] = [(x_1a + c)b] \quad [67]$$

und
$$[xb] = [(x_1a + x_2b + c)b] \quad [\text{Hyp.}]$$
$$= [(x_1a + c)b] \quad [67].$$

Folglich $[(x_1)b] = [xb]$.

Hier ist [xb] eine gerade Linie, welche durch x mit b parallel gezogen ist; in dieſer Linie liegt nach der letzten Gleichung der Punkt (x_1); es liegt derſelbe aber nach der Vorausſetzung auch in der Geraden cd oder C, alſo im Durchſchnitt beider, folglich iſt

$$(x_1) \equiv [xbC].$$

Aus gleichem Grunde iſt $[(x_2)a] = xa$ und $(x_2) \equiv [xaC]$.

326. Wenn a, b, c, d dieſelbe Bedeutung wie im vorigen Satze haben, und p, q zwei beliebige Zahlen ſind und man, ähnlich wie im vorigen Satze, unter (p), (q), (pq) diejenigen Punkte der geraden Linie cd verſteht, für welche die Gleichungen

(a) $[c(p)]:[cd]=p$, $[c(q)]:[cd]=q$, $[c(pq)]:[cd]=pq$

gelten, ſo iſt, wenn der Kürze wegen

(b) $[da]=A$, $[db]=B$, $[dc]=C$

geſetzt ſind,

$$(pq) \equiv [(p)aBc((q)b)aC] \equiv [(p)bAc((q)a)bC]$$
$$[(pq)a] \equiv [(p)aBc((q)b)a]$$
$$[(pq)b] \equiv [(p)bAc((q)a)b].$$

Beweis. Setzt man in die dritte der Gleichungen (a) für p und q ihre Werthe aus den beiden erſten, ſo erhält man die Proportion

$$[c(pq)] : [c(p)] = [c(q)] : [cd].$$

Aus dieſer Proportion und daraus, daſs die fünf Punkte c, d, (p), (q), (pq) in gerader Linie liegen, folgt ſogleich, wenn wir den Punkt (pq) der Kürze wegen mit r bezeichnen, daſs c der Aehnlichkeitspunkt der beiden Punktvereine r, (q) und (p), d iſt. Zieht man daher über den Grundſeiten r(q) und (p)d die parallelen Dreiecke r(q)e und (p)df, ſo iſt c auch Aehnlichkeitspunkt dieſer Dreiecke, folglich liegen die entſprechenden Punkte e und f mit c in gerader Linie, wodurch r gefunden werden kann. Nimmt man ins Beſondere re und (p)f parallel mit a, und (q)e und df parallel mit b, ſo wird

$$f \equiv [(p)a \cdot db] \equiv [(p)aB],$$

da $[db] = B$ geſetzt war; ferner

$$e \equiv [fc \cdot (q)b], \quad r \equiv [ea \cdot cd] \equiv [eaC],$$

da $[dc] \equiv C$ gefetzt war, und endlich

$$[ra] \equiv [ea],$$

was ſich alles unmittelbar ergiebt, wenn man die betreffende Figur zeichnet. Setzt man in die letzten beiden Gleichungen die Werthe aus den beiden ersten ein, ſo erhält man

$$r \equiv [(p)aBc((q)b)aC]$$
$$[ra] \equiv [(p)aBc((q)b)a],$$

und ſetzt man in der obigen Beweisführung überall b statt a und umgekehrt, und A statt B, ſo erhält man

$$r \equiv [(p)bAc((q)a)bC]$$
$$[rb] \equiv [(p)bAc((q)a)b],$$

und dies ſind, da $r = (pq)$ ist, die zu erweiſenden Gleichungen.

327. Wenn a, b, c, d, A, B, C die Bedeutung haben wie im vorigen Satze und p, q, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ beliebige Zahlen ſind, jedoch mit der Beſchränkung, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ von Null verſchieden ſei, wenn ferner

$$(a) \quad r = \frac{\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$$

ist, und wie vorher (p), (q), (r) diejenigen Punkte der geraden Linie $[cd] \equiv C$ ſind, welche den Gleichungen

$$(b) \quad [c(p)] : C = p, \; [c(q)] : C = q, \; [c(r)] : C = r$$

genügen, ſo ist

$$(r) \equiv [(p)a((q)b)(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)C].$$

Beweis. Substituirt man in der Gleichung $\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})r$ statt p, q, r ihre Werthe aus b, ſo erhält man

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})[c(r)] = \mathfrak{a}[c(p)] + \mathfrak{b}[c(q)],$$

oder, da alles in derſelben geraden Linie liegt,

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})((r) - c) = \mathfrak{a}((p) - c) + \mathfrak{b}((q) - c) \quad [222],$$

alſo

$$* \quad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(r) = \mathfrak{a}(p) + \mathfrak{b}(q),$$

d. h. (r) ist der Schwerpunkt zwiſchen den vielfachen Punkten $\mathfrak{a}(p)$ und $\mathfrak{b}(q)$. Zieht man nun von (q) die Parallele mit b, und von (p) die Parallele mit a, welche ſich in e ſchneiden, und ebenſo von d und c die Parallelen mit b und a, welche ſich in f ſchneiden, ſo ſind die Dreiecke dfc und (q)e(p) parallel, und alſo ähnlich, und es ist dann $d - f = b$ und

$f - c = a$. Wenn alſo $(q) - e = m(d - f)$ iſt, wo m eine Zahl bedeutet, ſo iſt $e - (p) = m(f - c)$, d. h. es iſt dann $(q) - e = mb$, $e - (p) = ma$. Ferner, wenn man zu der obigen Gleichung (*) auf beiden Seiten $-(a + b)e$ hinzufügt, ſo erhält man

$$(a + b)((r) - e) = a((p) - e) + b((q) - e) = -maa + mbb$$
$$= -m(aa - bb).$$

Multiplicirt man beide Seiten planimetriſch mit e, ſo erhält man (nach 67)

$$(a + b)[e(r)] = -m[e(aa - bb)], \text{ alſo}$$
$$[e(r)] \equiv [e(aa - bb)] \qquad [2],$$

d. h. (r) liegt in der geraden Linie $[e(aa - bb)]$, aber (nach der Annahme) auch in der geraden Linie C, alſo im Durchſchnitt beider Linien, d. h.

$$(r) \equiv [e(aa - bb)C].$$

Nun iſt aber nach der angegebenen Konſtruktion e der Durchſchnitt der geraden Linie $[(p)a]$ und $[(q)b]$, alſo $e \equiv [(p)a \cdot (q)b]$, folglich

$$(r) \equiv [(p)a((q)b)(aa - bb)C].$$

Anm. Wenn auf die angegebene Weiſe die Zahlen durch Punkte der geraden Linie cd dargeſtellt ſind, ſo läſst ſich nach den beiden vorigen Sätzen ſowohl die Summe als auch das Produkt zweier Zahlen, alſo auch jede beliebige ganze Funktion von Zahlen durch ein planimetriſches Produkt darſtellen, welches aus den Punkten a, b, c, d und aus den die gegebenen Zahlen darſtellenden Punkten zuſammengeſetzt iſt. Hiermit wäre ſchon der Satz bewieſen, dass jede algebraiſche Kurve in der Ebene ſich durch ein gleich Null geſetztes planimetriſches Produkt darſtellen läſst. Doch ſoll im Folgenden noch gezeigt werden, wie man unmittelbar aus der gegebenen algebraiſchen Gleichung der Kurve jenes planimetriſche Produkt herleiten kann.

328. Wenn a und b Strecken ſind, c ein einfacher Punkt und $d = a + b + c$, $A \equiv [da]$, $B \equiv [db]$, $C \equiv [dc]$, $x = x_1 a + x_2 b + c$ iſt, ſo iſt die Gleichung

$$f(x_1, x_2) = \alpha x_1^m x_2^n + \beta x_1^p x_2^q + \gamma x_1^r x_2^s + \cdots + \varphi x_1^v x_2^w = 0,$$

in welcher die Summe der Koefficienten von null verſchieden iſt, für alle endlich entfernten Punkte x, gleichbedeutend der Gleichung

$$[Pc] = 0,$$

wo, wenn die Glieder von $f(x_1, x_2)$ ſo geordnet ſind, dass

die Summen $a+b$, $a+b+c, \cdots$ alle von Null verschieden sind,

(a) $P \equiv [LL_1a_1CaL_2a_2CaL_3a_3Ca \cdots\cdots L_ka_k]$

(b) $a_1 = aa - bb$, $a_2 = (a+b)a - cb$, $a_k = (a+b+\cdots+i)a - kb$

(c) $L \equiv [xb\mathfrak{R}^nCa\mathfrak{R}_1^{m-1}]$

(d) $L_1 \equiv [xa\mathfrak{R}_1^pCb\mathfrak{R}^{q-1}]$, $L_2 \equiv [xa\mathfrak{R}_1^rCb\mathfrak{R}^{s-1}], \cdots$
$L_k \equiv [xa\mathfrak{R}_1^vCb\mathfrak{R}^{w-1}]$

ist, und $\mathfrak{R}$ die Reihe der fortschreitenden Faktoren A, c, xa, b und $\mathfrak{R}_1$ die Reihe der fortschreitenden Faktoren B, c, xb, a bezeichnet, so dass also für jede Linie X,

(e) $[X\mathfrak{R}] \equiv [XAc(xa)b]$, $[X\mathfrak{R}_1] \equiv [XBc(xb)a]$ ist.

Beweis. Bezeichnen wir, wenn p eine beliebige Zahl ist, mit (p) denjenigen Punkt der Linie cd, für welchen

* $[c(p)] : [cd] = p$

ist, so erhalten wir (nach 323)

** $[(x_1)b] = [xb]$, $[(x_2)a] = [xa]$,

und (nach 324), wenn p eine beliebige Zahl ist,

$[(px_2)b] \equiv [(p)bAc((x_2)a)b] \equiv [(p)bAc(xa)b]$ [**]
$\equiv [(p)b\mathfrak{R}]$ [e].

Tritt zu px_2 noch ein Faktor x_2 hinzu, so tritt zu $(p)b\mathfrak{R}$ noch einmal die Faktorreihe $\mathfrak{R}$ hinzu u. s. w., also ist

*** $[(px_2^n)\cdot b] \equiv [(p)b\mathfrak{R}^n]$;

und ebenso erhält man, indem man x_2 und b mit x_1 und a, also $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_1$ vertauscht,

**** $[(px_1^n)a] \equiv [(p)a\mathfrak{R}_1^n]$.

Also wenn $p = x_1$ ist, also $[(p)b] \equiv [(x_1)b] \equiv [xb]$ (nach *), so wird

$[(x_1x_2^n)\cdot b] \equiv [xb\mathfrak{R}^n]$.

Indem wir diesen Ausdruck mit C multipliciren, erhalten wir den Punkt $(x_1x_2^n)$, d. h.

$[(x_1x_2^n)] \equiv [xb\mathfrak{R}^nC]$.

Führt man daher $x_1x_2^n$ statt p in die Formel *** ein, indem man zugleich $m-1$ statt n setzt, so erhält man

$[(x_1^mx_2^n)\cdot a] \equiv [xb\mathfrak{R}^nCa\mathfrak{R}_1^{m-1}] \equiv L$ [c].

Ebenso findet man

$[(x_1^px_2^q)\cdot a] \equiv [xb\mathfrak{R}^qCa\mathfrak{R}_1^{p-1}]$,

oder, indem man a mit b, also auch x_1 mit x_2, p mit q, $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_1$ umwechselt,

$$[(x_1^p x_2^q)\cdot b] \equiv [xa\mathfrak{R}_1^p Cb\mathfrak{R}^{q-1}] \equiv L_1,$$

und ebenfo

$$[(x_1^r x_2^s)\cdot b] \equiv L_2$$
$$[(x_1^v x_2^w)\cdot b] \equiv L_k.$$

Um nun den Ausdruck für $(ax_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q) : (a + b)$ zu finden, hat man nur in 325 $x_1^m x_2^n$ und $x_1^p x_2^q$ statt p und q und alfo L und L_1 statt (p)a und (q)b zu fetzen, und erhält

$$((ax_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q) : (a + b)) \equiv [LL_1(aa - bb)C]$$
$$\equiv [LL_1 a_1 C] \qquad [b].$$

Um ferner den Ausdruck für $(ax_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q + cx_1^r x_2^s) : (a + b + c)$ zu finden, hat man nur in 325 den Ausdruck $(a_1 x_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q) : (a + b)$ statt p, und $x_1^r x_2^s$ statt q, und alfo L_2 statt (q)b und zugleich $a + b$ statt a, und c statt b zu fetzen, und erhält

$$((ax_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q + cx_1^r x_2^s) : (a + b + c)) \equiv [LL_1 a_1 CaL_2 a_2 C],$$

da $(a + b)a - cb = a_2$ gefetzt war u. f. f.; endlich

$$((ax_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q + cx_1^r x_2^s + \cdots + fx_1^v x_2^w) : (a+b+c+\cdots+f)$$
$$\equiv [LL_1 a_1 CaL_2 a_2 C \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot L_k a_k C]$$
$$\equiv [PC] \qquad [a].$$

Alfo

$$(f(x_1, x_2) : (a + b + c + \cdot\cdot f)) \equiv [PC].$$

Ist nun $f(x_1, x_2) = 0$, fo hat man $(0) \equiv [PC]$. Aber (nach *) ist $[c(0)] : [cd] = 0$, alfo der Dividend $[c(0)]$ gleich Null, d. h. der Punkt (0) fällt mit c zufammen, fomit erhalten wir dann $c \equiv [PC]$, d. h. c ist der Durchschnittspunkt der geraden Linie P und C; er liegt alfo auch in P, d. h. (nach 293)

$$[Pc] = 0.$$

Umgekehrt, wenn diefe letzte Gleichung erfüllt wird, fo liegt c in P, aber (nach Hypothefis) auch in C, alfo ist $c \equiv [PC]$, d. h. der zu der Zahl $f(x_1, x_2) : (a + b + \cdots)$ gehörige Punkt liegt in c, d. h. jene Zahl ist null, alfo ihr Zähler $f(x_1, x_2) = 0$.

329. Wenn alle übrigen Vorausfetzungen des vorigen Satzes bestehen bleiben, aber jetzt angenommen wird, dass die Summe der Koefficienten $(a + b + \cdots + f)$ null fei, fo ist die Gleichung

$$f(x_1, x_2) = 0,$$

gleichbedeutend der Gleichung

$$[LL_1a_1CaL_2a_2Ca\cdots\cdots L_{k-1}a_{k-1}L_kC] = 0,$$

wo die einzelnen Buchstaben dieſelbe Bedeutung haben, wie im vorigen Satze, und die Glieder in $f(x_1, x_2)$ auch hier ſo geordnet ſind, daſs die Summen $a + b$, $a + b + c, \cdots$ alle, mit Ausnahme der letzten $(a + b + c + \cdots + f)$, von Null verſchieden ſind.

Beweis. Man kann durch Diviſion mit dem Koefficienten des letzten Gliedes die Gleichung $f(x_1, x_2) = 0$ auf die Form bringen, daſs der Koefficient (f) des letzten Gliedes 1 wird; dann iſt die Summe der übrigen Koefficienten -1. Es ſei das letzte Glied $-h$ und die Summe der übrigen ſei g, ſo iſt die Gleichung $f(x_1, x_2) = 0$ gleichbedeutend der Gleichung $g - h = 0$, oder

$$g = h.$$

Dann iſt nach der Entwickelung des vorigen Satzes

$$(g) \equiv [LL_1a_1CaL_2a_2Ca\cdots\cdots L_{k-1}a_{k-1}C]$$
$$(h) \equiv [L_kC].$$

Da nun $g = h$ iſt, ſo ſind auch die Punkte (g) und (h) kongruent, alſo

$$[LL_1a_1CaL_2a_2Ca\cdots\cdots L_{k-1}a_{k-1}C] \equiv [L_kC].$$

Dieſe Kongruenz ſagt aus, daſs der durch die linke Seite dargeſtellte Punkt in dem Durchſchnitte der Linien L_k und C liege, alſo namentlich auch in L_k liege, d. h. (nach 293)

$$[LL_1a_1CaL_2a_2Ca\cdots L_{k-1}a_{k-1}CL_k] = 0$$

ſei. Hier kann man (nach 315) auch die beiden letzten Faktoren vertauſchen, wodurch die zu erweiſende Gleichung hervorgeht; umgekehrt folgt aus dieſer letzten Gleichung wieder $g = h$, alſo $f(x_1, x_2) = 0$.

Anm. Es iſt leicht zu erſehen, daſs man in den vorhergehenden Sätzen, ſtatt a und b als Strecken und c als einfachen Punkt anzunehmen, auch allgemeiner a, b und c als drei beliebige, nicht in Einer geraden Linie liegende Punkte hätte annehmen können, wobei dann die Bedingung, daſs x ein endlich entfernter Punkt ſein ſollte, erſetzt wird durch die andere, daſs x nicht in der geraden Linie ab liege. Der Grund für die Zuläſſigkeit dieſer Verallgemeinerung liegt darin, daſs (nach 110) die Geſetze der auf ein Hauptgebiet bezüglichen Multiplikation alle unverändert beſtehen bleiben, wenn man ſtatt der urſprünglichen Einheiten a, b, c drei andere aus ihnen

numerisch ableitbare wählt, wobei die dort aufgeführte Bedingung, dass das kombinatorische Produkt jener sowohl als dieser Einheiten 1 sei, hier, wo es nur auf die Kongruenz ankommt, wegfällt. Betrachtet man die Formen der Gleichungen in 328, so zeigt sich leicht, dass die planimetrische Gleichung $[Pc] = 0$ in Bezug auf x vom so vielten Grade ist, als die Summe aller Exponenten in der algebraischen Gleichung $f = 0$ beträgt; denn die Faktorenreihen $\mathfrak{R}$ enthielten den Punkt x nur je einmal, und die Grössen L waren daher mit den Gliedern der Funktion f nach der Reihe von gleichem Grade. Das Produkt [Pc], welches jede dieser Grössen L einmal als Faktor enthält, und ausserdem nur konstante Faktoren, ist daher in Bezug auf x vom so vielten Grade, als die Summe der Gradzahlen aller Glieder von f beträgt, also, sobald f mehr als ein variables Glied enthält, von höherem Grade als f. Es sei n der Grad der Funktion f, und $n + p$ der Grad des Produktes [Pc]. Da nun die Gleichungen $[Pc] = 0$ und $f = 0$ (nach 328) für alle Punkte x, die nicht in der (unendlich entfernten) Geraden ab liegen, ganz gleichbedeutend sind, so kann die Differenz des Grades nur darin liegen, dass die Gleichung $[Pc] = 0$ noch p Linien darstellt, welche in ab fallen. Um diese Verhältnisse genauer zu überschauen, führe ich statt x den Punkt y ein, und setze $y = ua + vb + wc$, wo u, v, w Zahlen sind, und setze die ursprünglichen Koordinaten von x beziehlich gleich $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$. Dann wird $y = xw$, also $y \equiv x$, falls nicht w null ist. Dieser Fall, wo $w = 0$ ist, ist aber derselbe, wo $y = ua + vb$, d. h. y ein Punkt der Linie ab ist, also derselbe, welcher in 328 ausgeschlossen war. In allen dort zugelassenen Fällen wird also das Produkt, welches aus [Pc] hervorgeht, indem man hierin y statt x setzt, und welches ich mit Q bezeichnen will, mit [Pc] kongruent (nach 313). Multiplicirt man die Funktion n-ten Grades f mit w^n, so geht aus f, da die darin enthaltenen Variabeln $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ waren, eine homogene Funktion n-ten Grades hervor, welche ich mit F bezeichnen will, und welche für dieselben Fälle null wird, für welche f null wurde. Also ist für den Fall, dass y nicht in ab liegt, d. h. w nicht null ist, die Gleichung $Q = 0$ gleichbedeutend mit der Gleichung $F = 0$. Da aber die erstere vom $n + p$-ten, die letztere vom n-ten Grade ist, so muss die Gleichung $Q = 0$ in allen Fällen der Gleichung $w^p F = 0$ gleichbedeutend sein, also

$$Q \equiv w^p F \equiv [aby]^p F,$$

letzteres, weil aus $y = ua + vb + wc$ folgt $w \equiv [aby]$. Es muss also Q durch $[aby]^p$ theilbar sein. Es käme daher darauf an, das planimetrische Produkt Q in ein kongruentes Produkt zu verwandeln, welches von diesen Faktoren [aby] befreit sei. Allein

da diese Reduktion, wenn sie überhaupt ausführbar ist, in der Regel auf grosse Schwierigkeiten stösst, so ist es zweckmässig, zuerst die algebraische Gleichung durch Veränderung des Koordinatensystemes so umzugestalten, dass sie möglichst wenig variable Glieder enthält, ehe man zur Ableitung der planimetrischen Formel schreitet. So z. B. lässt sich die Gleichung dritten Grades auf die Form $pqr = ms^3$ bringen, wo p, q, r, s lineare Funktionen der Koordinaten sind, und m eine konstante Zahl bezeichnet. Verlegt man dann durch Projektion die gerade Linie, deren Gleichung $s = 0$ ist, ins Unendliche, so wird die Gleichung

$$pqr = m,$$

welche nach den obigen Regeln umgewandelt, eine geometrische Gleichung dritten Grades liefert von der Form

$$[xaBc(xb)aCdEfx] = 0,$$

und welche bei jeder Projektion bestehen bleibt, also auch, wenn man der ins Unendliche verlegten Linie durch Projektion wieder die ursprüngliche Lage giebt. Es hat keine Schwierigkeit, die hier entwickelten Principien auch auf die Oberflächen im Raume zu übertragen; doch muss ich, um hier nicht zu weitläuftig zu werden, auf meine Abhandlungen in Crelle's Journal, namentlich auf Band 49, pag. 1 u. f. verweisen.

§. 7. Innere Multiplikation in der Geometrie.

330. Erklärung. Für die innere Multiplikation nehme ich als ursprüngliche Einheiten im Raume stets drei zu einander senkrechte und gleich lange Strecken (e_1, e_2, e_3), in der Ebene deren zwei (e_1 und e_2) an, und zwar nehme ich die Längen dieser Strecken als Einheit der Längen an, und $[e_1e_2e_3]$ und in der Ebene $[e_1e_2]$ als Einheit der Körper- oder Flächenräume.

Anm. Hierdurch sind also alle von dem Begriffe der inneren Multiplikation abhängigen Erklärungen und Sätze (No. 137–215) auch auf die Geometrie übertragen.

331. Für die Ebene fällt der Begriff der Länge mit dem des numerischen Werthes, der Begriff des Senkrechten mit dem des Normalen, und der Begriff der Drehung um den Winkel α mit dem der circulären Aenderung um den Winkel α zusammen, wobei der Winkel als positiv anzunehmen ist, wenn sein zweiter Schenkel vom ersten aus nach derselben Seite liegt, wie die zweite Einheit (e_2) von der ersten (e_1) aus.

Beweis 1. Alle im Satze genannten analytischen Begriffe (normal, numerischer Werth, circuläre Aenderung) find (in 151—154) an den Begriff des inneren Produktes, und diefer wiederum (nach 137) an den der Ergänzung (89 und 90). Die Ergänzung von a war mit |a bezeichnet. Ich zeige daher zuerst, dass wenn $a = x_1e_1 + x_2e_2$ eine beliebige Strecke der Ebene ist, dann |a gegen a fenkrecht und mit a gleich lang ist, und von a aus nach derfelben Seite liegt, wie e_2 von e_1. Es fei AB mit x_1e_1 gleich lang und gleichgerichtet, BC mit x_2e_2, AD mit $x_1|e_1$, und DE mit $x_2|e_2$. Nach 89 ist $|e_1 = e_2$, und $|e_2 = -e_1$, alfo $AD = x_1e_2$, $DE = -x_2e_1$. Da nun (nach 330) e_1 und e_2 gleich lang find, fo ist auch x_1e_2 mit x_1e_1 gleich lang, d. h. AD mit AB, und ebenfo $-x_2e_1$ mit x_2e_2 gleich lang, d. h. DE mit BC. Da ferner (nach 330) e_2 zu e_1 fenkrecht ist, fo ist auch x_2e_2 zu x_1e_1 fenkrecht und x_2e_1 zu x_1e_2, d. h. BC zu AB und DE zu AD, folglich find die Dreiecke ABC und ADE kongruent (durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel), alfo AC gleich lang mit AE. Ferner liegt aber auch e_2 von e_1 aus nach derfelben Seite, wie $-e_1$ von e_2 aus, alfo auch BC von AB aus nach derfelben Seite, wie DE von AD aus, d. h. die Winkel BAC und DAE find auch dem Zeichen nach gleich. Nun ist $\angle CAE = \angle CAD + DAE = \angle CAD + BAC$ (wie oben gezeigt) $= \angle BAD$, d. h. AE steht fenkrecht auf AC, und zwar nach derfelben Seite hin, wie AD von AB aus, alfo auch wie e_2 von e_1 aus. Es ist aber (nach 220) AC mit $x_1e_1 + x_2e_2$, d. h. mit a gleich lang und gleichgerichtet, und AE mit $x_1|e_1 + x_2|e_2$, d. h. mit |a (nach 101). Alfo ist |a mit a gleich lang, und steht auf a fenkrecht nach derfelben Seite hin wie e_2 auf e_1.

2. Numerischer Werth von a ist (nach 151) die pofitive Quadratwurzel aus [a|a], wobei (nach 89) das Produkt $[e_1e_2]$ als Einheit gefetzt ist. Nun ist [a|a] (nach 254) einem Parallelogramme gleich (auch dem Zeichen nach), dessen erste Seite mit a, und dessen zweite mit |a gleich lang und gleichgerichtet ist; dies Parallelogramm ist (nach Beweis 1) ein Quadrat, welches dem (nach 330) als Einheit angenommenen Quadrate $[e_1e_2]$ gleichbezeichnet ist, ist nun die Länge von

a (e_1 als Längeneinheit genommen) gleich α, so ist der Inhalt des Quadrates über a gleich α^2, und die positive Quadratwurzel daraus α, d. h. $\sqrt{[a|a]} = \alpha$, d. h. der numeriche Werth gleich der Länge.

3. Nach 152 heissen zwei Strecken a und b normal zu einander, wenn $[a|b] = 0$ ist, d. h. (nach 254) wenn a mit |b parallel ist; nun ist (nach Beweis 1) |b senkrecht auf b, also auch das mit |b parallele a senkrecht auf b; ebenso folgt umgekehrt, dass wenn a auf b senkrecht ist, a mit |b parallel ist, also [a|b] gleich null, also a zu b normal ist. Der Begriff des Senkrechten fällt also (in der Ebene) mit dem des Normalen zusammen.

4. Wenn a und b einander numerisch gleich und zu einander normal sind, und sich a in $a' = a\cos.\alpha + b\sin.\alpha$, und b in $b' = b\cos.\alpha - a\sin.\alpha$ verwandelt hat, so hiess das (nach 154), der Verein der Strecken a und b habe sich von a nach b hin circulär um den Winkel α geändert. Es sei AF mit a und AG mit b gleich lang und gleichgerichtet, also, da a und b einander numerisch gleich und zu einander normal sind, so ist (nach Beweis 1) AG mit AF gleich lang und auf AF senkrecht; man trage an AF und an AG nach derselben Seite hin den Winkel α an, und mache die zweiten Schenkel AC und AE gleich lang mit AF; fälle von C das Loth CB auf AF und von E das Loth ED auf AG, so ist AB mit $a\cos.\alpha$, BC mit $b\sin.\alpha$, AD mit $b\cos.\alpha$, DE mit $-a\sin.\alpha$ gleich lang und gleichgerichtet, also (nach 220) AC mit $a\cos.\alpha + b\sin.\alpha$, d. h. mit a', und AE mit $b\cos.\alpha - a\sin.\alpha$, d. h. mit b' gleich lang und gleichgerichtet; a' und b' gehen aber nach der Konstruktion aus a und b durch Drehung um den Winkel α hervor; folglich fällt der Begriff der Drehung um den Winkel α mit dem der circulären Aenderung um diesen Winkel zusammen.

Anm. Dieselbe Schlussreihe ist also für jede Ebene anwendbar, in welcher zwei Strecken a und b enthalten sind, für welche dieselben Voraussetzungen gemacht sind, wie für e_1 und e_2.

332. Das Normalsystem im Raume ist identisch mit dem Verein von drei gegeneinander senkrechten und gleich langen

Strecken, und zwar ist die Länge dieſer Strecken gleich dem numeriſchen Werthe des Normalſyſtems.

Beweis 1. Das System der urſprünglichen Einheiten e_1, e_2, e_3 bildet (nach 162) ein einfaches Normalſyſtem, und e_1, e_2, e_3 ſind (nach 330) auf einander ſenkrecht und von der Länge der Einheit. Jedes andere einfache Normalſyſtem von drei Strecken läſst ſich (nach 161) aus jenem Noramlſyſtem durch circuläre Aenderung ableiten. Hat man nun ein einfaches Normalſyſtem a, b, c, in welchem a, b, c auf einander ſenkrecht und von der Länge eins ſind, ſo beſteht die circuläre Aenderung darin, dass irgend zwei derſelben, z. B. a und b ſich um einen in der Ebene ab liegenden Winkel α ändern; nun haben wir in 331 (vergl. Anm.) gezeigt, dass die dadurch hervorgehenden Strecken a′ und b′ wieder auf einander ſenkrecht ſtehen, und die Länge 1 haben; aber auch c ſteht auf ihnen ſenkrecht, denn da nach der Annahme c auf a und b ſenkrecht ſteht, ſo ſteht c auch auf allen Linien der Ebene ab, alſo auch auf a′ und b′ ſenkrecht; d. h. aus einem Normalſyſtem, deſſen drei Strecken auf einander ſenkrecht ſtehen, und von der Länge der Einheit ſind, geht durch einfache circuläre Aenderung wieder ein Normalſyſtem von derſelben Art hervor, alſo auch durch wiederholte circuläre Aenderung. Alſo geht namentlich aus dem Normalſyſtem e_1, e_2, e_3 durch beliebig circuläre Aenderung ſtets ein Verein von drei Strecken hervor, welche auf einander ſenkrecht, und von der Länge der Einheit ſind, d. h. jedes einfache Normalſyſtem beſteht aus ſolchen drei Strecken.

2. Umgekehrt iſt zu zeigen, dass wenn a, b, c irgend drei zu einander ſenkrechte Strecken von der Länge 1 ſind, ſie ein Normalſyſtem bilden. Nach 160 kann man ſtets ein einfaches Normalſyſtem von drei Strecken finden, deſſen eine die Richtung von c hat, dann muss (nach Beweis 1) die Länge 1 ſein, und alſo die Strecke, welche die Richtung von c hat, auch mit c gleich lang, alſo überhaupt gleich ſein, die beiden andern mögen a′ und b′ ſein, ſo iſt (nach Beweis 1) c ſenkrecht auf a′ und b′, aber auch (nach Annahme) auf a und b, alſo liegen a′, b′, a, b in Einer Ebene. Alſo kann man wiederum

(nach 160) ein einfaches Normalſyſtem aus zwei Strecken dieſer Ebene finden, von denen die eine Strecke gleich b iſt, die andere ſei a'', ſo iſt a'', da es in der Ebene ab liegt, ſenkreckt auf c, aber (nach Beweis 1) auch ſenkrecht auf b und von der Länge 1, alſo iſt a'' ſenkrecht auf der Ebene bc, aber auch a ſenkrecht darauf und von der Länge 1, alſo iſt a'' entweder $= a$, oder $= -a$, da nun a'', b, c ein einfaches Normalſyſtem bilden, ſo bilden in beiden Fällen auch a, b, c ein ſolches.

3. Hat man nun ein beliebiges Normalſyſtem a, b, c von dem numeriſchen Werth n, ſo bilden $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}$ ein einfaches Normalſyſtem, ſind alſo (nach Beweis 1) zu einander ſenkrecht und von der Länge 1, alſo ſind a, b, c auch zu einander ſenkrecht und von der Länge n; und ebenſo folgt umgekehrt, dass wenn a, b, c zu einander ſenkrecht und von der Länge n ſind, dann $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}$ ein einfaches Normalſyſtem, und a, b, c ein Normalſyſtem von der Länge n bilden.

333. Auch für den Raum fällt der Begriff der Länge mit dem des numeriſchen Werthes, und der des Senkrechten mit dem des Normalen zuſammen.

Beweis in 332.

334. Der numeriſche Werth eines Produktes P zweier Strecken p und q iſt gleich dem Flächeninhalte des Parallelogramms, in welchem zwei aneinanderſtoſſende Seiten jenen Strecken parallel ſind, vorausgeſetzt, dass dieſer Inhalt poſitiv, und das Quadrat der Längeneinheit als Flächeneinheit angenommen wird.

Beweis. Es ſei ein einfaches Normalſyſtem dreier Strecken a, b, c angenommen, von der Art, dass a und b derſelben Ebene parallel ſind, welcher p und q parallel ſind, und dass $[abc] = +1$ iſt, ſo ſind (nach 230) p und q aus a und b numeriſch ableitbar, alſo auch (nach 36) $P = [pq]$ aus $[ab]$, und ſei $P = \alpha[ab]$. Nun iſt der numeriſche Werth von P (nach 151) $= \sqrt{[P|P]} = \alpha\sqrt{[ab|ab]}$; aber (nach 137) iſt $|[ab]$

$= c$, alſo $\sqrt{[P|P]} = \alpha[abc] = \alpha$. Da aber $P = \alpha[ab]$ iſt, und $[ab]$ Quadrat der Längeneinheit, alſo als Flächeneinheit zu ſetzen iſt, ſo iſt der Inhalt von P, d. h. der Inhalt des Parallelogramms, deſſen erſte Seite p, und deſſen zweite q iſt, gleich α, d. h. gleich dem numeriſchen Werthe von P.

335. Die Ergänzung einer Strecke iſt diejenige Fläche, deren Ebene auf jener Strecke ſenkrecht, deren numeriſcher Werth gleich dem jener Strecke, und deren poſitiver Sinn ſo beſtimmt iſt, daſs das äuſsere Produkt der Strecke und Fläche poſitiv iſt.

Beweis. Es ſei αa die Strecke, und ſei der numeriſche Werth von a gleich 1, alſo der von αa gleich α, und ſei ein Normalſyſtem a, b, c angenommen, und zwar von der Art, daſs $[abc] = +1$ iſt, ſo iſt (nach 167) $|a = [bc]$, alſo (nach 90) $|\alpha a = \alpha[bc]$, aber $\alpha[bc]$ iſt eine Fläche von der im Satze angegebenen Beſchaffenheit.

336. Wenn A die Ergänzung von einer Strecke a iſt, ſo iſt auch a die Ergänzung von A, oder

$$||a = a.$$

Beweis. Nach 92 iſt $||A = (-1)^{pq}A$, wo p die Stufenzahl von A, und q die der Ergänzung iſt. In unſerm Falle ſind dieſe Stufenzahlen 1 und 2, alſo

$$||a = (-1)^2 a = a.$$

Anm. Der Satz gilt nicht in entſprechender Weiſe für die Planimetrie, wo nicht mehr als zwei zu einander ſenkrechte Strecken angenommen werden können. Vielmehr iſt in der Planimetrie $||a = -a$.

337. Wenn a und b Strecken ſind, ſo iſt $\angle ab$ gleich dem Winkel, deſſen Schenkel mit a und b gleichgerichtet ſind, und wenn A und B Flächen (Streckenprodukte) ſind, ſo iſt $\angle AB$ gleich dem Neigungs-Winkel, den zwei mit jenen Flächen parallele und gleichbezeichnete Ebenen mit einander bilden, vorausgeſetzt, daſs die Winkel ſtets poſitiv (zwiſchen 0 und π liegend) angenommen werden.

Anm. Wenn man im zweiten Falle A und B in Form von Rechtecken darſtellt, deren erſte Seite dieſelbe iſt, ſo iſt der Winkel, den die zweiten Seiten dieſer Rechtecke einſchlieſsen, der Neigungswinkel, den die mit A und B parallelen und gleichbezeichneten Ebenen mit einander bilden.

Beweis 1. Der Winkel ist von den numerischen Werthen der den Winkel bildenden Grössen unabhängig, wir können daher die numerischen Werthe von a, b, A, B gleich 1 setzen, in diesem Falle ist (nach 195)

$$\cos.\angle ab = [a|b],\quad \cos.\angle AB = [A|B].$$

Ferner geht dann, wenn der Winkel von a nach b hin gleich α ist (nach 154, 331) b aus a durch circuläre Aenderung um den Winkel α hervor, d. h. es ist, wenn a' in der Ebene ab gegen a senkrecht ist, und nach der Seite von b hin liegt,

$$b = a\cos.\alpha + a'\sin.\alpha,$$

also

$$[a|b]=[a|(a\cos.\alpha+a'\sin.\alpha)]=[a|a]\cos.\alpha+[a|a']\sin.\alpha,$$

aber da a' gegen a normal ist, so ist $[a|a'] = 0$, und da der numerische Werth von a gleich Eins ist, so wird der zuletzt gefundene Ausdruck

$$= \cos.\alpha.$$

Also $\cos\angle ab = \cos.\alpha$. Nun liegt (nach 195) $\angle ab$ zwischen 0 und π, aber nach Voraussetzung auch α, also $\angle ab = \alpha$.

2. Es seien A und B beziehlich die Ergänzungen von a und b, also $A = |a$, und $B = |b$, so sind (nach 335) a und b beziehlich auf A und B senkrecht und nach derselben Seite hin liegend, also ist der Neigungswinkel α zwischen A und B gleich dem Winkel zwischen a und b, d. h. (nach Beweis 1) $\cos.\alpha = \cos.\angle ab = [a|b] = |[a|b]$ (nach 89), da $[a|b]$ (nach 141) eine Zahl ist; aber $|[a|b] = [|a||b]$ (nach 99), und dies wieder (nach der Annahme) $= [A|B] = \cos.\angle AB$; also $\cos.\alpha = \cos.\angle AB$.

Anm. Der Begriff des Normalen lässt sich zwar auf Grössen jeder Art, also auch auf Punkte anwenden. Namentlich muss man, um alle Grössen im Raume ableiten zu können, ausser den drei zu einander senkrechten Strecken von der Länge 1, die wir als ursprüngliche Einheiten setzten, noch einen vierten endlich entfernten Punkt als vierte Einheit annehmen. So würde man zu vier ursprünglichen Einheiten a, b, c, d gelangen, von denen etwa die drei letzten drei zu einander senkrechte Strecken von der Länge 1 sind, und die erste ein einfacher Punkt ist. Auf diesen Verein würde man den Begriff des Normalen anwenden können. Nimmt man statt dessen einen andern Verein a', b, c, d, worin a' einen von a verschiedenen einfachen Punkt bezeichnet, als das System der ursprünglichen Einheiten an,

ſo leuchtet ein, dass a und a' dieſelbe Ergänzung [bcd] haben, da (nach 268) [abcd] = [a'bcd] ist, und ebenſo, dass [a'b] und [ab] dieſelbe Ergänzung c, und [a'bc] und [abc] dieſelbe Ergänzung d haben, und überhaupt, dass die Ergänzung von Punkten, Linientheilen, Flächentheilen unabhängig ist von der Lage des als ursprüngliche Einheit angenommenen Punktes. Hingegen ist dies nicht mehr der Fall bei der Ergänzung von Strecken oder Streckenprodukten. So z. B. würde die Ergänzung von [bcd] bei der ersten Annahme gleich — a, bei der zweiten gleich — a' ſein. Und ſo würde alſo der Begriff der Ergänzung von Strecken und Streckenprodukten keinen von der Lage der ursprünglichen Einheiten unabhängigen Sinn mehr haben. Da bei der normalen Zurückleitung (164) auf Punkte, Linien und Ebenen nur die erste Art der Ergänzung hervortritt, ſo können wir dieſe Zurückleitung unmittelbar auf die Geometrie übertragen. Sie liefert hier, wie oben (164) angedeutet wurde, die ſenkrechte Projektion, was ich hier jedoch nicht weiter darlegen will. Ueberhaupt werde ich den Begriff der Ergänzung nur in dem im Texte gegebenen Sinne anwenden.

338. Die Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2[a|b] + b^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos.\angle ab + \beta^2,$$

wo α und β die Längen von a und b ſind, stellt die Erweiterung des pythagoreischen Satzes dar, nämlich: das Quadrat der Grundſeite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der Schenkelſeiten und des doppelten Produktes der Schenkelſeiten in den cos. des Aussenwinkels an der Spitze.

339. Die Formel

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2[b|c] + 2[c|a] + 2[a|b] \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos.\angle bc \\ &\quad + 2\gamma\alpha\cos.\angle ca + 2\alpha\beta\cos.\angle ab,\end{aligned}$$

wo α, β, γ die Längen der Strecken a, b, c ſind, stellt die Erweiterung jenes Satzes für den Raum dar.

340. Die Formel

$$\begin{aligned}(A+B+C)^2 &= A^2 + B^2 + C^2 + 2[B|C] + 2[C|A] + 2[A|B] \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos.\angle BC \\ &\quad + 2\gamma\alpha\cos.\angle CA + 2\alpha\beta\cos.\angle AB,\end{aligned}$$

wo α, β, γ die Flächeninhalte der Flächenräume A, B, C und $\angle BC$ u. ſ. w. die Neigungswinkel ihrer Ebenen ſind, stellt den Satz dar:

Das Quadrat der Grundfläche eines Tetraeders ist gleich

der Summe der Quadrate der Seitenflächen, vermindert um die doppelten Produkte je zweier dieſer Seitenflächen in den cosinus des von ihnen eingeschlossenen Neigungswinkels.

Beweis. Sind a, b, c die von der Spitze nach den Ecken der Grundſeite führenden Kanten ihrer Länge und Richtung nach, ſo ſind a — b, b — c, c — a die Kanten der Grundfläche. Die Grundfläche ist alſo (nach 254) $= \frac{[(a-b)(b-c)]}{2}$, während die Seitenflächen $= \frac{[bc]}{2}, \frac{[ca]}{2}, \frac{[ab]}{2}$ ſind. Bezeichnen wir die letzteren beziehlich mit A, B, C, und die Grundfläche $\frac{[(a-b)(b-c)]}{2}$ mit D, und bedenken, dass $[(a-b)(b-c)] = [ab] - [ac] - [bb] + [bc] = [ab] + [ca] + [bc]$ ist, ſo haben wir

$$D = A + B + C,$$

alſo

$$\begin{aligned} D^2 &= (A + B + C)^2 \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2[B|C] + 2[C|A] + 2[A|B] \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos.\angle BC \\ &\quad + 2\gamma\alpha \cos.\angle CA + 2\alpha\beta \cos.\angle AB. \end{aligned}$$

Aber $\angle BC$ ist der Winkel zwischen den Ebenen [ca] und [ab], d. h. zwischen — [ac] und [ab]. Der Winkel zwischen [ac] und [ab] ist aber der von den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders eingeschlossene, und alſo der Winkel zwischen — [ac] und [ab], d. h. $\angle BC$, deſſen Nebenwinkel, und dasſelbe gilt für die Winkel $\angle CA$ und $\angle AB$.

Anm. Man ſieht aus dieſer Darſtellung, wie ſich die Auflöſung des Tetraeders vermöge der Beziehung, dass eine Seitenfläche desſelben ſich als geometrische Summe der übrigen darstellen lässt, auf eine einfache Weiſe aus unſrer Analyſe ergeben muss. Und da wiederum das sphärische Dreieck oder die dreikantige Ecke ſich auf ein Tetraeder zurückführen lässt, in welchem drei Kanten Radien der Kugel ſind, ſo zeigt ſich, wie auch die sphärische Trigonometrie ſich eng daran anschliesst. Ich bemerke hier noch, dass alle Formeln der sphärischen Trigonometrie ſymmetrischer werden, wenn man, wie schon oben geschehen ist, statt der Neigungswinkel der Flächen ihre Aussenwinkel ſetzt. Dies zeigt ſich beſonders darin, dass dann die Winkel der Polarecke gleich den Seiten der urſprünglichen Ecke

werden, und umgekehrt, und daher dann alle Formeln der sphärischen Trigonometrie unmittelbar ihre Geltung behalten, wenn man Winkel und Seiten vertauscht. Es ergiebt sich unmittelbar, dass wenn a, b, c Strecken sind, die den Kanten einer Ecke gleichgerichtet sind, dann die Ergänzungen jener Strecken, d. h. die Flächenräume |a, |b, |c den Ebenen der Polarecke parallel sind. Die weitere Entwickelung dieser Ideen muss ich jedoch, um nicht zu weit von dem Ziele abzuschweifen, dem Leser überlassen.

341. Aufgabe. Die Vielfachensumme der Quadrate der Abstände eines variablen Punktes x von mehreren festen Punkten a, b, $\cdots$ in einfachster Form auszudrücken, wenn die Coefficienten $\alpha, \beta, \cdots$ jener Vielfachensumme gegeben sind.

Auflösung. Es soll demnach ein Ausdruck

$$S = \alpha(x-a)^2 + \beta(x-b)^2 + \cdots$$

in einfachster Form dargestellt werden. Da x, a, b, $\cdots$ Punkte sind, und für sie das innere Produkt keine einfache Bedeutung mehr hat, so nehmen wir einen beliebigen einfachen Punkt s zu Hülfe, und setzen

$$x-a = x-s+s-a,\quad x-b = x-s+s-b,$$

u. s. w., wo $x-s$, $s-a$, $s-b, \cdots$ Strecken sind, so wird

$$S = \alpha(x-s+s-a)^2 + \beta(x-s+s-b)^2 + \cdots.$$

Da nun $(x-s+s-a)^2 = (x-s)^2 + 2[(x-s)(s-a)] + (s-a)^2$ ist (nach 338), so erhalten wir

$$S = (\alpha+\beta+\cdots)(x-s)^2 + 2[(x-s)(\alpha(s-a) + \beta(s-b)+\cdots)] + \alpha(s-a)^2 + \beta(s-b)^2,$$

oder wenn wir

$$\alpha+\beta+\cdots = \sigma$$

setzen

$$S = \sigma(x-s)^2 + 2[(x-s)|(\sigma s - \alpha a - \beta b - \cdots)] + \alpha(s-a)^2 + \beta(s-b)^2 + \cdots.$$

Nun können wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem σ null ist oder nicht. Nehmen wir zuerst letzteres an, so können wir s so wählen, dass das zweite Glied null wird, was dadurch erreicht wird, dass wir

$$\sigma s = \alpha a + \beta b + \cdots,\ \text{d. h. } s \equiv \alpha a + \beta b + \cdots$$

setzen, d. h. (nach 222) s im Schwerpunkt des Punktsystems αa, βb, u. s. w. annehmen. Dann wird

$$S = \sigma(x-s)^2 + \mu,$$

wenn wir der Kürze wegen die konstante Grösse

$$\alpha(s-a)^2+\beta(s-b)^2+\cdots=\mu$$

ſetzen, d. h.:

„Die Vielfachenſumme S der Quadrate der Abstände eines variabeln Punktes x von mehreren konstanten Punkten a, b, ... erreicht, wenn α, β, ... die Koefficienten jener Vielfachenſumme ſind, und die Summe σ dieſer Koefficienten poſitiv ist, ihren kleinsten Werth, wenn x in den Schwerpunkt s des Punkt-Vereines αa, $\beta b\cdots$ liegt. Wenn ſich dagegen x aus dieſem Schwerpunkt s um den Abstand ϱ entfernt, ſo wächst jene Vielfachenſumme um das σ-fache von dem Quadrat dieſer Strecke, und ist alſo für alle Punkte auf der Oberfläche einer Kugel, welche s zum Mittelpunkt hat, konstant. Wird σ negativ, ſo bleibt alles dasſelbe, nur dass statt des minimums ein maximum eintritt."

342. Fortſetzung. Wenn zweitens $\alpha+\beta+\cdots=0$ geſetzt wird, ſo verwandelt ſich die Formel * der vorigen Nummer in

$$S=-2[(x-s)|(\alpha a+\beta b+\cdots)]+\alpha(s-a)^2+\beta(s-b)^2+\cdots.$$

Hier ist (nach 222) die Summe $\alpha a+\beta b+\cdots$ eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung, welche wir mit r bezeichnen wollen, ſo ist

$$S=-2[(x-s)|r]+\alpha(s-a)^2+\beta(s-b)^2+\cdots.$$

Es ſei nun angenommen, dass r nicht null ist, und ſeine Länge gleich ϱ ſei. Um nun den Ausdruck noch weiter zu reduciren, nehmen wir einen Punkt s' in der von s mit r parallel gezogenen geraden Linie an, und ſetzen $s'-s=zr$, wo z eine Zahl ist, da $s'-s$ nach der Konstruktion mit r parallel ist. Dann wird

$$[(x-s)|r]=[(x-s'+s'-s)|r]$$
$$=[(x-s')|r]+[(s'-s)|r].$$

Aber $[(s'-s)|r]$ ist gleich $[zr|r]=z[r|r]$, da z eine Zahl ist, alſo $=zr^2=z\varrho^2$, da ϱ der numeriſche Werth von r ist. Alſo wird $[(x-s)|r]=[(x-s')|r]+z\varrho^2$, und

$$S=-2[(x-s')|r]-2z\varrho^2+\alpha(s-a)^2+\beta(s-b)^2+\cdots.$$

Da s' ein beliebiger Punkt in der geraden Linie sr ist, so ist z noch unbestimmt, es sei z so bestimmt, dass

$$z = \frac{\alpha(s-a)^2 + \beta(s-b)^2 + \cdots}{2\varrho^2}$$

ist, so wird

$$S = -2[(x-s')|r].$$

Fällt man nun von x das Loth xx' auf die gerade Linie sr oder s'r, so ist $x - x'$ normal zu r, d. h. $[(x-x')|r] = 0$, also

$$[(x-s')|r] = [(x-x'+x'-s')|r] = [(x'-s')|r],$$

also $S = -2[(x'-s')|r] = \pm 2\varphi\varrho$,

wenn φ die Länge von $x'-s'$ ist, und das untere oder obere Zeichen gewählt wird, je nachdem $x'-s'$ mit r gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, d. h.:

„Die Vielfachensumme S der Quadrate der Abstände eines variabeln Punktes x von mehreren festen Punkten a, b,... wird, wenn α, β,... die Koefficienten jener Vielfachensumme, und die Summe dieser Koefficienten null ist, null für alle Punkte einer gewissen Ebene, welche auf der Strecke $r = \alpha a + \beta b + \cdots$ senkrecht steht. Wenn sich der Punkt x dagegen um den Abstand φ von dieser Ebene entfernt, so wird jene Summe $= -2\varphi\varrho$ oder $+2\varphi\varrho$, je nachdem er sich in der Richtung der Strecke r oder in der ihr entgegengesetzten von jener Ebene entfernt hat, wobei ϱ die Länge von r ausdrückt."

343. Schluss. Ist endlich auch r null, so wird

$$S = \alpha(s-a)^2 + \beta(s-b)^2 + \cdots,$$

d. h. konstant, d. h.

„Die Vielfachensumme S der Quadrate der Abstände eines variabeln Punktes x von mehreren festen Punkten a, b,... ist konstant, wenn die entsprechende Vielfachensumme der Punkte a, b,... null ist, d. h.

$$\alpha(x-a)^2 + \beta(x-b)^2 + \cdots = \text{Const.},$$

wenn $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$ ist."

Nämlich die Gleichung $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$ schliesst (nach 222) schon die Gleichung $\alpha + \beta + \cdots = 0$ ein.

344. Aufgabe. Die Vielfachensumme S der Abstände eines variablen Punktes x von mehreren festen Ebenen A,

B, ··· in einfachster Form auszudrücken, wenn die Coefficienten α, β, ··· jener Vielfachenſumme gegeben ſind, und für jede Ebene die Seite, nach welcher die poſitiven Abſtände liegen ſollen, bestimmt ist.

Auflöſung. Man nehme in jeder der Ebenen einen Flächenraum an, dessen numerischer Werth 1 ist, und welcher (ſeiner Erzeugungsweiſe nach) ſo beschaffen ist, dass das äussere Produkt dieſes Flächenraums mit einer Strecke, die nach der als poſitiv angenommenen Seite der Ebene gerichtet ist, ein poſitives Produkt bildet. Dieſe Flächenräume, aufgefasst als Theile der betreffenden Ebenen, d. h. als Grössen dritter Stufe (255) ſeien beziehlich mit A', B', ··· bezeichnet, ſo ist das Produkt [A'x] (nach 263) gleich dem Inhalte eines Spates (Parallelepipedums), dessen Grundfläche A' ist, und dessen Deckfläche (der Grundfläche gegenüberliegende Fläche) durch den Punkt x geht, alſo gleich A' mal der Höhe, oder da A' numerisch gleich 1 ist, gleich der Höhe, d. h. gleich der Entfernung des Punktes x von der Ebene A, und zwar auch dem Zeichen nach, und ebenſo für die andere Ebene. Alſo ist

$$\begin{aligned} S &= \alpha[A'x] + \beta[B'x] + \cdots \\ &= [(\alpha A' + \beta B' + \cdots)x] \\ &= \varrho[Rx], \end{aligned}$$

wenn ϱR die entsprechende Vielfachenſumme der Flächentheile A', B', ···, und R numerisch gleich 1, ϱ aber poſitiv ist.

„Die Vielfachenſumme S der Abständen eines variablen Punktes x von mehreren festen Ebenen A, B, ···· mit den Koefficienten α, β, ··· steht zu dem Abstande desſelben Punktes von einer festen Ebene R in einem konstanten Verhältniss $\varrho : 1$, und zwar findet man R und ϱ, wenn man auf den Ebenen A, B, ··· Flächentheile A', B', ··· annimmt, welche numerisch gleich 1 ſind, und mit Punkten, die auf der als poſitiv angenommenen Seite der betreffenden Ebenen liegen, äusserlich multiplicirt poſitives Produkt geben, dann ist R die Ebene des Flächentheiles $\alpha A' + \beta B' + \cdots$, und ϱ der numerische Werth dieſes Flächentheiles. Sollte jedoch dieſe Summe eine unendlich entfernte Ebene, d. h. einen Körperraum (262)

geben, alſo ϱR ein Körpertheil ſein, ſo iſt (nach 268) $[\varrho Rx]$ konſtant, alſo auch die Vielfachenſumme S konſtant. Sollte endlich $\alpha A' + \beta B' + \cdots$ ſelbſt gleich null ſein, ſo wird auch S null für jeden Punkt x."

Anm. Die in den vorigen Aufgaben gefundenen Sätze laſſen ſich in einen Satz zuſammenfaſſen, wenn man ſtatt der Punkte und Ebenen Kugelflächen ſetzt, welche ſich, wenn die Radien null werden, in Punkte, wenn ſie unendlich werden, in Ebenen verwandeln, und zwar, wenn man ſtatt des Quadrates des Abſtandes von einem Punkte und ſtatt des einfachen Abſtandes von einer Ebene, das Produkt des kleinſten und gröſſten Abſtandes von der Kugelfläche ſetzt, ſo geht dies Produkt, wenn ſich die Kugelfläche in einen Punkt zuſammenzieht, in das Quadrat des Abſtandes über, und wenn ſich die Kugelfläche zu einer Ebene entfaltet, ſo wird der eine Abſtand unendlich, und kann für alle Ebenen als gleich angeſehen und daher mit ihm dividirt werden, wodurch die einfachen Abſtände hervorgehen. Dieſe Verallgemeinerung ſoll in dem folgenden Satze ausgeführt werden.

345. Wenn man unter dem Doppelabſtand eines Punktes von einer Kugelfläche das Produkt des kleinſten und gröſſten Abſtandes des Punktes von der Kugelfläche verſteht (das Produkt poſitiv genommen, wenn die Abſtände gleichgerichtet, d. h. der Punkt ausſerhalb der Kugelfläche liegt, negativ im entgegengeſetzten Falle), ſo iſt die Vielfachenſumme S der Doppelabſtände α', β', $\cdots$ von mehreren feſten Kreiſen, deren Mittelpunkt a, b, $\cdots$, und deren Radien a', b', $\cdots$ ſind, alſo die Vielfachenſumme

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots,$$

wenn α, β, $\cdots$ ihre Koefficienten darſtellen, ein minimum oder maximum, wenn x in dem Schwerpunkte s des Punktvereins αa, βb, $\cdots$ liegt, und zwar, wenn ſich der Punkt x von dieſem Schwerpunkte s um den Abſtand φ entfernt, ſo wächſt S um das Produkt dieſes Abſtandes in die Summe σ der Koefficienten α, β, $\cdots$, alſo um $\varphi\sigma$ oder um $(\alpha + \beta + \cdots)\varphi$. Wenn aber der Punktverein αa, βb, $\cdots$ keinen Schwerpunkt hat, d. h. $\alpha + \beta + \cdots$ null iſt, ſo giebt es eine auf der Strecke $\mathfrak{r} = \alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b} + \cdots$ ſenkrecht ſtehende Ebene E, für deren Punkte S null iſt; entfernt ſich dann x von dieſer Ebene um den Abſtand φ, ſo wird $S = \pm 2\varphi\varrho$, wo ϱ der numeriſche Werth von $\mathfrak{r}$ iſt, und das untere oder obere Zeichen gewählt

wird, je nachdem x sich nach der Seite hin bewegt, nach welcher von E aus die Richtung von r liegt, oder nach der entgegengesetzten. Wird aber auch $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$, so ist S konstant.

Beweis. Zieht man von x die Linie durch den Mittelpunkt a der ersten Kugel, welche die Oberfläche derselben in x_1 und x_2 schneide, so ist der Doppelabstand $\alpha' = (x - x_1)(x - x_2) = (x - a - a')(x - a + a')$, wenn $x - x_1$ die Linie von x_1 nach x bezeichnet u. s. w., und a' der Radius ist. Also $\alpha' = (x - a)^2 - a'^2$, oder wenn wir jetzt unter $x - a$ eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung verstehen,

$$\alpha' = (x - a)^2 - a'^2.$$

Also
$$S = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots$$
$$= \alpha[(x - a)^2 - a'^2] + \beta[(x - b)^2 - b'^2] + \cdots.$$

Nehmen wir nun einen konstanten Punkt s zu Hülfe, der zur Vereinfachung des Ausdrucks dienen soll, so wird

$$(x - a)^2 = (x - s + s - a)^2$$
$$= (x - s)^2 + 2[(x - s)|(s - a)] + (s - a)^2$$

und entsprechend bei den übrigen Quadraten. Setzen wir noch $\alpha + \beta + \cdots = \sigma$, so wird

$$S = \sigma(x - s)^2 + 2[(x - s)|(\sigma s - \alpha a - \beta b - \cdots)] + \mu,$$

wenn wir die konstante Grösse

$$\alpha(s - a)^2 + \beta(s - b)^2 + \cdots - \alpha a'^2 - \beta b'^2 - \cdots = \mu$$

setzen. Ist nun σ von null verschieden, so wird der Faktor $\sigma s - \alpha a - \beta b - \cdots = 0$, wenn s der Schwerpunkt des Punktvereins αa, βb, .. wird. Nehmen wir also s in diesem Schwerpunkte liegend an, so wird

$$S = \sigma(x - s)^2 + \mu,$$

wodurch der erste Theil bewiesen ist. Wenn aber $\sigma = 0$ ist, so ist $\alpha a + \beta b + \cdots$ eine Strecke, diese sei r, und ϱ ihr numeriseher Werth, so wird

$$S = 2[(s - x)|r] + \mu.$$

Leicht kann man, da S in Bezug auf x vom ersten Grade ist, solche Punkte x finden, für welche S null wird. Es sei s' ein solcher Punkt*), d. h.

*) Setzt man den Punkt $s + \frac{\mu r}{2\varrho^2} \equiv p$, so ist s' ein beliebiger Punkt, welcher in der durch p senkrecht gegen r gelegten Ebene liegt.

$$2[(s - s')|r] + \mu = 0,$$

so wird

$$S = 2[(s - s' + s' - x)|r] + \mu = 2[(s' - x)|r]$$

vermöge der vorigen Gleichung, und dies ist

$$= \pm 2\varphi\varrho,$$

wenn ϱ der numerische Werth der senkrechten Projektion von $s' - x$ auf r ist, und das untere oder obere Zeichen gewählt wird, je nachdem $x - s'$ und r auf derselben Seite der in s' auf r errichteten senkrechten Ebene liegen oder nicht, wodurch der zweite Theil des Satzes erwiesen ist. Wenn endlich auch $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$ ist, so wird

$$S = \mu,$$

also konstant.

346. Aufgabe. Die Summe S mehrerer Linientheile im Raume auf die Summe eines Linientheiles und eines dagegen senkrechten Flächenraumes zurückzuführen.

Auflösung. Man nehme ein System von vier Einheiten im Raume: a, a_1, a_2, a_3 an, von denen a ein einfacher Punkt und a_1, a_2, a_3 Strecken sind, so lässt sich (nach 232) jeder Punkt im Raume aus ihnen numerisch ableiten, also ist jeder Linientheil als Produkt zweier Punkte (nach 65) aus den multiplikativen Kombinationen aa_1, aa_2, aa_3, a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3 numerisch ableitbar, also auch S, als Summe solcher Linientheile, es sei

$$S = \alpha_1[aa_1] + \alpha_2[aa_2] + \alpha_3[aa_3] + \beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3]$$

oder

$$= [a(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \alpha_3a_3)] + \beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3].$$

Es sei

$$\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \alpha_3a_3 = b,$$

also b eine Strecke, und $\beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3]$ ist als Summe von Produkten von je zwei Strecken, wieder ein solches, also als Ergänzung einer Strecke aufzufassen, etwa der Strecke c, d. h. es sei

$$\beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3] = |c,$$

so ist

$$S = [ab] + |c.$$

Es sei a' irgend ein anderer, noch näher zu bestimmender

Punkt und sei $a - a' = d$, wo d eine Strecke ist, so ist $a = a' + d$, also

$$S = [(a' + d)b] + |c = [a'b] + [db] + |c.$$

Es ist hier $[db] + |c$ ein Flächenraum; und es soll d so bestimmt werden, dass, wie die Aufgabe verlangt, dieser Flächenraum auf dem Linientheile $[a'b]$ senkrecht stehen soll. Da a' ein Punkt und b eine Strecke ist, so hat dieser Linientheil die Richtung von b, also soll der Flächenraum auf b senkrecht stehen, d. h. (nach 152, 333) $[(db + |c)|b] = 0$, oder

$$[db|b] + |[cb] = 0 \qquad [99],$$

d. h. $$|[cb] = [bd|b] \qquad [55].$$

Nehmen wir an, dass d senkrecht auf b stehe, d. h. in der Ebene |b liege, so ist (nach 108) der zuletzt gewonnene Ausdruck

$$= [b|b]d = \beta^2 d,$$

wenn β der numerische Werth von b ist, also d gefunden

$$d = |[cb] : \beta^2.$$

Umgekehrt, wenn d diesen Werth hat, so folgt durch die umgekehrten Umgestaltungen, dass der Flächenraum $[db] + |c$ auf b senkrecht stehe, also ist die Aufgabe gelöst.

347. Wenn zwei Summen von Linientheilen beide auf die Form einer Summe gebracht sind, deren eines Stück ein Linientheil und deren anderes Stück ein gegen die Linie desselben senkrechter Flächenraum ist, so sind jene Summen nur dann gleich, wenn sowohl diese Linientheile als diese Flächenräume einander gleich sind, d. h. wenn

$$[ab] + \gamma|b = [a_1 b_1] + \gamma_1|b_1$$

ist, wo a und a_1 einfache Punkte, b und b_1 Strecken, γ und γ_1 Zahlen sind, so ist

$$[ab] = [a_1 b_1],\ \gamma|b = \gamma_1|b_1.$$

Beweis. Man multiplicire zuerst die gegebene Gleichung mit einem Produkte U dreier Strecken, so ist |b ein Produkt zweier Strecken, also $[|b \cdot U] = 0 = [|b_1 \cdot U]$ (nach 301), dagegen $[abU] = b$ und $[a_1 b_1 U] = b_1$ (nach 305); also erhält man $b = b_1$. Somit verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$[ab] + \gamma|b = [a_1 b] + \gamma_1|b.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit b, so wird, da [abb]

$= [a_1 bb] = 0$ ist (nach 60), $\gamma[b|b] = \gamma_1[b|b]$, alfo, da $[b|b] = b^2$ eine von Null verschiedene Zahl ist, $\gamma = \gamma_1$. Somit verwandelt fich die urſprüngliche Gleichung in $[ab] = [a_1 b]$, d. h. die Linientheile $[ab]$ und $[a_1 b_1]$ und die Flächenräume $\gamma|b$ und $\gamma_1|b_1$ ſind einander gleich.

Anm. Es lässt ſich alſo jede Summe von Linientheilen, d. h. jede geometriſche Grösse zweiter Stufe auf eine beſtimmte, vollkommen unzweideutige Art in Form einer Summe eines Linientheiles und eines gegen ſeine Linie ſenkrechten Flächenraums darſtellen. Es iſt intereſſant, dass dieſe allgemeine Grösse zweiter Stufe vollkommen repräſentirt wird durch die Bewegung eines Körpers im Raume. Wenn nämlich ein Körper aus einer Lage in eine beliebige andere verſetzt wird, ſo iſt bekanntlich dieſe Verſetzung allemal dadurch möglich zu machen, dass man eine gewisse Linie des Körpers in ihrer eigenen Richtung um ein Gewisses fortſchreiten lässt, während der Körper um dieſe Linie als um ſeine Axe eine gewisse Drehung vollendet, und zwar ſind dieſe beiden Partialbewegungen durch die Anfangs- und End-Lage des Körpers vollkommen beſtimmt. Die erſtere Bewegung kann durch einen Linientheil vollkommen repräſentirt werden, die letztere durch einen dagegen ſenkrechten Flächenraum, beide zuſammen alſo durch die allgemeine räumliche Grösse zweiter Stufe. Natürlich wird man in der Statik auf gleiche Weiſe die Reſultante mehrerer Kräfte im Raume darſtellen können, während der bloſse Linientheil die einzelne ſtatiſche Kraft darſtellt, und die Summe derſelben die ſtatiſche Reſultante der entſprechenden Kräfte (ſ. Ausdehnungslehre §. 122 ff.)

Zweiter Abschnitt.

Funktionenlehre.

Kap. 1. Funktionen im Allgemeinen.

§. 1. Begriff der Funktionen, und Reduktion mehrerer Funktionen mehrerer Variabeln auf eine Funktion einer Variabeln.

348. Erklärung. Wenn eine Grösse u von einer oder mehreren Grössen x, y,··· in der Art abhängt, dass, so oft x, y,··· bestimmte Werthe annehmen, auch u einen bestimmten (eindeutigen) Werth annimmt, so nennen wir u eine Funktion von x, y,···.

Anm. Hier ist zu bemerken, dass die obige Definition auch gelten soll, wenn u, x, y,··· beliebige extensive Grössen sind. Ferner ist zu bemerken, dass die mehrdeutigen Funktionen, d. h. solche, wo für bestimmte Werthe der unabhängigen Variabeln x, y,··· die Grösse u mehrere verschiedene Werthe annehmen kann, ohne dass diese Verschiedenheit durch eine neue Variable bedingt ist, — hier gänzlich ausgeschlossen sind; wie denn überhaupt alle in diesem Sinne mehrdeutigen Grössen aus der Mathematik zu verbannen sind, weil sich auf sie keine mathematische Formel mit Sicherheit anwenden lässt. Sobald die Beziehung zwischen den unabhängigen und der abhängigen Variabeln u vermittelst einer Gleichung gegeben ist, durch welche für bestimmte Werthe der ersteren die letztere u mehrere verschiedene Werthe annehmen kann, so kann man u ansehen als Funktion jener Variabeln und einer neuen r, welche eine bestimmte Werthreihe, etwa die der ganzen Zahlen durchläuft, so dass dann, wenn auch ausser den ursprünglichen Variabeln noch der Werth von r bestimmt ist, auch u eindeutig bestimmt sei. Oder sollte eine solche neue Variable r nicht ausreichen, so kann man mehrere solche zu Hülfe

nehmen. Hat man z. B. die Gleichung $u^n = x$, so kann hier für jeden Werth von x die Grösse u noch n verschiedene Werthe annehmen. Einer derselben sei mit $x^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet, so ist bekanntlich

$$u = (-1)^{\frac{2r}{n}} x^{\frac{1}{n}} = \left(\cos.\frac{2r\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin.\frac{2r\pi}{n}\right) x^{\frac{1}{n}},$$

wo r nach und nach jeden ganzen Zahlwerth annehmen kann. Es ist also u auf diese Weise als Funktion von x und einer neuen Variablen r dargestellt, wodurch dann die Mehrdeutigkeit der Funktion verschwindet.

349. Erklärung. Zahlfunktion nenne ich eine Funktion, welche für beliebige Werthe der Variabeln, von denen sie abhängt, stets einen Zahlwerth (reellen oder imaginären, ganzen oder gebrochenen, rationalen oder irrationalen) annimmt. Extensive Funktion nenne ich eine Funktion, welche für alle (oder gewisse) Werthe der Variabeln einer extensiven Grösse gleich ist. Ich werde die Zahlfunktionen stets mit kleinen Buchstaben f, φ, ψ, $\cdots$, die extensiven Funktionen mit grossen Buchstaben F, Φ, Ψ, $\cdots$ bezeichnen.

Anm. Die imaginäre Zahlgrösse $p + q\sqrt{-1}$ steht auf der Gränze der extensiven Grössen; sie ist als extensive Grösse aufzufassen, sobald man für den Ausdruck der Zahlbeziehung zwischen mehreren Grössen, nur reelle Zahlkoefficienten zulässt, indem dann 1 und $\sqrt{-1}$ als Einheiten erscheinen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, hingegen ist sie als Zahlgrösse aufzufassen, sobald auch imaginäre Zahlkoefficienten für den Ausdruck der Zahlbeziehung gestattet sind. Wenn daher die Funktion $y = fx$ für reelles x imaginäre Werthe, etwa $u + v\sqrt{-1}$ annimmt, so kann sie in dem ersten Sinne als extensive Funktion aufgefasst werden; doch wollen wir in der Funktionslehre den letzteren Sinn stets festhalten, also auch im Falle y imaginär wird, dennoch y als Zahlfunktion auffassen, wie es in der Erklärung geschehen ist.

350. Jede Zahlfunktion beliebig vieler Zahlgrössen lässt sich als Zahlfunktion einer einzigen extensiven Grösse darstellen, und zwar, wenn

$$y_1 = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

ist, so ist dieser Ausdruck gleichbedeutend mit

$$y_1 = f((x|e_1), (x|e_2)\cdots, (x|e_n)) = \varphi(x),$$

wo $e_1, \cdots e_n$ ein einfaches Normalsystem (siehe 153) bilden, und

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$$

ist.

Beweis. Wenn $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$ ist und $e_1, \cdots e_n$ ein einfaches Normalſyſtem bilden, ſo iſt

$$[x|e_1] = [(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n)|e_1] = x_1,$$

da $[e_1|e_2], \cdots [e_1|e_n]$ (nach 188) null ſind und $[e_1|e_1] = 1$ iſt. Aus gleichem Grunde iſt

$$[x|e_2] = x_2, \cdots, \quad [x|e_n] = x_n.$$

Alſo

$$y_1 = f(x_1, x_2, \cdots x_n) = f([x|e_1), (x|e_2) \cdots (x|e_n)),$$

wo alſo y_1 eine Funktion der extenſiven Grösse x iſt. Es ſei dieſe Funktion mit $\varphi(x)$ bezeichnet, ſo hat man

$$y_1 = \varphi(x).$$

351. Jedes System von Zahlfunktionen beliebig vieler Zahlgrössen lässt ſich als eine extenſive Funktion einer extenſiven Grösse darſtellen, und zwar, wenn

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots x_n) \end{cases}$$

iſt, ſo iſt dies System von Gleichungen gleichbedeutend der Gleichung

$$y = F(x),$$

wo

$$x = x_1e_1 + \cdots x_ne_n$$
$$F(x) = e_1\varphi_1(x) + e_2\varphi_2(x) + \cdots e_m\varphi_m(x)$$
$$\varphi_r(x) = f_r([x|e_1], [x|e_2], \cdots [x|e_n])$$

iſt und $e_1, \cdots e_n$ und $e_1, \cdots e_m$ einfache Normalſyſteme bilden.

Beweis. Nach 350 iſt, wenn $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$ geſetzt wird,

$$y_r = f_r(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

gleichbedeutend mit

$$y_r = f_r([x|e_1], [x|e_2], \cdots [x|e_n]).$$

Dieſe Funktion von x ſei mit $\varphi_r(x)$ bezeichnet, alſo

$$y_r = \varphi_r(x) = f_r([x|e_1], [x|e_2], \cdots [x|e_n]).$$

Ferner iſt (nach 29) das System der Gleichungen

$$y_1 = \varphi_1(x), \; y_2 = \varphi_2(x) \cdots y_m = \varphi_m(x)$$

gleichbedeutend der Gleichung

$$y_1 e_1 + y_2 c_2 + \cdots y_m e_m = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \cdots e_m \varphi_m(x),$$

d. h. der Gleichung

$$y = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \cdots e_m \varphi_m(x).$$

Diese Funktion von x sei mit F(x) bezeichnet, also

$$F(x) = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \cdots e_m \varphi_m(x),$$

so sind die m gegebenen Gleichungen

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_m) \text{ u. s. w.,}$$

gleichbedeutend mit der Gleichung

$$y = F(x).$$

352. Jedes System von Funktionen beliebig vieler Variabeln lässt sich ersetzen durch eine Funktion einer Variabeln, vorausgesetzt, dass sich die unabhängigen Variabeln sämmtlich aus einem System von Einheiten numerisch ableiten lassen, und ebenso die abhängigen.

Beweis 1. Für ein beliebiges System von Zahlfunktionen beliebig vieler Zahlgrössen ist der Satz in 351 bewiesen.

2. Nach 157 lassen sich alle aus einem System von n Einheiten numerisch ableitbare Grössen aus einem einfachen Normalsystem von n Grössen numerisch ableiten. Es bestehe das Normalsystem, aus welchem sich die unabhängigen Variabeln x, y, $\cdots$ ableiten lassen, aus den Grössen $e_1, e_2, \cdots e_n$, und diejenigen, aus welchen sich die abhängigen Variabeln u, v, $\cdots$ ableiten lassen, aus den Grössen $e^{(1)}, e^{(2)}, \cdots e^{(m)}$. Ferner sei

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + \cdots x_n e_n, & u &= u_1 e^{(1)} + \cdots u_m e^{(m)} \\ y &= y_1 e_1 + \cdots y_n e_n, & v &= v_1 e^{(1)} + \cdots v_m e^{(m)}, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

wo alle Koefficienten Zahlgrössen sind, und seien

$$u = F(x, y \cdots), \quad v = \Phi(x, y, \cdots), \cdots$$

die gegebenen Funktionen, so erhält man, indem man hierin die obigen Werthe einsetzt,

$$u_1 e^{(1)} + \cdots u_m e^{(m)} = F(x_1 e_1 + \cdots x_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n, \cdots),$$

Hier ist die rechte Seite eine extensive Funktion der Zahlgrössen $x_1, \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, \cdots$. Diese Funktion soll einer Grösse gleich sein, welche aus den Einheiten $e^{(1)}, \cdots e^{(m)}$ nu-

merisch ableitbar ist, also muss sie selbst aus ihnen numerisch ableitbar sein, d. h. sie muss in der Form $e^{(1)}\varphi_1 + \cdots e^{(m)}\varphi_m$ erscheinen, wo $\varphi_1, \cdots \varphi_m$ Zahlfunktionen von $x_1, \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n, \cdots$ sind. Also erhält man

$$u_1 e^{(1)} + \cdots u_m e^{(m)} = e^{(1)}\varphi_1 + \cdots e^{(m)}\varphi_m.$$

Diese Gleichung, welche mit $u = F(x, y)$ gleichbedeutend ist, wird (nach 29) ersetzt durch das System der Zahlgleichungen

$$u_1 = \varphi_1, \; u_2 = \varphi_2, \cdots u_m = \varphi_m.$$

Auf gleiche Weise wird die Gleichung

$$v = \Phi(x, y)$$

ersetzt durch ein System von Zahlgleichungen von der Form

$$v_1 = \psi_1, \; v_2 = \psi_2, \cdots \; v_m = \psi_m,$$

wo $\psi_1, \psi_2, \cdots$ gleichfalls Zahlfunktionen der Zahlgrössen $x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots y_n, \cdots$ sind. Folglich werden die gegebenen Gleichungen

$$u = F(x, y \cdot \cdot), \; v = \Phi(x, y \cdot \cdot)$$

ersetzt durch das System der Zahlgleichungen

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1, \; u_2 = \varphi_2, \cdots \; u_m = \varphi_m, \\ v_1 &= \psi_1, \; v_2 = \psi_2, \cdots \; v_m = \psi_m, \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

wo $\varphi_1 \cdots \varphi_m$, $\psi_1 \cdots \psi_m, \cdots$ Zahlfunktionen der Zahlgrössen $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n, \cdots$ sind. Aber nach 351 kann ein solches System ersetzt werden durch Eine Funktion Einer Grösse, folglich kann auch das gegebene System durch Eine solche Funktion Einer Grösse ersetzt werden.

Anm. Diese Zurückführung auf Eine Funktion Einer Variabeln ist auch für die Behandlung der Zahlfunktionen von Bedeutung, da die Sätze der Zahlfunktionen, der Differenzialrechnung, der Reihen, und auch mit gewissen Beschränkungen die der Integralrechnung sich auf solche extensiven Funktionen extensiver Grössen, wie unten gezeigt werden soll, anwenden lassen. Namentlich ergeben sich daraus die Jakobischen Sätze über Funktionaldeterminanten, so wie die von Jakobi in seiner berühmten Abhandlung angedeutete oder geahnte Uebereinstimmung dieser Sätze mit den Sätzen der Differenziation einer einfachen Funktion einer Variabeln aufs leichteste und unmittelbarste.

§. 2. Ganze Funktionen und Darstellung derselben vermittelst lückenhaltiger Produkte.

353. Erklärung. Wenn $P_{a_1, a_2, \cdots a_n}$ ein beliebiges Produkt ist, in welchem die Grössen erster Stufe $a_1, a_2, \cdots a_n$ als Faktoren verkommen, so verstehe ich unter

$$P_{1, 1, \cdots 1}(x_1 x_2 \cdots x_n),$$

wo $x_1 \cdots x_n$ beliebige Grössen erster Stufe sind, das arithmetische Mittel zwischen den sämmtlichen Ausdrücken, welche aus

$$P_{x_1, x_2, \cdots x_n}$$

hervorgehen, wenn man den Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$ alle möglichen verschiedenen Folgen giebt. Ich nenne hier den Ausdruck $P_{1, 1, \cdots 1}$ ein Produkt mit n Lücken.

So ist z. B.

$$P_{1, 1, 1}(xyz)$$
$$= (P_{x,y,z} + P_{x,y,z} + P_{y,x,z} + P_{y,z,x} + P_{z,x,y} + P_{z,y,x}) : 6.$$

Anm. Unter dem arithmetischen Mittel mehrer Grössen ist hier, wie sonst, die durch die Anzahl der Grössen dividirte Summe derselben verstanden. Es versteht sich von selbst, dass wenn ein solcher Lückenausdruck noch mit andern Ausdrücken durch Multiplikation verbunden werden soll, er dann in Klammern zu schliessen ist. Noch ist zu bemerken, dass wir oben die in die Lücken eintretenden Grössen als Grössen erster Stufe gesetzt haben. Man sieht leicht, dass man diesen Begriff auch hätte erweitern und auch Lücken höherer Stufen hätte annehmen können, d. h. solche Lücken, in welche Grössen höherer Stufen eintreten sollen. Doch kann man solche Fälle, in denen Lücken höherer Stufe vorkommen würden, fast überall vermeiden. Namentlich, was der häufigste Fall ist, wenn das Hauptgebiet von n-ter Stufe ist, und Grössen (n — 1)-ter Stufe in die Lücken eintreten sollen, so kann man diese Grössen als Ergänzungen von Grössen erster Stufe also in der Form $|a$ u. s. w. darstellen, und statt der Lücke (n — 1)-ter Stufe schreiben $|1$, wodurch dann die Lücke auf die erste Stufe reducirt ist, und der Definition in 353 unterliegt.

354. Es ist

$$P_{1, 1, \cdots}(x_1 x_2 \cdots x_n) = \sum P_{x_r, x_s, \cdots} : (1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n),$$

wo der Ausdruck $P_{1, 1, \cdots}$ ein Produkt mit n Lücken ist, und $x_r, x_s, \cdots$ diefelben Grössen wie $x_1, x_2, \cdots x_n$ bezeichnen, nur in beliebig geänderter Folge, und wo die Summe sich auf alle verschiedenen Folgen bezieht. Ins Befondere ist

$$P_{1, 1, \cdots} x^n = P_{x, x, \cdots}.$$

Beweis. Nach 353 ist $P_{1,1,\cdots}x_1, x_2, \cdots x_n$ das arithmetische Mittel der Ausdrücke $P_{x_r, x_s, \cdots}$, welche aus $P_{x_1, x_2, \cdots x_n}$ durch beliebige Anordnung der Grössen $x_1, \cdots x_n$ hervorgehen, d. h. gleich der Summe jener Ausdrücke, dividirt durch ihre Anzahl, alſo durch $1 \cdot 2 \cdots n$. Wenn ins Beſondere $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ ist, ſo werden alle jene Ausdrücke gleich $P_{x, x, \cdots}$, alſo ist ihr arithmetisches Mittel gleich einem derſelben, alſo damit auch die Specialformel erwieſen.

355. Erklärung. Wenn P_m ein Produkt mit m Lücken, und $m > n$ ist, ſo verſtehe ich unter $P_m(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)$ den Ausdruck, welchen man erhält, wenn man den Ausdruck $P_m(x_1 \cdot x_2 \cdots x_m)$ (nach 353) entwickelt, und dann ſtatt jeder der Grössen $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_m$ eine Lücke ſetzt; z. B. ist

$$P_{1,1,1}x = (P_{x,1,1} + P_{1,x,1} + P_{1,1,x}) : 3;$$

$$P_{1,1,1}(xy) = (P_{x,y,1} + P_{y,x,1} + P_{x,1,y} + P_{y,1,x} + P_{1,x,y} + P_{1,y,x}) : 6.$$

356. Wenn $P_{1,1,\cdots}$ ein Produkt mit m Lücken, und m grösser als n ist, ſo ist

$$P_{1,1,\cdots}(x_1 x_2 \cdots x_n) = \frac{S}{m(m-1)\cdots(m-n+1)},$$

wo S die Summe aller Glieder ist, welche hervorgehen, wenn man $x_1, x_2, \cdots x_n$ auf alle möglichen verſchiedenen Arten in die m Lücken von $P_{1,1\cdots}$ vertheilt, ins Beſondere ist

$$P_{1,1\cdots}x = (P_{x,1,\cdots} + P_{1,x,\cdots} + \cdots) : m.$$

Beweis. Es ist (nach 355) unter $P_{1,1,\cdots}x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ der Ausdruck verſtanden, den man erhält, wenn man in $P_{1,1,\cdots}x_1 \cdot x_2 \cdots x_m$ ſtatt jeder der Grössen $x_{n+1}, \cdots x_m$ eine Lücke ſetzt. Nun ist (nach 354)

$$P_{1,1\cdots}(x_1 x_2 \cdots x_m) = \sum P_{x_r, x_s, \cdots} : (1 \cdot 2 \cdots m).$$

Setzt man hierin ſtatt $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_m$ Lücken, ſo werden alle die Glieder gleich, welche ſich nur durch die Reihenfolge der Grössen $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_m$ unterſcheiden. Man kann alſo, ſtatt dieſe gleichen Glieder ſo oft zu ſetzen, als ihre Anzahl beträgt, eins derſelben mit dieſer Anzahl, alſo mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-n)$ multipliciren; ſomit erhält man jedes der von einander verſchiedenen Glieder mit $1 \cdot 2 \cdots (m-n)$

$:(1\cdot 2\cdots m)$ multiplicirt. Aber die Summe dieſer von einander verſchiedenen Glieder iſt S, alſo

$$P_{1,1,\cdots}(x_1x_2\cdots x_n) = \frac{S\cdot 1\cdot 2\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots m} = \frac{S}{m(m-1)\cdots(m-n+1)}.$$

Da die Anzahl der in S enthaltenen Glieder gleich $m(m-1)\cdots(m-n+1)$ iſt, ſo iſt der Ausdruck rechts zugleich das arithmetiſche Mittel dieſer Glieder.

357. Erklärung. Wenn $A, B, \cdots A', B', \cdots$ Produkte mit je n Lücken, und $\alpha, \beta, \cdots \alpha', \beta', \cdots$ Zahlen ſind, ſo ſetze ich dann und nur dann

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \alpha' A' + \beta' B' + \cdots,$$

wenn für jede Reihe von n Grössen erster Stufe $x_1, x_2, \cdots x_n$

$$\alpha A x_1x_2\cdots x_n + \beta B x_1x_2\cdots x_n + \cdots = \alpha' A' x_1x_2\cdots x_n + \beta' B' x_1x_2\cdots x_n + \cdots$$

iſt. Wir nennen eine ſolche Vielfachenſumme von Lückenprodukten (mit je n Lücken) einen Lückenausdruck (mit n Lücken).

358. Jede ganze Zahlfunktion n-ten Grades von beliebig vielen (veränderlichen) Zahlgrössen lässt ſich in der Form

$$Ax^n$$

darſtellen, wo A ein Ausdruck mit n Lücken iſt, und zwar iſt

$$\sum a_{a,b,\cdots} x_1^a x_2^b \cdots [a + b + \cdots = < n] = Ax^n,$$

wo $x = e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$

und $$A = \sum a_{a,b,\cdots} \cdots [1|e_0]^r [1|e_1]^a [1|e_2]^b \cdots [r + a + b + \cdots = n]$$

iſt, wo ferner $e_0, e_1, e_2, \cdots$ ein einfaches Normalſyſtem bilden, und die Summe ſich auf alle möglichen ganzen Werthe $r, a, b, \cdots$ bezieht, welche der in Klammern beigefügten Bedingung genügen, ohne negativ zu ſein.

Beweis. Nach der Annahme iſt $x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$, wo $x_0 = 1$ iſt. Ferner da $x_0 = 1$ und $a + b + \cdots = < n$ iſt, ſo iſt

$$\sum a_{a,b,\cdots} x_1^a x_2^b \cdots = \sum a_{a,b,\cdots} \cdots x_0^r x_1^a x_2^b \cdots$$

mit der Bedingung, dass $r + a + b + \cdots = n$ ſei. Der gewonnene Ausdruck iſt aber (nach 350)

$$= \sum a_{a,b,\cdots}[x|e_0]^a[x|e_1]^a[x|e_2]^b\cdots.$$
$$= Ax^n \qquad [354],$$

wo A den im Satze angegebenen Lückenausdruck darstellt.

359. Jedes System von ganzen Funktionen n-ten Grades beliebig vieler Variabeln lässt sich in der Form

$$Ax^n$$

darstellen, wo A ein konstanter Lückenausdruck mit n Lücken ist.

Beweis folgt aus 358 vermittelst 352.

360. Statt einen Lückenausdruck mit einer Faktorenreihe (gemäss der Erklärung in 353) zu multipliciren, kann man ihn mit den Faktoren fortschreitend multipliciren, d. h.

$$A(x_1x_2\cdots x_n) = Ax_1x_2\cdots x_n.$$

Beweis 1. Es bestehe A nur aus einem Produkt, und zwar enthalte dasselbe m Lücken, so ist (nach 356)

$$* \quad A(x_1x_2\cdots x_n) = \frac{S}{m(m-1)\cdots(m-n+1)},$$

wo S die Summe aller Glieder ist, welche hervorgehen, wenn man auf alle möglichen verschiedenen Arten $x_1, x_2, \cdots x_n$ in die m Lücken von A vertheilt. Ebenso sei S_1 die Summe aller Glieder, welche hervorgehen, wenn man x_1 nach und nach in jede einzelne Lücke des Produktes A einsetzt; ferner gehe S_2 aus S_1 hervor, indem man in jedem Gliede von S_1 die Grösse x nach und nach in jede der $m-1$ Lücken einzeln einsetzt, und die sämmtlichen so erhaltenen Glieder addirt, somit ist S_2 zugleich die Summe aller Glieder, welche hervorgehen, wenn man x_1x_2 auf alle möglichen verschiedenen Arten in zwei der Lücken von A einfügt. Auf entsprechende Weise möge S_3 aus S_2 abgeleitet sein u. s. w. Dann ist (nach 356)

$$Ax_1 = \frac{S_1}{m_1}, \quad Ax_1x_2 = \frac{S_2}{m(m-1)}, \cdots$$

endlich

$$Ax_1x_2\cdots x_n = \frac{S}{m(m-1)\cdots(m-n+1)} = A(x_1x_2\cdots x_n) \text{ [nach *]}.$$

2. Es sei A ein beliebiger Lückenausdruck $= \sum P_a$, wo jedes P_a ein Produkt mit m Lücken ist, so ist

$$A(x_1x_2\cdots x_n) = \sum P_\alpha(x_1x_2\cdots x_n)$$
$$= \sum P_\alpha(x_1x_2\cdots x_n) \quad [357]$$
$$= \sum P_\alpha x_1x_2\cdots x_n \quad [\text{Bew. 1}]$$
$$= \sum P_\alpha x_1x_2\cdots x_n \quad [357]$$
$$= Ax_1x_2\cdots x_n.$$

361. In dem Ausdrucke $Ax_1x_2\cdots x_n$, in welchem A ein beliebiger Lückenausdruck mit n oder mehr Lücken ist, kann man ohne Werthänderung eine beliebige Schaar der Grössen $x_1x_2\cdots x_n$ mit einer Klammer umschliessen.

Beweis aus 360.

362. Die Ordnung der Faktoren, welche in einen Lückenausdruck eintreten sollen, ist gleichgültig für das Resultat, d. h.

$$Ax_1x_2\cdots = Ax_rx_s\cdots,$$

wo $x_1x_2\cdots$ und $x_rx_s\cdots$ dieselben Faktoren nur in verschiedener Ordnung enthalten sollen, und A einen Lückenausdruck bezeichnet.

Beweis. Es sei $A = \sum P_\alpha$, wo jedes P_α ein lückenhaltiges Produkt ist, so ist

$$Ax_1x_2\cdots = A(x_1x_2\cdots) \quad [360]$$
$$= \sum P_\alpha(x_1x_2\cdots) \quad [357].$$

Nun ist aber (nach 356) $P_\alpha(x_1x_2\cdots)$ das arithmetische Mittel sämmtlicher Ausdrücke, welche hervorgehen, wenn man x_1, $x_2, \cdots$ in allen möglichen Anordnungen in die Lücken von P_α hineinfügt, also ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die Grössen x_1, $x_2, \cdots$ in dem Ausdrucke $P_\alpha(x_1x_2\cdots)$ vorkommen, d. h. $P_\alpha(x_1x_2\cdots) = P_\alpha(x_rx_s\cdots)$, wenn $x_1x_2\cdots$ und $x_rx_s\cdots$ dieselben Faktoren nur in verschiedener Folge enthalten sollen. Also ist

$$Ax_1x_2\cdots = \sum P_\alpha(x_rx_s\cdots) = \sum P_\alpha(x_rx_s\cdots) \quad [357]$$
$$= A(x_rx_s\cdots) = Ax_rx_s\cdots \quad [360]$$

363. Wenn irgend einer der Faktoren, welche mit einem Lückenausdrucke multiplicirt sind, eine Summe ist, so kann man statt der Summe die einzelnen Summanden setzen, und die so erhaltenen Lückenausdrücke addiren, d. h.

$$Ap(x + y + \cdots)q = Apxq + Apyq + \cdots,$$

wo p und q Faktorenreihen bezeichnen, und A einen Lückenausdruck.

Beweis. Nach 362 ist $Ap(x + y + \cdots)q = Apq(x + y + \cdots)$. Hier ist Apq wieder ein Lückenausdruck, und daher hat $Apq(x + y + \cdots)$ die Form einer Summe von Produkten, deren jedes $(x + y + \cdots)$ als einen Faktor enthält, alſo die Form $Px + y + \cdots + Qx + y + \cdots + \cdots$. Dies ist aber (nach 39) gleich $Px + Py + \cdots + Qx + Qy + \cdots = Px + Qx + \cdots + Py + Qy + \cdots = Apqx + Apqy + \cdots = Apxq + Apyq + \cdots$.

Anm. Es unterliegt hiernach das Produkt der Faktoren, welche in einen Lückenausdruck hineintreten ſollen, ganz den Geſetzen algebraiſcher Multiplikation, und es bietet ſich uns hier alſo die allgemeinere Aufgabe dar, diejenigen Produkte extenſiver Grössen, welche den Geſetzen algebraiſcher Multiplikation unterliegen, zu behandeln, was der Gegenstand des folgenden §. ſein ſoll.

§. 3. Algebraiſche Multiplikation.

364. Erklärung. Unter algebraiſcher Multiplikation verstehe ich diejenige Multiplikation, deren Bedingungsgleichungen ſind:

$$e_r e_s = e_s e_r \text{ und } E(Fe_r) = EFe_r,$$

wo e_r, e_s urſprüngliche Einheiten und E, F algebraiſche Produkte urſprünglicher Einheiten ſind. Ich bezeichne ſie wie gewöhnliche Produkte der Algebra ohne umſchliessende Klammer.

Anm. Name und Bezeichnung ſind darin begründet, dass für dieſe Multiplikation, wie unten gezeigt wird, alle Geſetze der in der Algebra angewandten Multiplikation gelten und keine andern. In dem ersten Theile war dieſe Multiplikation nicht zu behandeln, da ſie keine einfachen Grössen liefert, und mit der Funktionslehre aufs Engste zuſammenhängt. Sie kann als die charakteriſtiſche Multiplikation dieſes zweiten Theiles aufgefasst werden, während die den ersten Theil charakteriſirende kombinatoriſche Multiplikation von jetzt an immer mehr zurücktritt.

365. In einem algebraiſchen Produkte zweier einfacher Faktoren kann man die Faktoren vertauſchen, d. h. es ist

$$ab = ba.$$

Beweis. Es ſei $a = \sum \alpha_a e_a$, $b = \sum \beta_b e_b$, ſo ist

$$\begin{aligned} ab &= \sum \alpha_a e_a \sum \beta_b e_b = \sum \alpha_a \beta_b (e_a e_b) && [42] \\ &= \sum \beta_b \alpha_a (e_b e_a) && [364] \\ &= \sum \beta_b e_b \sum \alpha_a e_a && [42] \\ &= ba. \end{aligned}$$

366. Statt einen einfachen Factor c dem zweiten Faktor eines algebraischen Produktes hinzuzufügen, kann man ihn dem ganzen Produkte hinzufügen, d. h.

$$A(Bc) = ABc.$$

Beweis. A und B sind hier algebraische Produkte der aus den Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ numerisch abgeleiteten Grössen, also (nach 45) darstellbar in den Formen

$$A = \sum \alpha_a E_a, \quad B = \sum \beta_b F_b,$$

wo E_a, F_b algebraische Produkte der Einheiten sind. Endlich sei $c = \sum \gamma_c e_c$, so hat man

$$\begin{aligned} A(Bc) &= \sum \alpha_a E_a \left(\sum \beta_b F_b \sum \gamma_c e_c\right) = \sum \alpha_a \beta_b \gamma_c E_a (F_b e_c) && [45] \\ &= \sum \alpha_a \beta_b \gamma_c E_a F_b e_c && [364] \\ &= \sum \alpha_a E_a \sum \beta_b F_b \sum \gamma_c e_c && [45] \\ &= ABc. \end{aligned}$$

Anm. Hierdurch ist die algebraische Multiplikation als lineale Multiplikation, d. h. als solche, deren Bedingungsgleichungen noch gelten, wenn man statt der Einheiten beliebig aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt, nachgewiesen.

367. Die Ordnung, in welcher man mit einfachen Faktoren fortschreitend multiplicirt, ist gleichgültig für das Resultat, d. h.

$$Abcd\cdots = Acbd\cdots = \cdots.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} Abc &= A(bc) && [366] \\ &= A(cb) && [365] \\ &= Acb && [366]. \end{aligned}$$

Also kann man in einem klammerlosen Produkt zwei auf einander folgende Faktoren vertauschen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man jeden einfachen Faktor auf jede Stelle des Produktes bringen, also den fortschreitenden einfachen Faktoren beliebige Ordnung geben.

368. Statt mit mehreren einfachen Faktoren fortschreitend zu multipliciren, kann man mit ihrem Produkt multipliciren, d. h.

$$Abc\cdots = A(bc\cdots).$$

Beweis. Nach 366 ist

$$A(bc\cdots pq) = A(bc\cdots p)q = A(bc\cdots)pq \text{ u. f. w.}$$
$$= Abc\cdots pq.$$

369. Bei einem algebraischen Produkt von zwei beliebigen Faktoren kann man die Faktoren vertauschen, d. h.

$$AB = BA.$$

Beweis. Es sei $A = a_1\cdots a_m$, $B = b_1\cdots b_n$, so ist

$$AB = A(b_1\cdots b_n) = Ab_1\cdots b_n \quad [368]$$
$$= b_1\cdots b_n a_1\cdots a_m \quad [367]$$
$$= b_1\cdots b_n(a_1\cdots a_m) \quad [368].$$

370. Bei einem algebraischen Produkt von drei beliebigen fortschreitenden Faktoren kann man den zweiten und dritten Faktor in eine Klammer schliessen, d. h.

$$ABC = A(BC).$$

Beweis. Es sei $B = b_1\cdots b_m$, $C = c_1\cdots c_n$, so ist (nach 368)

$$A(BC) = A(B(c_1\cdots c_n)) = A(Bc_1\cdots c_n)$$
$$= Ab_1\cdots b_m c_1\cdots c_m$$
$$= A(b_1\cdots b_m)c_1\cdots c_m$$
$$= A(b_1\cdots b_m)(c_1\cdots c_m)$$
$$= ABC.$$

371. Wenn man aus den ursprünglichen Einheiten $e_1, \cdots e_n$ die Kombinationen mit Wiederholung zur m-ten Klasse bildet und jede dieser Kombinationen als algebraisches Produkt der darin enthaltenen Elemente setzt, so stehen diese Produkte in keiner Zahlbeziehung zu einander, und jedes algebraische Produkt von m Grössen, die aus den Einheiten $e_1\cdots e_n$ numerisch abgeleitet sind, lässt sich aus jenen Produkten numerisch ableiten.

Beweis. Nach der Definition in 364 sollen die Gleichungen

$$e_r e_s = e_s e_r$$

und $$E(Fe_r) = EFe_r$$

die vollständigen Bedingungsgleichungen der algebraischen Multiplikation sein, d. h. es soll keine Beziehung zwischen den Einheitsprodukten stattfinden, als solche, welche sich aus jenen Bedingungsgleichungen ableiten lassen. Jede aus ihnen ableitbare Gleichung muss also durch Anwendung jener Gleichungen identisch gleich null gemacht werden können. Da aber jene Fundamental-Gleichungen auf beiden Seiten stets dieselben Einheiten enthalten, nur in anderer Folge oder Zusammenfassung, so können durch Anwendung derselben in ein Produkt keine neuen Einheiten als Faktoren hineingebracht werden. Dagegen kann man alle Glieder einer solchen abgeleiteten Gleichung (nach 367, 368) auf die Form bringen, dass sie wohlgeordnete Kombinationen (mit gestatteter Wiederholung) aus den Einheiten $e_1 \cdots e_n$ werden. Nachdem dies geschehen ist, muss also die Gleichung identisch gleich null sein, d. h. alle Koefficienten müssen null sein, d. h. es findet keine Zahlbeziehung zwischen ihnen statt. Der zweite Theil des Satzes folgt unmittelbar aus 49.

Anm. Es bilden somit die Kombinationen mit Wiederholung aus den ursprünglichen Einheiten zu irgend einer (m-ten) Klasse, die Kombinationen als algebraische Produkte betrachtet, ein System von Einheiten höherer Ordnung, aus welchem sich alle algebraischen Produkte zu m Faktoren, welche aus den ursprünglichen Einheiten numerisch abgeleitet sind, wiederum numerisch ableiten lassen. Es lässt sich sehr leicht zeigen, dass dasselbe auch noch gilt, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten n beliebige, aus ihnen numerisch abgeleitete, aber in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen setzt. Indem ich jedoch diesen Beweis dem Leser überlasse, schreite ich sogleich zu dem für die weitere Entwickelung unentbehrlichen Satze.

372. Wenn ein algebraisches Produkt null ist, so muss nothwendig einer seiner Faktoren null sein, d. h. wenn

$$AB = 0, \quad A \gtrless 0$$

ist, so muss

$$B = 0$$

sein.

Beweis. Im allgemeinsten Falle werden A und B Vielfachensummen von algebraischen Produkten sein, deren Faktoren aus den ursprünglichen Einheiten a, b, c, ··· numerisch

abgeleitet sind. Dann bilden (nach 371) die Kombinationen mit Wiederholungen aus a, b, c, ···, wenn jede dieser Kombinationen als algebraisches Produkt der darin enthaltenen Einheiten gesetzt wird, die Einheiten aus denen A und B numerisch ableitbar sind. Man stelle sich vor, dass die Elemente jeder Kombination nach dem Alphabete geordnet sind, und die Kombinationen selbst zunächst nach Klassen aufgestellt sind, so dass jede niedere Klasse der höheren voran steht, und dass ferner innerhalb jeder Klasse die Kombinationen lexikographisch geordnet seien. Wir wollen diese Aufstellung die wohlgeordnete Aufstellung der Kombinationen nennen. Da A nach Hypothesis von Null verschieden ist, so muss unter den Koefficienten, durch welche A aus jenen Kombinationen abgeleitet ist, nothwendig mindestens einer von null verschieden sein. Es sei E_1 unter allen Kombinationen, welche in dem Ableitungsausdrucke von A einen von Null verschiedenen Koefficienten haben, diejenige, welche in der wohlgeordneten Aufstellung die früheste Stelle einnimmt, so erscheint A in der Form

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots = \sum \alpha_a E_a,$$

wo α_1 von Null verschieden ist. Ferner seien F_1, F_2, ··· nach der Reihe die Kombinationen der obigen Aufstellung, und

$$B = \sum \beta_b F_b = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots,$$

so ist

$$AB = \sum \alpha_a \beta_b E_a F_b \qquad [42].$$

Jedes Produkt $E_a F_b$ liefert wieder ein algebraisches Produkt der ursprünglichen Einheiten, und wenn wir diese Produkte mit G_1, G_2, ··· bezeichnen, so wird AB eine Vielfachensumme dieser Einheitsprodukte; also da AB nach Hypothesis null ist, so müssen alle Koefficienten dieser Vielfachensumme null sein, d. h.

$$\sum \alpha_a \beta_b [E_a F_b = G_m] = 0,$$

wo die in Klammer geschlossene Bedingung ausfagt, dass man die Summe aller der Produkte $\alpha_a \beta_b$ zu nehmen hat, deren zugehörige Einheitsprodukte $E_a F_b$ einen konstanten Werth G_m haben. Wir haben hier nur diejenigen Gleichungen dieser Art zu betrachten, welche in irgend einem Gliede den Faktor

α_1 enthalten; diese Gleichungen können wir in der Form schreiben

$$0 = \alpha_1\beta_k + \sum \alpha_a\beta_b [E_aF_b = E_1F_k],$$

wobei noch die Bedingung hinzuzufügen ist, dass unter den unter dem Summenzeichen stehenden Produkten keins mit $\alpha_1\beta_k$ identisch ist. Ich zeige nun, dass man diese Bedingung auch so ausdrücken könne: b müsse kleiner als k sein. In der That ergiebt sich zuerst, dass a nicht 1 sein kann; denn dann müsste das Produkt der beiden Kombinationen E_1 und F_b dieselbe Kombination liefern, wie das Produkt der beiden Kombinationen E_1 und F_k, d. h. F_b müsste mit F_k identisch sein, also $b = k$, dann wäre also $\alpha_a\beta_b$ mit $\alpha_1\beta_k$ identisch, was der vorausgesetzten Bedingung widerspricht. Also muss $a > 1$ sein, d. h. E_a muss in der wohlgeordneten Aufstellung der Kombinationen später vorkommen als E_1. Dies ist auf zwei Arten möglich; erstens auf die Art, dass E_1 weniger Elemente enthält als E_a, dann muss, da E_1F_k mit E_aF_b gleiche Kombination liefern soll, F_k mehr Elemente enthalten, als F_b, d. h. F_k muss in jener wohlgeordneten Aufstellung später folgen als F_b, d. h. $b < k$ sein. Oder zweitens, wenn E_1 und E_a gleich viel Elemente enthalten, so muss E_a in der lexikographischen Aufstellung später folgen als E_1. In dem Princip der lexikographischen Aufstellung von Kombinationen liegt es aber, dass das erste der Elemente a, b, ···, welches in 2 Kombinationen einen ungleichen Exponenten hat, in der später folgenden Kombination den kleineren Exponenten habe, so dass also, wenn dies Element in E_1 den Exponenten α, in E_a den Exponenten γ hat, $\gamma < \alpha$ sein muss. Ferner, aus der Bedingungsgleichung $E_aF_b = E_1F_k$ folgt, dass, wenn α, β, γ, δ die Exponenten sind, welche irgend ein Element beziehlich in den Kombinationen E_1, F_k, E_a, F_b hat, $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ sein muss. Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass, wenn ein Element in E_1 denselben Exponenten hat wie in E_a, es auch in F_k denselben Exponenten haben muss, wie in F_b, und dass also das erste der Elemente a, b, ··· welches in E_a einen andern Exponenten hat als in E_1, auch das erste ist, welches in F_b einen andern Exponenten hat als in F_k; es mögen α, β, γ, δ ins

Besondere die Exponenten dieses Elementes in E_1, F_k, E_a, F_b sein, so sahen wir, dass $\gamma < \alpha$ sein muss; dann folgt aber aus der Gleichung $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, dass $\delta > \beta$ sein muss, und dass also nach dem Princip der lexikographischen Aufstellung die Kombination F_b früher stehen muss als F_k, d. h. $b < k$ sein muss, da ja die Kombinationen $F_1, F_2, \cdots$ in jeder Klasse lexikographisch geordnet sein sollen. Somit haben wir gefunden, dass in den beiden möglichen Fällen $b < k$ sein muss. Wir haben also die Gleichung

$$* \quad 0 = \alpha_1\beta_k + \sum \alpha_a\beta_b \,[E_aF_b = E_1F_k,\ b < k].$$

Es sei nun zuerst $k = 1$, so fällt die Summe $\sum \alpha_a\beta_b$ ganz fort, da ihre Bedingung, $b < 1$ nicht erfüllt werden kann, also hat man $\alpha_1\beta_1 = 0$, und da α_1 nach der Voraussetzung $\gtrless 0$, und α_1 und β_1 Zahlen sind, so muss also

$$\beta_1 = 0$$

sein. Setzt man $k = 2$, so fällt, da $b < 2$ und $\beta_1 = 0$ ist, die Summe $\sum \alpha_a\beta_b$ gleichfalls weg, und man erhält $\alpha_1\beta_2 = 0$, also

$$\beta_2 = 0.$$

Und aus gleichem Grunde ergiebt sich, dass $\beta_3 = 0$ ist u. s. w. Also ist auch B, was $= \beta_1F_1 + \beta_2F_2 + \cdots$ war, $= 0$.

373. Wenn zwei algebraische Produkte aus je zwei Faktoren gleich sind, und einen gleichen, von null verschiedenen Faktor haben, so muss auch der andere Faktor in beiden gleich sein, d. h. wenn

$$AB = CB, \text{ und } B \gtrless 0.$$

ist, so muss

$$A = C$$

sein.

Beweis. Aus $AB = CB$ folgt

$$0 = AB - CB = (A - C)B.$$

Also da $B \gtrless 0$ ist, so muss (nach 372) $A - C$ null sein, d. h. $A = C$.

374. Erklärung. Unter dem algebraischen Quotienten $A : B$ verstehe ich denjenigen Ausdruck, welcher mit B algebraisch multiplicirt A giebt, d. h.

$$(A : B) \cdot B = A.$$

375. Es ist

$$AB : B = A.$$

Beweis. Nach 374 ist, wenn man darin AB statt A setzt,

$$(AB : B)B = AB.$$

Also (nach 373)

$$AB : B = A.$$

376. Alle algebraischen Gesetze der Multiplikation und Division gelten für die algebraische Multiplikation und Division extensiver Grössen.

Beweis. Denn alle diese Gesetze gründen sich auf die Formeln

$$AB = BA$$
$$ABC = A(BC)$$
$$(A : B)B = A$$
$$AB : B = A$$

und auf die für alle Multiplikationsarten (nach 42, 45) geltenden Beziehungen zur Addition und Subtraktion.

Anm. Durch die Identität der Rechnungsgesetze der so eben behandelten Multiplikation mit der gewöhnlichen Multiplikation der Algebra ist die Identität der Bezeichnung und Benennung gerechtfertigt. Der einzige Unterschied liegt in den verknüpften Grössen, welche dort Zahlen, hier beliebige extensive Grössen, wie z. B. Punkte, Linien u. s. w. sind. Es wäre verkehrt, wenn man diese Differenz der verknüpften Grössen auf die Bezeichnung oder Benennung der Verknüpfung selbst übertragen wollte, wodurch die Terminologie nutzlos anwachsen, und der Zusammenhang verdunkelt werden würde. Auch diejenigen Eigenschaften dieser Produkte, welche auf der besonderen Eigenthümlichkeit extensiver Grössen beruhen, finden sich in der Algebra, und zwar in der Lehre von den ganzen Funktionen, wieder. So z. B. liefert der Satz, dass sich jede ganze Funktion Einer Variabeln vom n-ten Grade in n lineare Faktoren zerlegen lässt, hier auf Strecken der Ebene angewandt, den Satz:

Jede Summe von algebraischen Produkten von je n Strecken Einer Ebene lässt sich auf Ein solches Produkt reduciren.

Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, dass auch die Annahme imaginärer Strecken verstattet sei.

§. 4. Ganze Funktionen ersten Grades. Quotient.

377. Erklärung. Wenn $a_1, a_2, \cdots a_n$ Grössen erster (oder n — 1-ter) Stufe in einem Hauptgebiet n-ter Stufe sind, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so verstehe ich unter dem Bruche (Quotienten)

$$Q = \frac{b_1, b_2, \cdots b_n}{a_1, a_2, \cdots a_n}$$

den Ausdruck, welcher mit $a_1, a_2, \cdots a_n$ multiplicirt, beziehlich die Werthe $b_1, b_2, \cdots b_n$ liefert, so dass also

$$\frac{b_1, b_2, \cdots}{a_1, a_2, \cdots} a_r = b_r.$$

Ich nenne $a_1, a_2, \cdots a_n$ die Nenner des Bruches, $b_1, b_2 \cdots b_n$ seine entsprechenden Zähler, und setze zwei Brüche, oder zwei Ausdrücke, welche aus Brüchen numerisch abgeleitet sind, dann und nur dann einander gleich, wenn sie mit jeder Grösse erster Stufe multiplicirt Gleiches liefern. Wenn auch die Zähler Grössen 1-ter oder (n — 1)-ter Stufe sind, und in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so nenne ich den Bruch einen umkehrbaren, und bezeichne in diesem Falle, wenn

$$Q = \frac{b_1, b_2, \cdots b_n}{a_1, a_2, \cdots a_n}$$

ist, mit $\frac{1}{Q}$ den umgekehrten Bruch, d. h. ich setze

$$\frac{1}{Q} = \frac{a_1, a_2, \cdots a_n}{b_1, b_2, \cdots b_n}.$$

Anm. Der Gedanke, welcher dieser Erklärung zu Grunde liegt, ist leicht hindurchzusehen. In der Algebra ist nämlich unter dem Quotienten $\frac{a}{b}$ der Ausdruck verstanden, welcher mit b multiplicirt a giebt, und dies genügt (wenn b nicht null ist) zur Definition des Zahlquotienten. Für die extensiven Grössen genügt es nicht zu wissen, welches Resultat die Multiplikation des Quotienten mit irgend einer (von Null verschiedenen) Grösse liefert, indem daraus nur die Multikation desselben mit solchen Grössen sich bestimmt, welche aus jener Grösse numerisch ableitbar sind. Man sieht also, dass in einem Gebiete n-ter Stufe die Resultate der Multiplikation eines Quotienten mit n in keiner Zahlbeziehung stehenden Grössen bestimmt sein müssen, damit der Quotient vollständig bestimmt sei. Der Quotient, in

diefem Sinne aufgefasst, ist für die Differenzial- und Integral-Rechnung extenfiver Grössen, fo wie für die Behandlung der geometrischen Verwandtschaften unentbehrlich. Ich bemerke noch, dass man als Nenner des Quotienten auch beliebige Grössen höherer Stufen hätte gestatten können; doch würde man dann den wefentlichen Vortheil grösserer Einfachheit gegen den zweifelhaften Vortheil unfruchtbarer Allgemeinheit austauschen. Ich werde deshalb auch die Zähler, wenn nicht ausdrücklich anderes festgefetzt wird, stets als Grössen erster Stufe betrachten.

378. Zwei Brüche oder Vielfachenfummen von Brüchen, welche mit n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster Stufe multiplicirt, Gleiches liefern, find einander gleich, vorausgefetzt, dass n die Stufe des Hauptgebietes ist.

Beweis. Es feien Q und Q_1 die beiden Brüche oder Vielfachenfummen von Brüchen, welche mit n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster Stufe $a_1 \cdots a_n$ multiplicirt, Gleiches liefern, alfo es fei

$$* \quad Qa_r = Q_1 a_r$$

für jeden Werth r zwischen 1 und n, fo ist zu zeigen, dass $Q = Q_1$, d. h. (nach 377) dass Q und Q_1 mit jeder Grösse erster Stufe x multiplicirt Gleiches liefern. Nun lässt fich (nach 24) jede folche Grösse in einem Hauptgebiete n-ter Stufe aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen, alfo aus $a_1, \cdots a_n$ numerisch ableiten. Es fei

$$x = x_1 a_1 + \cdots x_n a_n,$$

dann ist

$$\begin{aligned} Qx = Q(x_1 a_1 + \cdots x_n a_n) &= x_1 Q a_1 + \cdots x_n Q a_n \quad [44] \\ &= x_1 Q_1 a_1 + \cdots x_n Q_1 a_n \quad [*] \\ &= (x_1 a_1 + \cdots x_n a_n) Q_1 \quad [44] \\ &= Q_1 x. \end{aligned}$$

379. Einen Bruch multiplicirt man mit einer Zahl, indem man jeden Zähler mit diefer Zahl multiplicirt, und Brüche von gleichen Nennern addirt man, indem man die entsprechenden Zähler addirt, wobei die Nenner in beiden Fällen ungeändert bleiben, d. h., beides zufammengefasst,

$$\beta \frac{b_1, b_2, \cdots}{a_1, a_2, \cdots} + \gamma \frac{c_1, c_2, \cdots}{a_1, a_2, \cdots} + \cdots = \frac{(\beta b_1 + \gamma c_1 + \cdots), (\beta b_2 + \gamma c_2 + \cdots), \cdots}{a_1 \quad , a_2 \quad , \cdots}.$$

Beweis. Zu zeigen ist (nach 378), dass beide Seiten der zu erweisenden Gleichung mit jeder der Grössen $a_1, \cdots a_n$ multiplicirt, gleiches Resultat liefern. Nun ist (nach 44)

$$\left(\beta\frac{b_1,\ b_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}+\gamma\frac{c_1,\ c_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}+\cdots\right)a_r$$
$$=\beta\frac{b_1,\ b_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}a_r+\gamma\frac{c_1,\ c_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}a_r+\cdots$$
$$=\beta b_r+\gamma c_r+\cdots \qquad [377].$$

Ferner ist

$$\frac{(\beta b_1+\gamma c_1+\cdots),\ (\beta b_2+\gamma c_2+\cdots),\cdots}{a_1\qquad\qquad ,\ a_2\qquad\qquad ,\cdots}a_r$$
$$=\beta b_r+\gamma c_r+\cdots \qquad [377].$$

Bezeichnen wir also der Kürze wegen die linke Seite der zu erweisenden Gleichung mit L, die rechte mit R, so wird für jeden Index r

$$* \quad La_r=Ra_r.$$

Folglich $L=R$ (nach 378).

380. Jeden Bruch kann man auf die Form bringen, dass seine Nenner beliebige n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe sind (wo n die Stufenzahl des Hauptgebietes ist), und zwar ist

$$\frac{b_1,\ b_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}=\frac{\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}b_\alpha},\ \sum\overline{\alpha_{2,\alpha}b_\alpha},\cdots}{\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}a_\alpha},\ \sum\overline{\alpha_{2,\alpha}a_\alpha},\cdots}$$

wenn $\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}a_\alpha},\ \sum\overline{\alpha_{2,\alpha}a_\alpha},\cdots$ n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen, und $\alpha_{r,s}$ Zahlen sind.

Beweis. Es ist

$$\frac{b_1,\ b_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}a_\alpha}=\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}\frac{b_1,\ b_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}a_\alpha} \qquad [44]$$
$$=\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}b_\alpha} \qquad [377].$$

Aber auch

$$\frac{\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}b_\alpha},\ \sum\overline{\alpha_{2,\alpha}b_\alpha},\cdots}{\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}a_\alpha},\ \sum\overline{\alpha_{2,\alpha}a_\alpha},\cdots}\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}a_\alpha}=\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}b_\alpha}\ [377].$$

Also liefern beide Ausdrücke mit $\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}a_\alpha}$ multiplicirt, für jeden Werth von $1\cdots n$ gleiches Resultat, sind also, da $\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}a_\alpha}$, $\sum\overline{\alpha_{2,\alpha}a_\alpha},\cdots$ nach der Hypothesis in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, (nach 378) einander gleich.

381. Wenn $e_1, e_2, \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten ſind, und mit $E_{r,s}$ der Kürze wegen der Bruch bezeichnet wird, deſſen Nenner die urſprünglichen Einheiten ſind, und von deſſen Zählern derjenige, welcher dem Nenner e_r entſpricht, gleich e_s iſt, während alle übrigen Zähler desſelben null ſind, d. h. wenn

$$* \quad E_{r,s}e_r = e_s \text{ und } E_{r,s}e_t = 0 \quad [t \gtrless r]$$

iſt, ſo laſſen ſich die n^2 Ausdrücke, welche aus $E_{r,s}$ hervorgehen, indem man ſtatt r und s nach und nach beliebige der Zahlen $1 \cdots n$ ſetzt, als Brucheinheiten ſetzen, d. h. es laſſen ſich alle Brüche aus ihnen numeriſch ableiten, während ſie ſelbſt in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, und zwar iſt

$$\frac{\sum \overline{\alpha_{1,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}},\ \sum \overline{\alpha_{2,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}}, \cdots}{e_1 \quad , \quad e_2 \quad , \cdots} = \sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}.$$

Beweis 1. Es iſt

$$\frac{\sum \overline{\alpha_{1,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}},\ \sum \overline{\alpha_{2,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}}, \cdots}{e_1 \quad , \quad e_2 \quad , \cdots} e_r = \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}} \qquad [177].$$

Ferner iſt

$$\sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} e_r} = \sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} e_r} \qquad [44]$$

$$= \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} E_{r,\mathfrak{b}} e_r} = \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}} \qquad [*],$$

indem nämlich $E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} e_r = 0$ iſt für $\mathfrak{a} \gtrless r$, und $F_{r,\mathfrak{b}} e_r = e_{\mathfrak{b}}$ iſt. Alſo beide Ausdrücke, da ſie mit jeder der Grössen $e_1 \cdots e_n$ multiplicirt Gleiches liefern (nach 378) einander gleich.

2. Angenommen zweitens, es beſtände zwiſchen den Grössen $E_{r,s}$ eine Gleichung der Form

$$\sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}} = 0,$$

ſo hätte man für jeden Index r

$$0 = \sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} e_r} = \sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} e_r} \qquad [44].$$

Alſo da $E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} e_r = 0$ iſt, wenn r von $\mathfrak{a}$ verſchieden iſt,

$$= \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} E_{r,\mathfrak{b}} e_r} = \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}} \qquad [*].$$

Wenn aber

$$0 = \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}} = \alpha_{r,1} e_1 + \alpha_{r,2} e_2 + \cdots,$$

ſo muss, da $e_1, e_2, \cdots$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, (nach 28) jeder der Koefficienten von $e_1, e_2, \cdots$ null ſein, d. h.

$$a_{r,s} = 0$$

für jedes r und s, alſo iſt die angenommene Gleichung identiſch null, d. h. (nach 2) die Grössen $E_{r,s}$ stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.

382. Jeder Bruch lässt ſich als Lückenausdruck mit einfacher Lücke darstellen, und zwar ist, wenn die Nenner $a_1, \cdots a_n$ ein einfaches Normalſystem bilden,

$$\frac{b_1,\ b_2, \cdots}{a_1,\ a_2, \cdots} = [1|a_1]b_1 + [1|a_2]b_2 + \cdots.$$

Beweis. Zu zeigen ist, dass ſie mit jeder Grösse erster Stufe x multiplicirt Gleiches liefern. Nun ist, wenn $x = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots$ ist,

$$([1|a_1]b_1 + [1|a_2]b_2 + \cdots)x = [x|a_1]b_1 + [x|a_2]b_2 + \cdots \quad [353]$$
$$= x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots \quad [153].$$

Aber auch

$$\frac{b_1,\ b_2, \cdots}{a_1,\ a_2, \cdots}x = \frac{b_1,\ b_2, \cdots}{a_1,\ a_2, \cdots}(x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots) = x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots \quad [377].$$

Somit liefern beide Seiten der zu erweiſenden Gleichung mit jeder Grösse erster Stufe multiplicirt Gleiches, ſind alſo ſelbst gleich (nach 357, 377).

Anm. Es ist alſo der Bruch nur eine einfachere Form des Lückenausdruckes mit einer Lücke, und kann alſo auch jedes System beliebig vieler linearer Zahlfunktionen von beliebig vielen Zahlgrössen als Produkt eines Quotienten in eine extenſive Variable dargestellt werden.

383. Erklärung. Das bezügliche Produkt der Zähler eines Bruches, dessen Nenner das System der ursprünglichen Einheiten bilden, nenne ich den Potenzwerth des Bruches, und bezeichne den Potenzwerth des Bruches Q, wenn n die Anzahl der Nenner ist, mit $[Q^n]$, d. h. ich ſetze, wenn $Q = \frac{a_1,\ a_2, \cdots a_n}{e_1,\ e_2, \cdots e_n}$ ist, und $e_1, e_2, \cdots e_n$ das System der ursprünglichen Einheiten bilden,

$$[Q^n] = [a_1a_2 \cdots a_n].$$

Anm. Wenn jeder Zähler das p-fache des entsprechenden Nenners ist, so ist der Bruch vermöge der Definition gleich der Zahl p; das bezügliche Produkt der Zähler ist dann $[pe_1 \cdot pe_2 \cdots pe_n] = p^n [e_1 e_2 \cdots e_n]$, also da das bezügliche Produkt der ursprünglichen Einheiten 1 ist, $= p^n$, d. h. in einem Hauptgebiete n-ter Stufe ist der Potenzwerth einer Zahl p gleich p^n. Der tiefere Grund der gewählten Benennung und Bezeichnung liegt in einer eigenthümlichen Verknüpfung der extensiven Brüche, welche ganz der bezüglichen Multiplikation entspricht, und deren Wesen ich hier in mehr anschaulicher Form zu entfalten versuchen werde. Ich gründe den Begriff dieser Verknüpfung auf den des Lückenproduktes. Wenn nämlich $A, B, \cdots, A_1, B_1, \cdots$ Brüche sind, deren Nenner etwa die ursprünglichen Einheiten sein mögen, und $a, b, \cdots$ beliebige Grössen erster Stufe, 1 aber eine Lücke ist, in welche Brüche der genannten Art (also Grössen nullter Stufe) eintreten sollen, so setze ich $[AB\cdots] = [A_1 B_1 \cdots]$ dann und nur dann, wenn in Bezug auf eine beliebige Reihe von Grössen erster Stufe $a, b, \cdots$, deren Anzahl gleich der Anzahl der Faktoren jener Produkte ist,

$$[1a \cdot 1b \cdots]AB \cdots = [1a \cdot 1b \cdots]A_1 B_1 \cdots$$

ist. Ich nenne das Produkt $[AB\cdots]$ ein (auf das Hauptgebiet) bezügliches Produkt der Brüche $A, B, \cdots$. Aus diesem Begriffe folgt (nach 360) sogleich, dass die Ordnung der Faktoren in diesem Produkte für den Werth desselben gleichgültig ist, ein Gesetz, welches mit dem in 58 ausgesprochenen in Uebereinstimmung ist, da die Brüche der genannten Art als Grössen nullter Stufe zu betrachten sind. Ferner ergiebt sich leicht, dass wenn in dem Produkte $[1a \cdot 1b \cdots]$ zwei der Faktoren, z. B. die beiden ersten, einander gleich sind, allemal $[1a \cdot 1b \cdots]AB \cdots = 0$ ist. Denn es ist (nach 353) $[1a \cdot 1a \cdot 1c \cdots]ABC \cdots$ gleich einem Bruche, dessen Zähler die Summe aller der Ausdrücke ist, die man dadurch erhält, dass man $A, B, C, \cdots$ in allen möglichen Anordnungen in die Lücken eintreten lässt, und dessen Nenner die Anzahl dieser Ausdrücke ist. Nun zeigt sich, dass sich die Glieder des Zählers paarweise aufheben. Denn wenn $PQR \cdots$ eine andere Ordnung der Faktoren $ABC \cdots$ darstellt, und zwar so, dass P in die erste Lücke eintreten soll, Q in die zweite u. s. w., so wird das daraus entspringende Glied gleich $[Pa \cdot Qa \cdot Rc \cdots]$. Vertauscht man P und Q, so geht aus dieser Ordnung das Glied $[Qa \cdot Pa \cdot Rc \cdots]$ hervor, die Summe beider giebt aber null, da Pa und Qa Grössen erster Stufe sind, und deren Vertauschung (nach 60) entgegengesetzten Werth bedingt. Also heben sich die Glieder im Zähler paarweise auf, d. h. der Zähler wird null, also der Bruch null. Dasselbe gilt, wenn in dem Produkte $[1a \cdot 1b \cdots]$ beliebige zwei Faktoren gleich werden, so dass also in diesem Falle stets $[1a \cdot 1b \cdots]AB \cdots = 0$ ist. Daraus folgt aber wiederum sogleich, dass wenn sich die Grössenreihe $a, b, \cdots$ linear ändert, z. B. b in $b' = b + \alpha a$ sich verwandelt, das Produkt

$[la\cdot lb\cdots]AB\cdots$ denfelben Werth behält, und hieraus (nach 76), dass wenn fich a, b,$\cdots$ beliebig, jedoch fo ändern, dass ihr Produkt $[ab\cdots]$ konstant bleibt, auch $[la\cdot lb\cdots]AB\cdots$ konstant bleibt. Wir können daher diefen Ausdruck als Verknüpfung, und zwar als multiplikative Verknüpfung von $[ab\cdots]$ und $[AB\cdots]$ anfehen, und schreiben daher $[la\cdot lb\cdots]AB\cdots = [ab\cdots][AB\cdots]$. Hier hat $[AB\cdots]$, da es mit dem Produkte $[ab\cdots]$ verknüpft, wieder eine Summe von folchen Produkten derfelben Faktorenzahl, alfo eine Grösse derfelben Stufe liefert, ganz die Bedeutung eines extenfiven Bruches, aber eines folchen, der, wenn die Anzahl der Faktoren m ist, nur mit Grössen m-ter Stufe zufammentritt. Es feien E_1, E_2,$\cdots$ die Einheiten m-ter Stufe, und fei $E_1[AB\cdots] = A_1$, $E_2[AB\cdots] = A_2$,$\cdots$, fo ist klar, dass $[AB\cdots]$ einem Bruche Q gleich ist, dessen Nenner E_1, E_2,$\cdots$, und dessen entsprechende Zähler A_1, A_2,$\cdots$ find. Denn es giebt jenes Produkt $[AB\cdots]$ mit den Einheiten m-ter Stufe, alfo auch mit jeder aus ihnen ableitbaren Grösse, d. h. mit jeder Grösse m-ter Stufe multiplicirt, dasfelbe Refultat, wie diefer Bruch Q auf gleiche Weife verknüpft liefert, d. h. es ist vermöge der Definitionen jenes Produktes und diefes Quotienten $[AB\cdots] = Q$, d. h. das bezügliche Produkt von m Brüchen, deren Nenner und Zähler von erster Stufe find, giebt einen Bruch, dessen Nenner und Zähler von m-ter Stufe find. Durch die Reciprocität zwischen Grössen erster und $(n-1)$-ter Stufe (im Hauptgebiete n-ter Stufe) ergiebt fich auch, dass das bezügliche Produkt von m Brüchen, deren Nenner und Zähler von $(n-1)$-ter Stufe find, einen Bruch liefert, dessen Nenner und Zähler von $(n-m)$-ter Stufe find. Dies letztere Produkt würde daher als regressives, das erstere als progressives Produkt von Brüchen zu betrachten fein. Wir bleiben hier bei dem ersteren, alfo dem progressiven Produkte der Brüche stehen, um namentlich noch die progressiven Potenzen der Brüche zu betrachten. Da das Produkt gleicher Faktoren eben nur Eine Anordnung diefer Faktoren gestattet, fo geht fogleich aus dem Begriffe hervor, dass $[A^m][ab\cdots] = [Aa\cdot Ab\cdots]$ fei, vorausgefetzt natürlich, dass die Anzahl der Faktoren a, b,$\cdots$ auch m betrage. Setzen wir die ursprünglichen Einheiten e_1, e_2,$\cdots$ als Nenner, und a_1, a_2,$\cdots$ als entsprechende Zähler, d. h. $Ae_i = a_i$ u. f. w., fo ergiebt fich unmittelbar, dass $[A^m]$ mit dem Produkte von m ursprünglichen Einheiten multiplicirt, das Produkt der m entsprechenden Zähler gebe, und dass alfo die Potenzen von A jede Grösse, welche aus den ursprünglichen Einheiten hervorgegangen ist, und welche den Exponenten jener Potenz als Stufenzahl hat, in diejenige Grösse verwandelt, welche aus den entsprechenden Zählern genau auf diefelbe Weife hervorgeht. Betrachten wir ins Befondere diejenige Potenz von A, deren Exponent mit der Stufenzahl n des Hauptgebietes gleich ist, alfo $[A^n]$, fo ergiebt fich $[A^n][e_1e_2\cdots e_n] = [a_1a_2\cdots a_n]$, d. h. gleich dem bezüglichen Produkte der Zähler, alfo (nach 383) gleich dem

Potenzwerthe von A. Aber da das bezügliche Produkt der n ursprünglichen Einheiten (nach 94) gleich 1 ist, so ist $[A^n]$ selbst diesem Potenzwerthe gleich, worin also die vollständige Begründung der oben gewählten Bezeichnung liegt.

384. Der Potenzwerth eines Bruches ist gleich dem bezüglichen Produkte der Zähler, dividirt durch das der Nenner, d. h. wenn

$$Q = \frac{a_1,\ a_2, \cdots}{b_1,\ b_2, \cdots} \text{ ist, so ist } [Q^n] = \frac{[a_1 a_2 \cdots]}{[b_1 b_2 \cdots]}.$$

Beweis. Es sei $Qe_r = c_r$ für jeden Index r von 1 bis n; so ist $Q = \frac{c_1,\ c_2, \cdots}{e_1,\ e_2, \cdots}$ (nach 380). Ferner seien $b_1, b_2, \cdots$ als Vielfachensummen der ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ ausgedrückt, und sei für jeden Index r von 1 bis n, $b_r = \sum \beta_{r,\alpha} e_\alpha$, so ist $a_r = Qb_r = \sum \beta_{r,\alpha} Qe_\alpha = \sum \beta_{r,\alpha} c_\alpha$. Somit ist

$$\frac{[a_1 a_2 \cdots]}{[b_1 b_2 \cdots]} = \frac{[\sum \beta_{1,\alpha} c_\alpha \cdot \sum \beta_{2,\alpha} c_\alpha \cdots]}{[\sum \beta_{1,\alpha} e_\alpha \cdot \sum \beta_{2,\alpha} e_\alpha \cdots]}$$

$$= \frac{\sum \beta_{1,\alpha}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots [c_\alpha \cdot c_\mathfrak{b} \cdots]}{\sum \beta_{1,\alpha}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots [e_\alpha \cdot e_\mathfrak{b} \cdots]} \quad [45]$$

$$= \frac{\sum (-1)^r \beta_{1,\alpha}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots [c_1 c_2 \cdots]}{\sum (-1)^r \beta_{1,\alpha}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots [e_1 e_2 \cdots]} \quad [57]$$

wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots$ alle möglichen verschiedenen Anordnungen der Zahlen 1, 2, $\cdots$ darstellen und r die Anzahl der Zahlenpaare ist, die in den beiden Zahlreihen

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}, \cdots$$
$$1,\ 2, \cdots$$

entgegengesetzt geordnet sind. Hier heben sich nun die beiden Summen, und da $[e_1 e_2 \cdots] = 1$ ist, so erhält man

$$\frac{[a_1 a_2 \cdots]}{[b_1 b_2 \cdots]} = [c_1 c_2 \cdots] = [Q^n] \quad \text{(nach 383).}$$

385. Wenn Q und Q_1 Brüche mit n Nennern sind, und zu einander in der Zahlbeziehung

$$Q = \alpha Q_1$$

stehen, so stehen ihre Potenzwerthe in der Zahlbeziehung

$$[Q^n] = \alpha^n [Q_1^n].$$

Beweis. Es sei

$$Q_1 = \frac{a_1, \cdots a_n}{e_1, \cdots e_n}, \text{ also } Q = \frac{\alpha a_1, \cdots \alpha a_n}{e_1, \cdots e_n},$$

ſo ist (nach 383)

$$[Q^n] = [\alpha a_1 \cdot \alpha a_2 \cdots \alpha a_n] = \alpha^n [a_1 a_2 \cdots a_n] \quad [46]$$
$$= \alpha^n [Q_1{}^n] \quad [383].$$

386. Wenn zwischen den Zählern eines Bruches eine Zahlbeziehung herrscht, ſo lässt ſich der Bruch stets auf die Form bringen, dass einer oder mehrere ſeiner Zähler null werden, und zwischen den übrigen Zählern keine Zahlbeziehung stattfinde; und zwar wenn $e_1, \cdots e_n$ die Nenner, $a_1, \cdots a_n$ die Zähler des Bruches Q ſind, und zwischen $a_1, \cdots a_m$ keine Zahlbeziehung stattfindet, aber die übrigen $n - m$ Zähler aus ihnen numerisch ableitbar ſind, ſo dass

$$* \quad a_{m+r} = \alpha_{r,1} a_1 + \alpha_{r,2} a_2 + \cdots \alpha_{r,m} a_m$$

ist, ſo ist

$$Q = \frac{e_1, \cdots a_m, \quad 0, \quad 0, \quad \cdot\cdot, \quad 0}{e_1, \cdots e_m, \; c_{m+1}, \; c_{m+2}, \cdot\cdot, \; c_n}, \text{ wo}$$

$$c_{m+r} = \alpha_{r,1} c_1 + \alpha_{r,2} e_2 + \cdots \alpha_{r,m} e_m - e_{m+r}, \text{ d. h.}$$
$$= \frac{c_1, \cdots e_m}{a_1, \cdots a_m} a_{m+r} - e_{m+r}$$

ist. Und alle aus $c_{m+1}, \cdots c_n$ numerisch ableitbaren Grössen, aber auch keine andern geben mit Q multiplicirt, null.

Beweis. $Qc_{m+r} = \alpha_{r,1} Qc_1 + \cdots \alpha_{r,m} Qe_m - Qe_{m+r}$
$= \alpha_{r,1} a_1 + \cdots \alpha_{r,m} a_m - a_{m+r},$

da nach Hypotheſis $a_1, \cdots a_n$ die zu den Nennern $e_1, \cdots e_n$ gehörigen Zähler des Bruches Q ſind

$$= 0 \quad [*].$$

Alſo ſind die zu den Nennern $c_{m+1}, \cdots c_n$ gehörigen Zähler null. Ich zeige nun, dass zwischen den n Grössen $e_1, \cdots e_m$, $c_{m+1}, \cdots c_n$ keine Zahlbeziehung herrscht. Der Kürze wegen ſetze ich

$$\alpha_{r,1} e_1 + \cdots \alpha_{r,m} e_m = q_r,$$

ſo dass alſo $c_{m+r} = q_r - e_{m+r}$ ist, ſo ist

$$[e_1 \cdot e_2 \cdot \cdots c_m \cdot c_{m+1} \cdot \cdots c_n]$$
$$= [e_1 e_2 \cdots c_m (q_1 - e_{m+1}) \cdots (q_{m-n} - e_n)].$$

Da hier $q_1, q_2, \cdots$ aus $e_1, e_2, \cdots e_m$ numerisch abgeleitet ſind, ſo können wir ſie (nach 67) weglassen und erhalten das Produkt

$$= \mp [e_1 e_2 \cdots e_n],$$

alſo von Null verſchieden; folglich ſtehen e_1, $e_2 \cdots e_m$, $c_{m+1}, \cdots c_n$ (nach 61) in keiner Zahlbeziehung; alſo läſst ſich (nach 380) Q in der im Satze angegebenen Weiſe als Bruch darſtellen. Daraus nun, dass $c_{m+1}, \cdots c_n$ mit Q multiplicirt Null geben, folgt ſogleich, dass dies auch für jede Vielfachenſumme dieſer Grössen gilt. Aber auch umgekehrt muss jede Grösse p, welche mit Q multiplicirt null giebt, eine Vielfachenſumme von $c_{m+1}, \cdots c_n$ ſein. Denn wie auch p beſchaffen ſei, immer muss es ſich (nach 24) aus e_1, $e_2, \cdots e_m$, $c_{m+1}, \cdots c_n$ ableiten, alſo ſich in der Form

$$p = \alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_m e_m + q$$

darſtellen laſſen, wo q eine Vielfachenſumme von $c_{m+1}, \cdots c_n$ iſt. Soll dann $pQ = 0$ ſein, ſo hat man, da $Qc_1 = a_1$, u. ſ. w., $Qc_{m+1} = 0$ u. ſ. w. iſt,

$$0 = pQ = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_m a_m,$$

alſo (nach 28) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m = 0$, alſo $p = q$, d. h. eine Vielfachenſumme von $c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots c_n$.

387. Erklärung. Wenn ein Bruch Q mit einer von Null verſchiedenen Grösse erſter Stufe multiplicirt ein Vielfaches dieſer Grösse, etwa das ϱfache derſelben liefert, ſo dass alſo

$$Qx = \varrho x$$

iſt, ſo nenne ich den Koefficienten ϱ (mag ϱ nun reell oder imaginär ſein) eine Hauptzahl des Bruches Q, und das Gebiet, welchem alle Grössen x angehören, welche jener Gleichung genügen, das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet.

388. Aufgabe. Die Hauptzahlen und die zugehörigen Hauptgebiete eines Bruches zu finden.

Auflöſung. Es ſei ϱ eine Hauptzahl eines Bruches Q mit n Nennern $e_1, e_2, \cdots e_n$; und ſei $x = \sum x_a e_a$ eine von Null verſchiedene Grösse, welche mit Q multiplicirt ihr ϱfaches liefert, ſo hat man

$$Qx = \varrho x, \text{ d. h. } (\varrho - Q)x = 0.$$

Setzt man hierin ſtatt x ſeinen Werth, und ſetzt

(a) $(\varrho - Q)e_a = c_a$,

ſo erhält man

(b) $0 = \sum x_a c_a$.

Da nun x von Null verschieden ist, so muss auch mindestens eine der Zahlen $x_1, \cdots x_n$ von Null verschieden sein, also (nach 16) zwischen $c_1, \cdots c_n$ eine Zahlbeziehung stattfinden, folglich (nach 61) ihr kombinatorisches Produkt null sein, also

(c) $0 = [c_1 c_2 \cdots c_n]$,

d. h. (nach 384) der Potenzwerth des Bruches $\varrho - Q$ muss null sein. Umgekehrt, wenn diese Gleichung (c) erfüllt wird, so gilt (nach 66) auch eine Gleichung der Form (b), also giebt es dann eine Grösse $x \gtrless 0$, welche der Gleichung $Qx = \varrho x$ genügt, d. h. ϱ ist dann eine Hauptzahl. Setzt man in der letzten Gleichung statt c_1, $c_2, \cdots$ ihre Werthe aus (a), so erhält man

$$0 = [(\varrho e_1 - Qe_1)(\varrho e_2 - Qe_2) \cdots (\varrho e_n - Qe_n)],$$

oder indem man die Klammern löst

(d) $\alpha_0 \varrho^n - \alpha_1 \varrho^{n-1} + \alpha_2 \varrho^{n-2} - \cdots + (-1)^n \alpha_n = 0$,

wo α_r aus dem Produkte $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ dadurch hervorgeht, dass man auf alle möglichen verschiedenen Arten r der Grössen $e_1, e_2, \cdots e_n$ in die entsprechenden Grössen $Qe_1, Qe_2, \cdots Qe_n$ umwandelt, während man die jedesmal übrigen unverändert lässt. Die n Wurzeln $\varrho_1, \cdots \varrho_n$ dieser Gleichung (d) sind also die gesuchten Hauptzahlen; ihr Produkt ist nach dem Neutonschen Satze gleich $\alpha_n : \alpha_0$, d. h. gleich dem Potenzwerthe von Q (nach 384). Die Grössen x sind dann durch die Gleichung (b) bestimmt. Nach dieser Gleichung stehen c_1, $c_2, \cdots c_n$ in einer Zahlbeziehung zu einander. Folglich lässt sich (nach 17) aus den Grössen $c_1, \cdots c_n$ ein Verein von weniger als n Grössen, etwa c_1, $c_2, \cdots c_m$, aussondern, welcher keiner Zahlbeziehung unterliegt, und aus welchem die übrigen Grössen $(c_{m+1}, \cdots c_n)$ numerisch ableitbar sind; dann aber lässt sich der Bruch $\varrho - Q$, dessen zu den Nennern $e_1, \cdots e_n$ gehörigen Zähler (nach a) $c_1, \cdots c_n$ sind, (nach 386) auf die Form bringen, dass unter den Zählern $n - m$ derselben null werden; die zugehörigen Nenner seien $a_{m+1}, \cdots a_n$; so haben (nach 386) alle aus $a_{m+1}, \cdots a_n$ ableitbaren Grössen x, aber auch keine andern, die Eigenschaft, dass $(\varrho - Q)x = 0$ sei, d. h. dass $Qx = \varrho x$ wird, d. h. also, das Gebiet $a_{m+1} \cdots a_n$ ist das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet. Also:

„Jeder Bruch Q mit n Nennern hat n Hauptzahlen und zwar sind diese die Wurzeln ϱ der gleichbedeutenden Gleichungen c oder d, das Produkt dieser n Wurzeln ist gleich dem Potenzwerthe von Q, und das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet erhält man, indem man (nach 386) $\varrho - Q$ als einen Bruch darstellt, von dessen Zählern einer oder mehrere null sind, während die übrigen Zähler in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen; dann ist das Gebiet derjenigen Nenner dieses Bruches $\varrho - Q$, deren entsprechende Zähler null sind, das verlangte Hauptgebiet."

389. Wenn die n Hauptzahlen $\varrho_1, \cdots \varrho_n$ eines Bruches Q alle von einander verschieden sind, so sind die n zugehörigen Hauptgebiete alle von erster Stufe und stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.

Beweis. Nach 388 lässt sich zu jeder der Grössen $\varrho_1, \cdots \varrho_n$, z. B. zu ϱ_r, eine von Null verschiedene Grösse erster Stufe finden, welche mit Q multiplicirt ihr ϱ_r-faches liefert. Es seien $a_1, \cdots a_n$ diese Grössen, so dass $Qa_r = \varrho_r a_r$ ist. Angenommen nun, $a_1, \cdots a_n$ ständen in einer Zahlbeziehung, so müssten sich aus ihnen (nach 17) m Grössen, etwa $a_1, \cdots a_m$, aussondern lassen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ständen, und aus denen jede der übrigen, z. B. a_r, numerisch ableitbar wäre. Es sei $a_r = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_m a_m$, so muss, da a_r von Null verschieden ist, auch mindestens einer der Koefficienten $\alpha_1, \cdots \alpha_m$ von Null verschieden sein. Es sei dies z. B. α_1. Nun hat man

$$Qa_r = Q\sum \alpha_\alpha a_\alpha = \sum \alpha_\alpha Qa_\alpha = \sum \alpha_\alpha \varrho_\alpha a_\alpha,$$

da nach der Voraussetzung $Qa_r = \varrho_r a_r$ ist, also wird

$$\alpha_1\varrho_1 a_1 + \cdots \alpha_m\varrho_m a_m = Qa_r = \varrho_r a_r$$
$$= \varrho_r\alpha_1 a_1 + \cdots \varrho_r\alpha_m a_m,$$

folglich sind (nach 29) die entsprechenden Koefficienten gleich, namentlich $\alpha_1\varrho_1 = \alpha_1\varrho_r$, d. h. da $\alpha_1 \gtrless 0$, ist $\varrho_r = \varrho_1$, was gegen die Voraussetzung ist. Also können $a_1, \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Folglich kann auch keins der Hauptgebiete von höherer als erster Stufe sein. Denn wäre z. B. das zu ϱ_1 gehörige Hauptgebiet von höherer Stufe, so müsste dies Gebiet mit dem Gebiete (n — 1)-ter Stufe der

Grössen $a_2 \cdots a_n$ (nach 26) mindestens ein Gebiet erster Stufe gemein haben. Es sei c eine (von Null verschiedene) Grösse dieses gemeinschaftlichen Gebietes, so wäre c aus $a_2, \cdots a_n$ numerisch ableitbar, und würde sich doch, da es in dem zu ϱ_1 gehörigen Hauptgebiete liegt, in sein ϱ-faches verwandeln, was als unmöglich nachgewiesen ist.

390. Aufgabe. Den Fall gleicher Hauptzahlen zu untersuchen.

Auflösung. Wenn man die Bezeichnungen der vorhergehenden Sätze festhält, so hat man (nach 388)

(a) $[c_1 c_2 \cdots c_n] = 0$, wo

(b) $c_r = (\varrho - Q)e_r$.

Es sind also $c_1, c_2, \cdots c_n$ die zu den Nennern $e_1, e_2, \cdots e_n$ gehörigen Zähler des Bruches $\varrho - Q$, und die Gleichung (a) sagt aus, dass das kombinatorische Produkt der n Zähler null sei, d. h. dass der Potenzwerth von $\varrho - Q$ null sei. Es behalten nach dem Obigen die Gleichungen (a) und (b) ihre Bedeutung, wenn man statt der Nenner $e_1, \cdots e_n$ beliebige n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe setzt. Die n Werthe von ϱ, welche der Gleichung a genügen, sind (nach 389) die n Hauptzahlen von Q. Wenn nun mehrere, etwa α, derselben gleich α sind, so heisst das also, dass die Gleichung (a) für ϱ im Ganzen α Werthe darbiete, welche gleich α sind. Wenn aber ein Werth von ϱ gleich α ist, so lässt sich (nach 388) eine von Null verschiedene Grösse erster Stufe a_1 finden, welche mit Q multiplicirt ihr α-faches liefert. Es sei diese Grösse $a_1 = x_1 c_1 + \cdots x_n e_n$, so muss von den Koefficienten $x_1, \cdots x_n$ mindestens einer von Null verschieden sein, weil sonst, gegen die Annahme, a_1 selbst null wäre. Es sei x_1 von Null verschieden, so stehen (nach 19) $a_1, e_2, \cdots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, können also nach dem Obigen statt $c_1, e_2, \cdots e_n$ in die Gleichungen (a) und (b) eingesetzt werden; dann wird $c_1 = (\varrho - Q)a_1 = \varrho a_1 - Q a_1 = \varrho a_1 - \alpha a_1$ (nach Annahme) $= (\varrho - \alpha)a_1$ und die Gleichung (a) verwandelt sich in

$$(\varrho - \alpha)[a_1 c_2 \cdots c_n] = 0.$$

Wir wollen annehmen, man habe, wenn die Gleichung

(a) im Ganzen α Wurzeln $\varrho = \alpha$ hat, nach und nach die Gleichung (a) noch in die Formen

$$(\varrho - \alpha)^2[a_1 a_2 c_3 \cdots c_n] = 0$$

u. f. w., endlich in die Form

(c) $(\varrho - \alpha)^r[a_1 a_2 \cdots a_r c_{r+1} \cdots c_n] = 0$

umwandelt, wo $r < \alpha$ ist, und zwar fo, dass

$$Qa_1 = \alpha a_1, [a_1 \cdot Qa_2] = \alpha[a_1 a_2] \text{ u. f. w., endlich}$$

(d) $[a_1 a_2 \cdots a_{r-1} \cdot Qa_r] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_r]$

fei und die n Grössen $a_1, \cdots a_r, e_{r+1}, \cdots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo lässt fich zeigen, dass man diefe Umwandlungen auch fo weit fortfetzen könne, bis endlich $r = \alpha$ werde. In der That, fo lange noch r kleiner ist als α, d. h. es noch mehr als r Wurzeln $\varrho = \alpha$ giebt, welche der Gleichung (c) genügen, fo ist aus der Theorie der Gleichungen bekannt, dass, wenn man jene Gleichung durch $(\varrho - \alpha)^r$ dividirt, der Quotient noch eine Wurzel $\varrho = \alpha$ darbieten müsse, d. h. es muss noch

(e) $[a_1 \cdot \cdots \cdot a_r c_{r+1} \cdot \cdots \cdot c_n] = 0$

fein, für $\varrho = \alpha$. Es feien $d_{r+1}, \cdots d_n$ die Werthe, in welche $c_{r+1}, \cdots c_n$ übergehen, wenn man in den letztern α statt ϱ fetzt, fo erhält man

(f) $[a_1 \cdots a_r d_{r+1} \cdots d_n] = 0$, wo

(g) $d_{r+1} = (\alpha - Q)e_{r+1}, \cdots, d_n = (\alpha - Q)e_n$

ist. Diefe Gleichung g fagt aus, dass zwischen den Grössen $a_1, \cdots a_r, d_{r+1} \cdots d_n$ eine Zahlbeziehung herrscht (nach 66). Es fei

(h) $\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r + \alpha_{r+1} d_{r+1} + \cdots \alpha_n d_n = 0$

der Ausdruck diefer Zahlbeziehung, fo muss einer der Koefficienten $\alpha_{r+1}, \cdots \alpha_n$ von Null verschieden fein; denn wenn fie alle Null wären, fo würde zwischen $a_1, \cdots a_r$ eine Zahlbeziehung herrschen, was gegen die Vorausfetzung streitet. Es fei etwa α_{r+1} von Null verschieden, und fei $\alpha_{r+1} e_{r+1} + \cdots \alpha_n e_n = a_{r+1}$ gefetzt, fo stehen (nach 19) $a_1, \cdots a_{r+1}, e_{r+2}, \cdots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, können alfo statt $e_1, \cdots e_n$ in die Gleichungen (a) und (b), oder statt $a_1, \cdots a_r, e_{r+1}, \cdots e_n$ in die Gleichungen (c) und (d) eingefetzt werden, fo dass alfo nun $c_{r+1} = (\varrho - Q)a_{r+1}$ gefetzt werden kann. Ferner ist dann

$$(\alpha - Q)a_{r+1} = \alpha_{r+1}(\alpha - Q)e_{r+1} + \cdots + \alpha_n(\alpha - Q)e_n$$
$$= \alpha_{r+1}d_{r+1} + \cdots + \alpha_n d_n \quad \text{[nach g]}$$
$$= -\alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_r a_r \quad \text{[nach h].}$$

Alſo iſt

$$Qa_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \alpha a_{r+1}.$$

Folglich

$$[a_1 \cdots a_r \cdot Qa_{r+1}] = [a_1 \cdots a_r(\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r + \alpha a_{r+1})]$$
$$\text{(i)} \qquad = \alpha[a_1 \cdot \cdots \cdot a_r a_{r+1}] \quad \text{[67].}$$

Nun ſollte, wie oben gezeigt,

$$c_{r+1} = (\varrho - Q)a_{r+1} = \varrho a_{r+1} - Qa_{r+1}$$

ſein, alſo wird

$$[a_1 \cdot \cdots \cdot a_r \cdot c_{r+1}]$$
$$= \varrho[a_1 \cdots a_r a_{r+1}] - [a_1 \cdots a_r \cdot Qa_{r+1}]$$
$$= \varrho[a_1 \cdots a_{r+1}] - \alpha[a_1 \cdots a_{r+1}] \quad \text{[nach i]}$$
$$= (\varrho - \alpha)[a_1 \cdots a_{r+1}].$$

Setzt man dies in die Gleichung (c) ein, ſo erhält man

$$\text{(k)} \quad (\varrho - \alpha)^{r+1}[a_1 a_2 \cdots a_{r+1} c_{r+2} \cdots c_n] = 0,$$

d. h. die Gleichungen (c) und (d) beſtehen noch fort, wenn man, ſo lange noch $r < \alpha$ bleibt, in ihnen $r + 1$ ſtatt r ſetzt, folglich bleiben ſie noch beſtehen wenn $r = \alpha$ wird, d. h.

„Wenn unter den Hauptzahlen des Quotienten Q mehrere, und zwar α einander gleich und zwar $= \alpha$ ſind, ſo laſſen ſich α Grössen erſter Stufe $a_1, \cdots a_\alpha$ von der Art finden, daſs dieſe mit $n - \alpha$ der Grössen $e_1, \cdots e_n$, etwa mit $e_{\alpha+1}, \cdots e_n$, in keiner Zahlbeziehung ſtehen, und

$$\text{(*)} \quad Qa_1 = \alpha a_1, [a_1 \cdot Qa_2] = \alpha[a_1 a_2] \text{ u. ſ. w., endlich}$$
$$[a_1 a_2 \cdots a_{\alpha-1} \cdot Qa_\alpha] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_\alpha]$$

ſei, dann wird die Gleichung für die Hauptzahlen ϱ folgende:

$$\text{(**)} \quad (\varrho - \alpha)^\alpha [a_1 a_2 \cdots a_\alpha c_{\alpha+1} \cdots c_n], \text{ wo}$$
$$\text{(***)} \quad c_r = (\varrho - Q)e_r$$

für jeden Index r von $\alpha + 1$ an bis n iſt.“

Es kommt nun darauf an, die zu den Nennern $a_1, \cdots a_n$ gehörigen Zähler des Bruches Q zu finden. Zunächſt iſt der zu dem Nenner a_1 gehörige Zähler nach dem Obigen gleich αa_1. Es ſei der zu dem Nenner a_r gehörige Zähler x, d. h. $Qa_r = x$, ſo hat man (aus *)

$$[a_1 a_2 \cdots a_{r-1} x] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_r],$$

d. h. $[a_1 a_2 \cdots a_{r-1}(x - \alpha a_r)] = 0$,

alſo beſteht (nach 66) zwiſchen den Grössen a_1, $a_2, \cdots a_{r-1}$, $x - \alpha a_r$ eine Zahlbeziehung, d. h. es iſt

$$x - \alpha a_r = a'_r,$$

wo a'_r irgend eine aus a_1, $a_2, \cdots a_{r-1}$ numeriſch ableitbare Grösse iſt, und man erhält $x = \alpha a_r + a'_r$, d. h.

(l) $\quad Qa_r = \alpha a_r + a'_r$,

wo a'_r eine Vielfachenſumme von a_1, $a_2, \cdots a_{r-1}$ iſt.

Es werde nun das Produkt von Q mit irgend einer aus $a_1, \cdots a_\alpha$ numeriſch ableitbaren Grösse p unterſucht, und zwar ſei $p = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r$, wo $r = < \alpha$, und $\alpha_r \gtrless 0$ iſt, ſo hat man

$$\begin{aligned} Qp &= Q(\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r) \\ &= \alpha_1 Qa_1 + \cdots \cdot \alpha_r Qa_r \\ &= \alpha_1 \alpha a_1 \cdots \alpha_r \alpha a_r + p' \qquad \text{[nach l]}, \end{aligned}$$

indem p' eine Vielfachenſumme von a_1, $a_2, \cdots a_{r-1}$ darſtellt,

$$= \alpha p + p', \text{ d. h.}$$

„Die durch die obige Gleichung (*) beſtimmten Grössen a_1, $a_2, \cdots a_\alpha$ haben die Eigenſchaft, dass jede Vielfachenſumme derſelben der Gleichung

(****) $\quad Qp = \alpha p + p'$

unterliegt, wo, wenn p aus den r erſten jener Grössen ableitbar iſt, p' aus den (r — 1) erſten derſelben ableitbar iſt.“

Es leuchtet unmittelbar ein, dass wenn von den Grössen a'_2, $a'_3 \cdots$ der Gleichung (l) mehrere, etwa die Grössen a'_2, $\cdots a'_r$, null ſind, dann jede Vielfachenſumme von $a_1, \cdots a_r$ ſich durch die Multiplikation mit Q in ihr α-faches verwandelt, und alſo das zu α gehörige Hauptgebiet von Q (ſiehe 387) von r-ter Stufe iſt.

Wenn unter den Hauptzahlen von Q nicht nur α derſelben vorkommen, welche gleich α, ſondern auch b, welche gleich β, c, welche gleich γ ſind u. ſ. w., wo α, β, $\gamma, \cdots$ alle von einander verſchieden ſind, ſo laſſen ſich nach dem Obigen b in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehende Grössen b_1, $\cdots b_\beta$ von der Art angeben, dass jede Vielfachenſumme q von $b_1, \cdots b_\beta$ der Gleichung $Qq = \beta q + q'$ genügt, wo, wenn q aus dem m erſten jener Grössen ableitbar iſt, q' aus den

$(m-1)$ ersten derſelben ableitbar iſt, und ebenſo laſſen ſich c in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehende Grössen $c_1, \cdots c_t$ von der Art angeben, dass jede Vielfachenſumme r von $c_1, \cdots c_t$ der Gleichung $Qr = \gamma r + r'$ genüge, wo, wenn r aus den m ersten der Grössen $c_1, \cdots c_t$ ableitbar iſt, r' aus den $m-1$ ersten derſelben ableitbar iſt u. ſ. w. Es läſst ſich zeigen, dass dann die Grössen $a_1, \cdots a_\alpha$, $b_1, \cdots b_\beta$, $c_1, \cdots c_t$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, und alſo als Nenner des Bruches Q geſetzt werden können. In der That nehmen wir z. B. an, dass zwiſchen den Grössen $a_1, \cdots a_\alpha$, $b_1, \cdots b_\beta$, $c_1, \cdots c_{m-1}$ noch keine Zahlbeziehung beſtehe, aber nun zwiſchen dieſen Grössen und der Grösse c_m eine Zahlbeziehung hervortrete, ſo wird dieſe die Form haben

$$(m) \quad p + q + r = 0,$$

wo p eine Vielfachenſumme von $a_1, \cdots a_\alpha$, q eine Vielfachenſumme von $b_1, \cdots b_\beta$, r eine Vielfachenſumme von $c_1, \cdots c_m$ iſt, alſo wird auch

$$0 = Q(p + q + r)$$

ſein. Dies iſt aber, wie oben gezeigt,

$$= \alpha p + p' + \beta q + q' + \gamma r + r',$$

oder, indem wir ſtatt r ſeinen Werth $= -p - q$ aus der Gleichung (m) ſetzen,

$$0 = (\alpha - \gamma)p + (\beta - \gamma)q + p' + q' + r'.$$

Da nach dem Obigen r' aus $c_1, \cdots c_{m-1}$ numeriſch ableitbar iſt, ſo ſind alle in dieſer letzteren Gleichung vorkommenden Grössen aus den nach der Annahme in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehenden Grössen $a_1, \cdots a_\alpha$, $b_1, \cdots b_\beta$, $c_1, \cdots c_{m-1}$ numeriſch ableitbar. Die rechte Seite der letzten Gleichung wird ſich alſo als Vielfachenſumme der letztgenannten Grössen darſtellen laſſen, und da die linke Seite null iſt, ſo werden (nach 28) alle einzelnen Koefficienten dieſer Vielfachenſumme null ſein. Wenn nun p von Null verſchieden, etwa $= x_1 a_1 + \cdots + x_s a_s$ wäre, wo $x_s \gtrless 0$ iſt, ſo würde p' nach dem Obigen aus $a_1, \cdots a_{s-1}$ numeriſch ableitbar ſein, folglich würde a_s, da es auch in q, q', r', nicht enthalten iſt, in jener gleich null geſetzten Vielfachenſumme nur einmal vorkommen, nämlich mit dem Koefficienten $(\alpha - \gamma)x_s$ ver-

bunden; dieſer müsste alſo null ſein, was unmöglich ist, da x_α nach der Annahme ungleich null, und α ungleich γ ist. Folglich ist die Annahme, dass p von Null verschieden ſei, unmöglich, d. h. p ist gleich null, aus gleichem Grunde ist $q = 0$. Dann aber folgt aus der Gleichung (m), dass $r = 0$ ist. Da nun aber die Grössen $a_1, \cdots a_\alpha$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, ſo folgt aus $p = 0$, dass alle Koeſficienten des Ausdruckes, durch welchen p aus $a_1, \cdots a_\alpha$ abgeleitet ist, null ſind, und dasſelbe folgt für q und r. Alſo enthält die Gleichung (m) gar keinen Ausdruck der Zahlbeziehung; es findet alſo eine ſolche zwischen den Grössen $a_1, \cdots a_\alpha$, $b_1, \cdots b_\beta$, $c_1, \cdots c_\epsilon, \cdots$ gar nicht statt, was zu zeigen war. Alſo

„Wenn die Gleichung

$$[(\varrho e_1 - Qe_1)(\varrho e_2 - Qe_2) \cdots (\varrho e_n - Qe_n)] = 0,$$

welche in Bezug auf ϱ vom n-ten Grade ist, a Wurzeln $= \alpha$, b Wurzeln $= \beta$ u. ſ. w. darbietet, wo $\alpha, \beta, \cdots$ von einander verschieden ſind, ſo kann man n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen $a_1, \cdots a_\alpha$, $b_2, \cdots b_\beta, \cdots$ von der Art angeben, dass wenn p eine Vielfachenſumme der m ersten unter den Grössen $a_1, \cdots a_\alpha$, oder unter den Grössen $b_1, \cdots b_\beta$, oder unter den Grössen irgend einer folgenden Gruppe ist, dann Qp im ersten Falle $= \alpha p + p'$, im zweiten $= \beta p + p'$ u. ſ. w. ſei, wo p' aus den $m - 1$ ersten Grössen derſelben Gruppe numerisch ableitbar ist.“

Anm. 1. Wenn unter den Wurzeln ϱ ein Paar oder mehrere Paare imaginärer Wurzeln vorkommen, ſo ändert das in den gewonnenen Reſultaten nichts, da die Beweisführung ebenſowohl für imaginäre wie für reelle Wurzeln gilt. Es hat überdies nicht die geringste Schwierigkeit, die aus imaginären Wurzelpaaren fliessenden Bestimmungen in reelle Form umzuſetzen, was ich daher dem Leſer überlasse.

Anm. 2. Die im Obigen entwickelten Geſetze ſind für die Theorie der geometrischen Verwandtschaften von Wichtigkeit. In der That stellt jeder Quotient, wenn er nicht mehr als vier Nenner enthält, geometrisch gedeutet eine bestimmte kollineare Verwandtschaft dar, in der Art, dass jedes Punktſystem mit dem Quotienten multiplicirt ein dem ersteren kollineares Punktſystem liefert, und umgekehrt lässt ſich jedes einem ursprünglichen Punktſystem kollinear verwandte Punktſystem aus jenem durch Multiplikation mit einem Quotienten ableiten. Der Quotient gewährt nun vor jeder andern analytischen

Einkleidung jener Verwandtschaft den Vortheil, dass sich die wesentlichen Eigenthümlichkeiten der Verwandtschaft an ihm auf die einfachste Weise symbolisch darstellen. Sind z. B. die vier Hauptzahlen eines Quotienten mit vier Nennern alle reell und von einander verschieden, so bieten je zwei kollinear verwandte Punktsysteme im Raume, welche durch jene Quotienten dargestellt werden können, vier Punkte dar, von denen keine drei in einer Ebene liegen, und welche mit den ihnen entsprechenden zusammenfallen, und ausser diesen giebt es keinen fünften Punkt, welcher mit dem ihm entsprechenden Punkte des andern Systems zusammenfällt. Ebenso enthalten die vorhergehenden Sätze die besonderen Beziehungen kollinearer Verwandtschaft für die Fälle, wo mehrere der Hauptzahlen des zugehörigen Quotienten einander gleich werden. Die speciellen geometrischen Verwandtschaften, welche der Kollineation untergeordnet sind, gehen durch specielle Annahmen hervor. So z. B. die Affinität durch die Annahme, dass den unendlich entfernten Punkten jedes Systems auch unendlich entfernte Punkte des andern entsprechen. Ferner die Gleichheit durch die Annahme, dass ausserdem das Produkt der Hauptzahlen, d. h. der Potenzwerth des Quotienten gleich eins sei, die Kongruenz durch die Annahme, dass die entsprechenden Strecken gleich lang sein sollen (d. h. entweder $=1$, oder $=-1$, oder $=\cos.a+i\sin.a$), die Kongruenz verwandelt sich in die Symmetrie, wenn das Produkt der Hauptzahlen $=-1$ statt $+1$ wird. Endlich die Aehnlichkeit geht aus der Affinität hervor durch die Annahme, dass die entsprechenden Strecken numerisch in gleichem Verhältnisse stehen. Wir betrachten nun im Folgenden noch eine specielle Form des Quotienten, welche mit der Verwandtschaft der Reciprocität in engster Beziehung steht.

391. Wenn ein Bruch Q die Eigenschaft hat, dass für beliebige von Null verschiedene Grössen erster Stufe a und b

(a) $[Qa|b]=[Qb|a]$ und $[Qa|a]\gtrless 0$

ist, so lassen sich stets n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe $c_1,\cdots c_n$ von der Art finden, dass

(b) $[Qc_r|c_s]=0$

ist, sobald r von s verschieden ist. Ferner sind dann die n Hauptzahlen des Bruches Q alle reell, und unter ihnen so viel positive, als es unter den Produkten

(c) $[Qc_1|c_1],\cdots[Qc_n|c_n]$

positive giebt. Endlich lassen sich stets n zu einander normale Grössen $e_1,\cdots e_n$ von der Art finden, dass jede derselben mit Q multiplicirt ein Vielfaches derselben liefert, also

(d) $Qe_r = \varrho_r e_r$, wo

(e) $[e_r|e_s] = 0$

für jedes von r verschiedene s.

Beweis. Ich zeige zuerst, dass sich n Grössen $c_1, \cdots c_n$ der verlangten Art finden lassen. Es genügt zu zeigen, dass sie der Gleichung (b) für den Fall genügen, dass $r < s$ ist, denn da nach der Voraussetzung (a) $[Qc_r|c_s] = [Qc_s|c_r]$ ist, so folgt dann, dass die Bedingung auch bestehen bleibt, wenn umgekehrt der erste Index grösser ist als der zweite. Wir setzen der Kürze wegen $Qc_r = k_r$, so zeige ich zunächst, dass man n von null verschiedene Grössen erster Stufe $c_1, \cdots c_n$ finden kann, welche den Gleichungen $[k_r|c_s] = 0$, für jedes $r < s$ genügen. Nach 189 können wir diese Gleichungen auch schreiben $[c_s|k_r] = 0$. Zunächst wählen wir für c_1 eine beliebige (von Null verschiedene) Grösse (erster Stufe). Dann muss c_2 der Gleichung $[c_2|k_1] = 0$ genügen, d. h. c_2 muss zu k_1 normal sein (nach 152), oder anders ausgedrückt, c_2 muss dem Gebiete $|k_1$, welches von n — 1-ter Stufe ist, angehören. Im Uebrigen sei c_2 willkürlich. Ferner muss c_3 den Gleichungen $[c_3|k_1] = [c_3|k_2] = 0$ genügen, d. h. c_3 muss den Gebieten $|k_1$ und $|k_2$ angehören, also dem ihnen gemeinschaftlichen Gebiete, dieses ist (nach 25) mindestens von (n — 2)-ter Stufe, in ihm sei c_3 willkürlich. Aus gleichem Grunde muss c_4 den Gleichungen $[c_4|k_1] = [c_4|k_2] = [c_4|k_3] = 0$ genügen, also demjenigen Gebiete angehören, was den drei Gebieten (n — 1)-ter Stufe $|k_1$, $|k_2$, $|k_3$ gemeinschaftlich ist, dies Gebiet ist mindestens von (n — 3)-ter Stufe, in ihm sei c_4 willkürlich, und so fahre man fort. Endlich c_n muss den Gleichungen

$$[c_n|k_1] = [c_n|k_2] = \cdots = [c_n|k_{n-1}] = 0$$

genügen, d. h. c_n muss den (n — 1) Gebieten (n — 1)-ter Stufe $|k_1$, $|k_2, \cdots |k_{n-1}$ angehören, diese haben mindestens ein Gebiet erster Stufe gemeinschaftlich, in diesem sei c_n beliebig (aber von Null verschieden) angenommen. Somit haben wir jetzt n von Null verschiedene Grössen, welche den Gleichungen $[c_s|k_r] = 0$, d. h. $0 = [k_r|c_s] = [Qc_r|c_s]$ zunächst für jedes $r < s$ genügen, also auch nach Gleichung (a) für jedes von r verschiedene s. Es ist noch zu zeigen, dass $c_1, \cdots c_n$ in

keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Angenommen, es herrschte zwischen ihnen die Zahlbeziehung $x_1c_1 + \cdots + x_nc_n = 0$, wo mindestens einer der Koefficienten, z. B. x_r von Null verschieden ist, so hätte man

$$0 = [Qc_r|(x_1c_1 + \cdots x_nc_n)] = x_r[Qc_r|c_r],$$

weil alle übrigen Produkte null sind, also hätte man, da $x_r \gtrless 0$ ist, $[Qc_r|c_r] = 0$, was gegen die Voraussetzung (in a) streitet, also ist es unmöglich, dass $c_1, \cdots c_n$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Nun sei $[Qc_r|c_r] = \alpha_r$, und $a_r = c_r : \sqrt{\alpha_r}$ gesetzt. Dann bilden die Grössen $a_1, \cdots a_n$ einen Verein, welcher den Begingungen

(f) $[Qa_r|a_s] = 0$,

wenn $r \gtrless s$, und

(g) $[Qa_r|a_r] = 1$

unterliegt, und zwar ist a_r reell, wenn $[Qc_r|c_r]$ positiv ist; hingegen ist a_r einfach imaginär, d. h. als Produkt einer reellen Grösse und der Quadratwurzel aus -1 darstellbar, wenn $[Qc_r|c_r]$ negativ ist. Es sind also unter den Grössen $a_1, \cdots a_n$ so viel reelle, als unter den Produkten $[Qc_1|c_1], \cdots [Qc_n|c_n]$ positive sind. Ich will jeden solchen Verein $a_1, \cdots a_n$, welcher den Gleichungen f und g unterliegt, und in welchem jede der Grössen $a_1, \cdots a_n$ entweder reell oder einfach imaginär ist, der Kürze wegen einen konjugirten Verein nennen. Es zeigt sich nun, dass ein solcher Verein bei circulärer Aenderung der darin vorkommenden Grössen wiederum ein solcher Verein bleibt, und zwar so, dass die Anzahl der reellen unter den n Grössen in dem einen Verein eben so gross ist wie in dem andern. Hierbei will ich unter circulärer Aenderung zweier Grössen a_1 und a_2, wenn beide reell, oder beide einfach imaginär sind, den Uebergang derselben in zwei andere Grössen b_1 und b_2 verstehen, von denen

(h) $b_1 = xa_1 + ya_2$

$b_2 = xa_2 - ya_1$

ist, während x und y beide reell sind, und die Summe ihrer Quadrate eins ist, also

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Hingegen wenn von den beiden Grössen a_1 und a_2 die eine reell, die andere imaginär ist, so soll

$$b_1 = xa_1 + yia_2$$
$$b_2 = xa_2 - yia_2$$

sein, wo $i = \sqrt{-1}$, x und y beide reell sind, und $x^2 - y^2$, d. h. $x^2 + (yi)^2 = 1$ ist, oder anders ausgedrückt, die Gleichungen (h) stellen jede circuläre Aenderung von a_1 und a_2 dar, wenn x immer reell, y aber nur dann imaginär und zwar einfach imaginär ist, wenn von den Grössen a_1 und a_2 die eine reell und die andere einfach imaginär ist. Es leuchtet unmittelbar ein, dass auch b_1 und b_2 beide reell, oder beide einfach imaginär sind, oder eine derselben reell, die andere einfach imaginär ist, je nachdem dies für a_1 und a_2 der Fall war, und dass also die Anzahl der reellen Grössen des Vereins bei der circulären Aenderung dieselbe bleibt. Ferner wird für jedes $r > 2$ vermöge der Gleichungen h

$$[Qb_1|a_r] = x[Qa_1|a_r] + y[Qa_2|a_r] = 0,$$

da $[Qa_1|a_r]$ und $[Qa_2|a_r]$ (nach f) null sind, aus gleichem Grunde ist dann

$$[Qb_2|a_r] = 0.$$

Ferner ist

$$[Qb_1|b_2] = x^2[Qa_1|a_2] - y^2[Qa_2|a_1] + xy([Qa_1|a_1] - [Qa_2|a_2]),$$

oder da $[Qa_1|a_2] = [Qa_2|a_1] = 0$, und $[Qa_1|a_1] = [Qa_2|a_2] = 1$ ist,

$$[Qb_1|b_2] = 0.$$

Ferner ist

$$[Qb_1|b_1] = x^2[Qa_1|a_1] + y^2[Qa_2|a_2] + 2xy[Qa_1|a_2],$$

oder da $[Qa_1|a_2]$ null, $[Qa_1|a_1] = [Qa_2|a_2] = 1$, und $x^2 + y^2 = 1$ ist, so wird

$$[Qb_1|b_1] = 1,$$

und aus gleichem Grunde $[Qb_2|b_2] = 1$. Also genügt der Verein, welcher aus $a_1, a_2, \cdots a_n$ durch circuläre Aenderung zweier Grössen hervorgeht, noch immer den Gleichungen f und g, also auch jeder Verein, welcher aus $a_1, a_2, \cdots a_n$ durch wiederholte circuläre Aenderung hervorgeht.

Ich zeige nun, dass wenn irgend zwei der Grössen $a_1, \cdots a_n$, etwa a_1 und a_2 noch nicht zu einander normal sind, man sie durch circuläre Aenderung normal zu einander machen kann, und dass dabei das Produkt der numerischen Werthe

dieſer Grössen jedesmal abnimmt. In der That ſollen b_1 und b_2 zu einander normal ſein, d. h. (nach 152) $[b_1|b_2] = 0$ ſein, ſo hat man (nach h)

$$\begin{aligned} 0 &= [(xa_1 + ya_2)|(xa_2 - ya_1)] \\ &= x^2[a_1|a_2] - y^2[a_1|a_2] + xy(a_2^2 - a_1^2) \\ &= x^2 - y^2 - 2\gamma xy, \end{aligned}$$

wo $\gamma = (a_1^2 - a_2^2) : 2[a_1|a_2]$ ist, hieraus folgt

$$\frac{x}{y} = \gamma \mp \sqrt{1 + \gamma^2}.$$

Sind nun a_1 und a_2 beide reell oder beide einfach imaginär, ſo ist γ reell, alſo auch $\frac{x}{y}$ reell, alſo können wir dann x und y beide reell annehmen, und die Aenderung ist eine circuläre. Ist hingegen von den Grössen a_1 und a_2 die eine reell $= r$, die andere einfach imaginär $= r'i$ (wo $i = \sqrt{-1}$), ſo wird $\gamma = \mp (r^2 + r'^2) : 2i[r|r']$, alſo

$$\begin{aligned} 1 + \gamma^2 &= 1 - \left(\frac{r^2 + r'^2}{2[r|r']}\right)^2 = \left(1 + \frac{r^2 + r'^2}{2[r|r']}\right)\left(1 - \frac{r^2 + r'^2}{2[r|r']}\right) \\ &= \frac{r^2 + 2[r|r'] + r'^2}{2[r|r']} \cdot \frac{2[r|r'] - r^2 - r'^2}{2[r|r']} \\ &= -\frac{(r + r')^2 (r - r')^2}{4[r|r']^2}, \end{aligned}$$

alſo ist $\sqrt{1 + \gamma^2}$ einfach imaginär, aber auch γ, alſo auch ihre Summe, d. h. $x : y$; nehmen wir alſo x reell an, ſo wird y einfach imaginär, aber dies war gerade die Bedingung der circulären Aenderung für dieſen Fall, alſo lassen ſich in allen Fällen je zwei der Grössen des Vereins, die noch nicht normal zu einander ſind, durch circuläre Aenderung normal zu einander machen. Es ist noch zu zeigen, dass bei dieſer Aenderung das Produkt der numerischen Werthe der Grössen kleiner wird. Hierbei ſoll unter dem numerischen Werthe einer Grösse ri, wo r reell, und $i = \sqrt{-1}$ ist, der numerische Werth von r verstanden ſein. In dieſem Sinne ſeien α_1 und α_2 die numerischen Werthe von a_1 und a_2, und β_1 und β_2 die von b_1 und b_2, ſo ist (nach 156) $[a_1 a_2]^2 = [b_1 b_2]^2$, aber (nach 198) ist $[a_1 a_2]^2 = (\alpha_1 \alpha_2 \sin. \angle a_1 a_2)^2$, wenn α_1 und

α_2 reell sind; dasselbe wird nun auch der Fall sein, wenn a_1 und a_2 einfach imaginär, und unter $\angle a_1 a_2$ stets der Winkel zwischen den entsprechenden reellen Grössen verstanden ist; wenn hingegen eine der Grössen a_1 und a_2 reell, die andere einfach imaginär ist, so wird $[a_1 a_2]^2 = -(\alpha_1 \alpha_2 \sin. \angle a_1 a_2)^2$, aber dann auch $[b_1 b_2]^2 = -(\beta_1 \beta_2 \sin. \angle b_1 b_2)^2$, also da $[a_1 a_2]^2 = [b_1 b_2]^2$ ist, so ist in allen Fällen

$$(\alpha_1 \alpha_2 \sin. \angle a_1 a_2)^2 = (\beta_1 \beta_2 \sin. \angle b_1 b_2)^2.$$

Wenn nun a_1 und a_2 nicht zu einander normal, hingegen b_1 und b_2 zu einander normal sind, so ist $(\sin. \angle a_1 a_2)^2 < 1$, $(\sin. \angle b_1 b_2)^2 = 1$, also $(\alpha_1 \alpha_2)^2 < (\beta_1 \beta_2)^2$, d. h. da α_1, α_2, β_1, β_2 positiv sind, $\alpha_1 \alpha_2 < \beta_1 \beta_2$. Also wenn von den Grössen eines konjugirten Vereins irgend zwei noch nicht zu einander normal sind, so lässt sich der Verein circulär so umwandeln, dass das Produkt der numerischen Werthe aller Grössen des Vereins kleiner wird. Da es nun ein minimum für dies Produkt geben muss, und dies minimum nur eintreten kann, wenn alle Grössen des Vereins zu einander normal sind, so muss sich also durch (wiederholte) circuläre Aenderung aus dem Verein a_1, $a_2 \cdots a_n$ ein Verein ableiten lassen, von dessen n Grössen je zwei zu einander normal sind. Es sei r_1, $r_2, \cdots r_n$ dieser Verein, so genügt derselbe, da er aus dem Verein a_1, $a_2, \cdots a_n$ abgeleitet ist, wie oben bewiesen noch den Gleichungen f und g, und enthält eben so viele reelle Grössen, wie der letztere Verein, also eben so viele reelle Grössen, als unter den Produkten $[Qc_1|c_1], \cdots [Qc_n|c_n]$ positve Produkte vorkommen. Nun sei $Qr_1 = x_1 r_1 + \cdots x_n r_n$, so verwandelt sich die in der Gruppe f enthaltene Gleichung $0 = [Qr_1|r_2]$ in $0 = ([x_1 r_1 + x_2 r_2 + \cdots x_n r_n]|r_2] = x_2 [r_2|r_2]$, da alle übrigen Produkte $[r_1|r_2]$, $[r_3|r_2]$ u. s. w. wegen der normalen Beziehung (nach 152) null sind. Da nun ferner r_2, also auch $[r_2|r_2]$ von Null verschieden ist, so folgt aus der Gleichung $0 = x_2 [r_2|r_2]$, dass $x_2 = 0$ sei; auf gleiche Weise folgt $x_3 = 0, \cdots x_n = 0$, also $Qr_1 = x_1 r_1$. Dann verwandelt sich die in der Gruppe g enthaltene Gleichung $1 = [Qr_1|r_1]$ in $1 = x_1 [r_1|r_1] = x_1 r_1^2$, d. h. x_1 ist $= 1 : r_1^2$, also

$$Qr_1 = \frac{1}{r_1^2} r_1,$$

und aus gleichem Grunde ist

$$Qr_2 = \frac{1}{r_2^2} r_2, \cdots \quad Qr_n = \frac{1}{r_n^2} r_n.$$

Setzt man

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{r_1^2} = \varrho_1, \quad \frac{1}{r_2^2} = \varrho_2, \cdots \quad \frac{1}{r_n^2} = \varrho_n,$$

und setzt $r_1, r_2, \cdots r_n$ als die Nenner des Bruches Q, so werden also die zugehörigen Zähler $\varrho_1 r_1, \varrho_2 r_2, \cdots \varrho_n r_n$, und die Zähler des Bruches $\varrho - Q$ werden also $(\varrho - \varrho_1) r_1, (\varrho - \varrho_2) r_2, \cdots (\varrho - \varrho_n) r_n$, der Potenzwerth des Bruches $\varrho - Q$ ist (nach 383) gleich dem kombinatorischen Producte seiner Zähler dividirt durch das seiner Nenner, also gleich $(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) \cdots (\varrho - \varrho_n)$. Die Gleichung aber, durch welche die Hauptzahlen ϱ eines Quotienten bedingt sind, drückt aus, dass der Potenzwerth von $\varrho - Q$ null sei, also hat man

$$(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) \cdots (\varrho - \varrho_n) = 0,$$

d. h. $\varrho_1, \cdots \varrho_n$ sind die Hauptzahlen von Q, es waren dieselben (nach (i)) gleich $\frac{1}{r_1^2}, \frac{1}{r_2^2}, \cdots \frac{1}{r_n^2}$. Je nachdem nun r reell oder einfach imaginär ist, ist $\frac{1}{r^2}$ positiv oder negativ, also kommen unter den Hauptzahlen von Q so viel positive vor, als unter den Grössen $r_1, r_2, \cdots r_n$ reelle vorkommen, d. h. wie oben gezeigt, als unter den Produkten $[Qc_1|c_1], \cdots [Qc_n|c_n]$ positive vorkommen. Also ist der Satz vollständig erwiesen.

Anm. Die Hauptzahlen des Quotienten Q und die zugehörigen Grössen $r_1, r_2, \cdots r_n$ lassen sich durch das Verfahren in 388 unmittelbar finden; es kam hier nur darauf an, die besonders einfachen Beziehungen, welche unter der speciellen Voraussetzung, die wir für Q gemacht hatten, zwischen jenen Grössen hervortreten, abzuleiten. Gelegentlich kommt in dem oben gegebenen Beweise der Beweis des sogenannten Trägheitsgesetzes quadratischer Formen vor; auch lässt sich aus ihm der Sturm'sche Satz über die Wurzeln algebraischer Gleichungen leicht ableiten. Auf die Geometrie angewandt, schliesst unser Satz den Satz ein, dass jede algebraische Oberfläche zweiter Ordnung drei reelle Hauptaxen enthält, und der Satz 388 lehrt dieselben unmittelbar finden.

§. 5. Die Funktionen als extensive Grössen.

392. Erklärung. Ich ſage, eine Funktion f ſei aus einer oder mehreren Funktionen $f_1, f_2, \cdots$ **numeriſch ableitbar**, wenn ſich f in der Form

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots$$

darſtellen lässt, wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ Zahlgrössen ausdrücken, die entweder konſtant oder doch von den Variabeln der Funktionen unabhängig ſind, und wo das Gleichheitszeichen die Gleichheit für beliebige Werthe dieſer letzteren Variabeln ausſagt.

Anm. Nachdem dieſe Definition feſtgeſtellt ist, beziehen ſich alle bisher aufgeſtellten Erklärungen und Sätze unmittelbar auch auf Funktionen, welche hiernach als extenſive Grössen erſcheinen. Es ist dieſe Betrachtungsweiſe für die Funktionenlehre und daher auch für die Theorie der Kurven und Oberflächen von grosser Bedeutung, wie ſich unten zeigen wird. Auch kann ſie dazu dienen, um unabhängig von den früheren geometriſchen Entwickelungen, den Begriff der Addition von Punkten, Linien, Flächen u. ſ. w. feſtzuſtellen. Für die Schärfe der Auffaſſung ist noch zu bemerken, dass stets feſtgeſtellt ſein muss, welches die Variabeln ſind, von denen die Funktionen abhängig gedacht werden ſollen, und auf die ſich ſomit auch die obige Definitionsgleichung bezieht. Um ein Beiſpiel für die beſondere Geſtaltung der allgemeinen Begriffe zu geben, wenn Funktionen als Einheiten geſetzt werden, betrachte ich die 6 Funktionen x^2, y^2, xy, x, y, 1, in denen x und y die Variabeln ſind. Dieſe ſtehen in keiner Zahlbeziehung zu einander, da, wenn $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ ſein ſoll, für jeden Werth von x und y, alle Koefficienten a, b, c, d, e, f null ſein müssen. Wir können alſo jene 6 Funktionen als ein System von Einheiten ſetzen. Die aus ihnen numeriſch ableitbaren Funktionen ſind die Funktionen zweiten Grades mit zwei Variabeln. Dieſe bilden alſo ein Funktionsgebiet 6-ter Stufe. Aus 6 in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehenden Funktionen zweiten Grades mit 2 Variabeln lassen ſich alſo alle Funktionen zweiten Grades mit 2 Variabeln numeriſch ableiten.

393. Erklärung. Es ſeien x und y die Koordinaten eines Punktes in der Ebene (oder x, y, z die Koordinaten eines Punktes im Raume), ferner ſeien $f_1, f_2, \cdots f_n$ n in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehende Funktionen dieſer Koordinaten und ſei

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots x_n f_n,$$

d. h. $x_1, \cdots x_n$ die Ableitzahlen, durch welche f aus $f_1, \cdots f_n$ ableitbar ist. Endlich herrsche zwischen diesen Ableitzahlen die Gleichung

$$(a) \quad \varphi(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0,$$

so nenne ich die Gesammtheit der Kurven (Oberflächen) $f = 0$, für welche die Ableitzahlen von f der Gleichung (a) genügen, ein zu dieser Gleichung gehöriges Kurvengebilde (Flächengebilde), und zwar ein Kurvengebilde (Flächengebiet) n-ten Grades, wenn die Gleichung (a) vom n-ten Grade ist. Sind ins Besondere f_1, f_2, f_3 Funktionen ersten Grades von x und y und

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3,$$

so bedingt die homogene Gleichung

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ein Liniengebilde in der Ebene, und sind f_1, f_2, f_3, f_4 Funktionen ersten Grades von x, y, z, und

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4,$$

so bedingt die homogene Gleichung

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

ein Ebenengebilde im Raume.

Anm. Die ganze hier eingeleitete Idee ist nicht anders als die naturgemässe Erweiterung des Begriffs der Koordinaten, welche aus dem Wesen dieses Begriffs von selbst hervorgeht. Die Koordinaten sind, auf ihre ursprüngliche Idee zurückgeführt, die Ableitzahlen einer Grösse, durch welche diese Grösse aus mehreren in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Einheiten hervorgeht. Substituiren wir nun diesen Einheiten Funktionen der ursprünglichen Koordinaten, so geht der obige allgemeinere Begriff hervor. Diese Funktionen, welche als Einheiten gesetzt sind, werden dann in der Ebene jede durch eine Kurve und einen Koefficienten dargestellt, nämlich durch die Kurve, welche alle Punkte umfasst, deren ursprüngliche Koordinaten jene Funktion null machen, und durch den Koefficienten irgend eines von Null verschiedenen Gliedes der Funktion; wobei dann einerseits durch diese Funktion sowohl jene Kurve als jener Koefficient, andererseits durch die letzteren die erstere bestimmt ist. Diese Kurven selbst repräsentiren die räumliche Lage der Einheiten und diese Koefficienten ihre metrischen Werthe. Ausser dem in dem Lehrsatze angedeuteten Falle, wo f_1, f_2, $\cdots$ Funktionen ersten Grades sind, werde ich hier noch den Fall betrachten, wo f_1, f_2, $\cdots$ Kreisfunktionen sind.

394. Erklärung. Die Funktion

$$x^2 + y^2 + \beta x + \gamma y + \delta$$

nenne ich eine einfache Kreisfunktion, die Funktion

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta$$

eine α-fache Kreisfunktion. Und wenn $f(x, y)$ eine Kreisfunktion ist, so nenne ich den Kreis, dessen Gleichung, bei rechtwinkligen Koordinaten,

$$f(x, y) = 0$$

ist, den zu dieser Funktion gehörigen Kreis.

395. Alle Kreisfunktionen sind aus vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Kreisfunktionen numerisch ableitbar.

Beweis. Jede Kreisfunktion ist aus den vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Funktionen $x^2 + y^2$, x, y, 1 numerisch ableitbar. Folglich auch (nach 24) aus beliebigen vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden, aus $x^2 + y^2$, x, y, 1 ableitbaren Funktionen, d. h. aus vier solchen Kreisfunktionen.

396. Der Doppelabstand (siehe 345) eines Punktes (x', y') von einem Kreise, dessen Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

ist, wo $f(x, y)$ eine einfache Kreisfunktion bezeichnet, ist gleich

$$f(x', y').$$

Anm. Der Beweis durch Koordinaten ist bekannt. Viel einfacher ist jedoch der auf dem Begriff extensiver Grössen beruhende Beweis. Es gründet sich dieser darauf, dass, wenn p ein variabler Punkt, a der Mittelpunkt des Kreises und a' sein Radius ist,

$$(p - a)^2 - a'^2 = 0$$

die Gleichung des Kreises ist, und die linke Seite derselben zugleich den Doppelabstand des Punktes p von dem Kreise darstellt, was beides unmittelbar im Begriffe liegt.

397. Drei Kreise stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn sie alle drei durch dieselben zwei (reellen oder imaginären) Punkte gehen.

Beweis. Es seien f_1, f_2, f_3 drei Kreisfunktionen von x und y, k_1, k_2, k_3 die drei Kreise deren Gleichungen beziehlich

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0$$

sind. Es sei zuerst eine Zahlbeziehung zwischen ihnen angenommen, etwa

(a) $f_3 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$.

Die Durchschnittspunkte der Kreise k_1 und k_2 sind nun diejenigen Punkte, für welche gleichzeitig f_1 und f_2 null sind; dann ist aber vermöge der Gleichung (a) auch f_3 null, d. h. diese Durchschnittspunkte liegen auch in dem Kreise k_3. Nun sei umgekehrt angenommen, dass die Durchschnittspunkte von k_1 und k_2 auch in k_3 liegen. Für irgend einen dritten Punkt (x', y') in k_3 mögen, wenn man seine Koordinaten statt x und y in die Funktionen f_1 und f_2 einführt, diese beziehlich die Werthe α_1 und α_2 annehmen, so hat der Kreis, dessen Gleichung

$$\alpha_2 f_1 - \alpha_1 f_2 = 0$$

ist, mit k_3 ausser den obigen Durchschnittspunkten noch den Punkt (x', y') gemein, also drei Punkte, ist ihm also identisch, d. h. der Kreis k_3 ist aus k_1 und k_2 numerisch ableitbar.

Anm. Wenn die Durchschnittspunkte der Kreise k_1 und k_2 imaginär werden, so hat jeder Kreis, der dieselben beiden imaginären Punkte enthält, die Eigenschaft, dass sein Mittelpunkt mit den Mittelpunkten jener Kreise in gerader Linie liegt, und die drei Kreise dieselbe Linie gleichen Doppelabstandes (gleicher Potenz nach Steiner) haben.

398. Zwei Kreise haben stets eine gerade Linie des gleichen Doppelabstandes und drei Kreise stets einen Punkt des gleichen Doppelabstandes und zwar wenn f_1, f_2, f_3 drei einfache Kreisfunktionen sind, so ist

$$f_1 - f_2 = 0$$

die Gleichung für die gerade Linie des gleichen Doppelabstandes von den zu f_1 und f_2 gehörigen Kreisen, und der Punkt, welcher durch die Gleichungen

$$f_1 - f_2 = 0,\ f_1 - f_3 = 0$$

bestimmt ist, ist der Punkt des gleichen Doppelabstandes von den drei zu f_1, f_2, f_3 gehörigen Kreisen.

Beweis. Für die Punkte des gleichen Doppelabstandes der zu den einfachen Funktionen f_1, f_2 gehörigen Kreise hat man (nach 396)

$$f_1 = f_2,\ \text{d. h. } f_1 - f_2 = 0.$$

Da aber f_1 und f_2 einfache Kreisfunktionen sind, so heben sich in der Differenz $f_1 - f_2$ die quadratischen Glieder auf und $f_1 - f_2$ wird eine lineare Funktion, also $f_1 - f_2 = 0$ die Gleichung einer geraden Linie. Für den Punkt P des gleichen linären Abstandes von den drei zu f_1, f_2, f_3 gehörigen Kreisen hat man aus gleichem Grunde $f_1 = f_2 = f_3$, d. h. $f_1 - f_2 = 0$ und $f_1 - f_3 = 0$; also ist P der Durchschnittspunkt der durch die letzten zwei Gleichungen dargestellten geraden Linien.

Anm. Für zwei concentrische Kreise wird jene Linie unendlich entfernt, für identische unbestimmt. Für drei Kreise, deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen, wird der Punkt des gleichen Abstandes entweder unendlich entfernt, oder unbestimmt innerhalb einer geraden Linie oder ganz unbestimmt, je nachdem zwischen den drei Kreisen keine, eine, oder zwei Zahlbeziehungen herrschen, in welchem letztern Falle die drei Kreise identisch sind.

399. Vier Kreise stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn sie alle vier einen Punkt a des gleichen Doppelabstandes haben, und zwar stehen sie, wenn a endlich entfernt ist, in derselben Zahlbeziehung zu einander wie ihre Mittelpunkte.

Beweis 1. Es seien f_1, f_2, f_3, f_4 vier einfache Kreisfunktionen, k_1, k_2, k_3, k_4 die zugehörigen Kreise. Es sei zuerst angenommen, dass jene vier Funktionen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so dass etwa

$$f_4 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$

sei, so muss, da alle vier Funktionen einfache Kreisfunktionen sind, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ sein. Für den Punkt a des gleichen Doppelabstandes von drei Kreisen k_1, k_2, k_3 hat man (nach 398) $f_1 = f_2 = f_3$, also wird für diesen Punkt

$$f_4 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) f_1 = f_1,$$

da $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ ist, d. h. der Punkt a ist Punkt des gleichen Doppelabstandes von den vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4.

2. Es sei umgekehrt angenommen, dass a ein endlich entfernter Punkt sei, welcher gleichen Doppelabstand von den vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 habe; es seien a_1, a_2, a_3, a_4 die von dem Punkte a nach den Mittelpunkten jener Kreise gezogenen Strecken, und r_1, r_2, r_3, r_4 die vier Radien, und p die variable von a nach einem beliebigen Punkte der Kreis-

umfänge gezogene Strecke, so nehmen f_1, f_2, f_3, f_4 die Form an

$$f_s = (p - a_s)^2 - r_s^2 = p^2 - 2[a_s|p] + \delta,$$

wo $\delta = a_s^2 - r_s^2$ ist. Nach 396 stellt zugleich δ den Doppelabstand des Punktes, für welchen $p = 0$ ist, d. h. des Punktes a, von dem Kreise k_s dar. Dieser Doppelabstand ist nach der Voraussetzung für die vier Kreise $k_1, \cdots k_4$ derselbe. Ferner besteht (nach 233) zwischen den einfachen Mittelpunkten der Kreise $k_1, \cdots k_4$ eine Zahlbeziehung; dieselbe Zahlbeziehung findet (nach 222) auch zwischen den Strecken statt, welche von einem beliebigen Punkte nach jenen Mittelpunkten gezogen sind, also auch zwischen $a_1, \cdots a_4$. Es sei

$$a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$

diese Zahlbeziehung, so muss, da die Mittelpunkte einfache Punkte sind, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ sein; dann hat man

$$\begin{aligned} f_4 &= p^2 - 2[a_4|p] + \delta \\ &= p^2 - 2[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)|p] + \delta \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(p^2 + \delta) - 2[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)|p] \\ &= \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3. \end{aligned}$$

3. Ist der Punkt a des gleichen Doppelabstandes unendlich entfernt, so liegen (nach 398) die Mittelpunkte der vier Kreise in einer geraden Linie. Vier solche Kreise stehen aber stets in einer Zahlbeziehung zu einander; denn macht man diese gerade Linien zur Abscissenaxe (der x), so werden die vier Funktionen $f_1, \cdots f_4$ von der Form

$$f_s = x^2 + y^2 - 2\beta x + \delta_s,$$

indem das Glied mit y wegfällt. Es sind also dann die Funktionen $f_1, \cdots f_4$ aus den drei Funktionen $x^2 + y^2$, x und 1 numerisch ableitbar, stehen also (nach 392) in einer Zahlbeziehung zu einander.

Anm. Wenn der Punkt a des gleichen Doppelabstandes von vier Kreisen ausserhalb eines der Kreise liegt, so ist der Doppelabstand von diesem Kreise, gemäss der Definition, positiv, also auch der Doppelabstand von den übrigen Kreisen positiv, a liegt dann zugleich ausserhalb der übrigen Kreise. Zieht man von a die Tangenten an die vier Kreise, so müssen diese gleich sein, weil für jeden Kreis das Quadrat der von einem äusseren Punkte gezogenen Tangente gleich dem Doppelabstande dieses Punktes ist. Schlägt man also um a einen Kreis, dessen Radius gleich jenen Tangenten ist, so werden alle vier

Kreiſe von dieſem letztern Kreiſe ſenkrecht geſchnitten. Liegt hingegen a innerhalb eines der Kreiſe, ſo muss es auch innerhalb der andern liegen. Zieht man dann von a in irgend einem der Kreiſe diejenige Sehne, die durch a halbirt wird, ſo iſt das Quadrat der halben Sehne gleich dem Doppelabſtande des Punktes a von dieſem Kreiſe, zieht man alſo in allen vier Kreiſen die durch a halbirten Sehnen, ſo müssen dieſe alle einander gleich ſein. Schlägt man endlich um a mit der halben Sehne s einen Kreis, ſo wird dieſer Kreis von jedem der vier Kreiſe im Durchmesser, d. h. ſo geſchnitten, dass die beiden Durchschnittspunkte die Endpunkte eines und desſelben durch dieſen Kreis gezogenen Durchmessers ſind.

Man kann diesen in Durchmessern geschnittenen Kreis als einen ſenkrecht schneidenden betrachten, dessen Radius imaginär $= r\sqrt{-1}$ ist, während a der Mittelpunkt bleibt und erlangt dadurch den Vortheil eines gemeinschaftlichen Ausdrucks. Unſer Satz würde dann ſo lauten: Vier Kreiſe stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn ſie von Einem Kreiſe ſenkrecht geschnitten werden, und zwar iſt der Mittelpunkt dieſes Kreiſes der Punkt des gleichen Doppelabstandes von irgend dreien der vier Kreiſe, und der Radius gleich der Quadratwurzel dieſes Abstandes. Wir können dies auch ſo ausdrücken. Das aus drei Kreiſen ableitbare Gebiet iſt die Geſammtheit der Kreiſe, welche von einem und demſelben Kreiſe ſenkrecht geschnitten werden. In dieſem Sinne stellt alſo der letztgenannte Kreis jenes Gebiet, d. h. das aus Kreiſen erzeugbare Gebiet dritter Stufe dar; während das Gebiet zweiter Stufe durch einen Verein zweier Punkte dargestellt wurde.

400. Aufgabe. Den Kreis zu finden, welcher aus n gegebenen einfachen Kreiſen durch n gegebene Zahlen ableitbar iſt.

Auflöſung. Es ſeien α_1, $\alpha_2 \cdots \alpha_n$ die n gegebenen Zahlen, ihre Summe α; ferner ſei ein beliebiger Punkt O als Anfangspunkt aller Strecken angenommen, und ſeien die von ihm nach den n Mittelpunkten gezogenen Strecken a_1, $a_2 \cdots a_n$, und die n Radien ſeien β_1, $\beta_2, \cdots \beta_n$; ferner ſei die von O nach dem variablen Punkte gezogene Strecke r, ſo ſind die n zu den Kreiſen gehörigen einfachen Funktionen

$$(r - a_\alpha)^2 - \beta_\alpha^2$$

für jeden Werth des Index α von 1 bis n. Alſo iſt die geſuchte Kreisfunktion f,

$$f = \sum \alpha_\alpha [(r - a_\alpha)^2 - \beta_\alpha^2] = \sum \alpha_\alpha [r^2 - 2[r|a_\alpha] + a_\alpha^2 - \beta_\alpha^2]$$
$$= \alpha r^2 - 2[r|\sum \alpha_\alpha a_\alpha] + \sum \alpha_\alpha (a_\alpha^2 - \beta_\alpha^2),$$

weil $\sum \alpha_a = \alpha$ angenommen ist. Da nun der Punkt O willkürlich ist, so können wir ihn, wenn α nicht null ist, so wählen, dass er aus den n Mittelpunkten durch die Zahlen $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ numerisch ableitbar ist. Dann ist $\sum \alpha_a a_a = 0$ und das zweite Glied fällt weg. Dann wird

$$f = \alpha r^2 + \sum \alpha_a (a_a^2 - \beta_a^2).$$

Setzen wir $\sum \alpha_a (\beta_a^2 - a_a^2) = \alpha \beta^2$, so wird

$$f = \alpha (r^2 - \beta^2),$$

d. h. „der Mittelpunkt des gefuchten Kreifes ist, wenn die Summe der n gegebenen Zahlen nicht null ist, der aus den n Mittelpunkten der gegebenen Kreife durch die n gegebenen Zahlen ableitbare Punkt, und den Radius (β) desfelben erhält man, wenn man die n Doppelabstände des gefundenen Mittelpunktes von den n gegebenen Kreifen beziehlich mit den n gegebenen Zahlen multiplicirt, die Summe diefer Produkte durch die Summe der n gegebenen Zahlen dividirt, den Quotienten mit — 1 multiplicirt und aus diefem Produkte die Wurzel zieht."

Anm. Die Behandlung des Falles, wo $\alpha = 0$ wird, überlasse ich dem Lefer.

§. 6. Verwandtschaften von dem Gesichtspunkte der Funktionsverknüpfung aus betrachtet.

401. Erklärung. Zwei Vereine von Grössen nenne ich verwandt, wenn jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des ersten oder zweiten Vereines herrscht, auch zwischen den entsprechenden des andern stattfindet, d. h. wenn der Grösse

$$p = \alpha a + \beta b + \cdots$$

die Grösse

$$p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots$$

entspricht und umgekehrt, wo nämlich a, b, ... beliebige Grössen des ersten Vereins und a_1, b_1, ... die entsprechenden des andern, und α, β, ... beliebige Zahlen find.

402. Wenn zwei Vereine von Grössen, in denen die Grössen eines jeden Vereins fich aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen desfelben numerisch ableiten lassen, einander verwandt fein follen, so kann man beliebigen

n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen des einen Vereins beliebige n derselben Bedingung unterworfene Grössen des andern entsprechend setzen; dann ist zu jeder Grösse eines jeden der beiden Vereine die entsprechende des andern genau bestimmt.

Beweis. Es seien a, b,··· n in beliebige, in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen des einen, und a_1, b_1,··· n derselben Bedingung unterworfene Grössen des andern Vereins, so lässt sich nach der Voraussetzung jede Grösse p des ersten Vereins aus a, b,··· numerisch ableiten. Es sei

$$p = \alpha a + \beta b + \cdots$$

der Ausdruck dieser Ableitung, so sind (nach 29) die Zahlen α, β,··· genau bestimmt, sobald p eine bestimmte Grösse ist. Sollen nun beide Vereine verwandt sein, so muss (nach 400) der Grösse p eine Grösse

$$p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots$$

entsprechen. Es ist also zu jeder Grösse des einen Vereins die entsprechende des andern genau bestimmt. Es ist noch zu zeigen, dass die so gebildeten Vereine in der That einander verwandt sind, d. h. dass jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des ersten Vereins herrscht, auch zwischen den entsprechenden Grössen des zweiten herrsche und umgekehrt. Es sei

$$(a)\quad \varrho r + \sigma s + \cdots = 0$$

eine zwischen den Grössen r, s,··· des ersten Vereins herrschende Zahlbeziehung, und seien r_1, s_1,··· die den Grössen r, s,··· entsprechenden Grössen des zweiten Vereins, so ist zu zeigen, dass auch

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = 0$$

sei. Setzt man in (a) statt r, s,··· die Ausdrücke ihrer Ableitung aus a, b,···, löst die Klammern auf, und fasst die Glieder, welche a enthalten, in Ein Glied zusammen u. s. w., so erhält man einen Ausdruck der Form

$$\alpha a + \beta b + \cdots = 0,$$

wo α, β,··· Funktionen der Zahlgrössen ϱ, σ,··· und der

Ableitungszahlen von r, s, ⋯ ſind. Hieraus folgt, da a, b, ⋯ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, (nach 29)

$$\alpha = 0,\ \beta = 0, \cdots.$$

Wendet man nun dasſelbe Verfahren auf den Ausdruck $\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots$ an, ſo erhält man, da die Ableitzahlen von $r_1, s_1, \cdots$ dieſelben ſind, wie die von r, s, ⋯,

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \cdots$ dieſelbe Bedeutung haben, wie oben. Da aber $\alpha, \beta, \cdots$ null ſind, ſo erhält man

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = 0,$$

d. h. jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des ersten Vereins herrscht, herrscht auch zwischen den entsprechenden des zweiten, und ebenſo umgekehrt, d. h. die beiden Vereine ſind verwandt.

403. Wenn man aus zwei verwandten Vereinen zwei neue Vereine dadurch ableitet, dass man jedem linealen Produkt P, was aus Grössen des ersten Vereines gebildet ist, dasjenige Produkt als entsprechend ſetzt, welches auf gleiche Weiſe aus den entsprechenden Grössen des zweiten Vereins gebildet ist, ſo ſind dieſe beiden neuen Vereine einander gleichfalls verwandt; d. h. wenn r, s, ⋯ beliebige Grössen des einen und $r_1, s_1, \cdots$ die entsprechenden des verwandten Vereines ſind, und die linealen Produkte $P(r, s, \cdots)$ und $P(r_1, s_1, \cdots)$ einander entsprechend geſetzt werden, wie auch r, s, ⋯ gewählt ſein mögen, ſo ſind auch die ſo erhaltenen Vereine einander verwandt.

Beweis. Es ſeien $a_1, a_2, \cdots a_n$ Grössen des ersten Vereins, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und aus welcher ſich alle Grössen des ersten Vereins numerisch ableiten lassen, und $b_1, b_2, \cdots b_n$ die entsprechenden des andern, welche alſo derſelben Bedingung unterworfen ſind, und ſei

$$r = \sum \overline{\varrho_a a_a} = \varrho_1 a_1 + \cdots \varrho_n a_n,\ s = \sum \overline{\sigma_a a_a},\ \text{u. ſ. w.},$$

alſo (nach 400)

$$r_1 = \sum \overline{\varrho_a b_a},\ s_1 = \sum \overline{\sigma_a b_a}, \cdots,$$

ſo wird

$$\left.\begin{aligned} P(r, s, \cdots) &= \sum \overline{\varrho_a \sigma_b \cdots P(a_a, a_b, \cdots)} \\ P(r_1, s_1, \cdots) &= \sum \overline{\varrho_a \sigma_b \cdots P(b_a, b_b, \cdots)} \end{aligned}\right\} \quad [46].$$

Da nun die Produkte lineale sind, so muss (nach 50) jede Bedingungsgleichung, welche zwischen den Produkten $P(a_a, a_b, \cdots)$ herrscht, auch bestehen bleiben, wenn man statt $a_1, a_2, \cdots a_n$ die Grössen $b_1, b_2, \cdots b_n$ setzt. Nun lassen sich (nach 49), wenn p die Anzahl der verschiedenen Produkte von der Form $P(a_a, a_b, \cdots)$ und q die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen ist, die sämmtlichen Produkte $P(a_a, a_b, \cdots)$ aus $p - q$ derselben, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, numerisch ableiten, und zwar so, dass, wenn diese $p - q$ Produkte bestimmt sind, auch für jedes der übrigen Produkte die Ableitzahlen bestimmt sind. Die Ausdrücke dieser Ableitung sind nur von den Bedingungsgleichungen abhängig. Setzt man daher statt $a_1, a_2, \cdots$ überall $b_1, b_2, \cdots$, so müssen, da die Bedingungsgleichungen bei dieser Substitution noch geltend bleiben, auch die Ausdrücke jener Ableitung bestehen bleiben, d. h. wenn $A_1, A_2, \cdots$ die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Produkte sind, aus welchen sich alle übrigen Produkte der Form $P(a_a, a_b, \cdots)$ ableiten lassen, und

$$P(a_a, a_b, \cdots) = \alpha_{1, a, b, \ldots} A_1 + \alpha_{2, a, b, \ldots} A_2 + \cdots$$

ist, wenn ferner $B_1, B_2, \cdots$ diejenigen Produkte sind, welche aus den Produkten $A_1, A_2, \cdots$ dadurch hervorgehen, dass man in diesen $b_1, b_2, \cdots$ statt $a_1, a_2, \cdots$ setzt, so ist

$$P(b_a, b_b, \cdots) = \alpha_{1, a, b, \ldots} B_1 + \alpha_{2, a, b, \ldots} B_2 + \cdots.$$

Also

$$P(r, s, \cdots) = \sum \varrho_a \sigma_b \cdots (\alpha_{1, a, b, \ldots} A_1 + \alpha_{2, a, b, \ldots} A_2 + \cdots)$$

$$P(r_1, s_1, \cdots) = \sum \varrho_a \sigma_b \cdots (\alpha_{1, a, b, \ldots} B_1 + \alpha_{2, a, b, \ldots} B_2 + \cdots),$$

d. h. es ist $P(r, s, \cdots)$ durch dieselben Zahlen aus $A_1, A_2, \cdots$ abgeleitet, wie das entsprechende Produkt $P(r_1, s_1, \cdots)$ aus den entsprechenden Produkten $B_1, B_2, \cdots$, d. h. (nach 401) es ist der Verein der Produkte $P(r, s, \cdots)$ verwandt dem Vereine der entsprechenden Produkte $P(r_1, s_1, \cdots)$.

404. Man kann in zwei Vereinen, deren jeder aus n Grössen desselben ableitbar ist, und welche einander verwandt sein sollen, in jedem beliebige $n + 1$ Grössen annehmen, von denen keine n in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und festsetzen, dass den $n + 1$ Grössen des ersten Vereins

Grössen entsprechen sollen, welche den $n+1$ im zweiten Verein angenommenen Grössen kongruent sind; dann ist zu jeder Grösse eines Vereines die entsprechende des andern, mit Ausnahme eines für alle gleichen Zahlkoefficienten, genau bestimmt.

Beweis. Es seien $a_1 \cdots a_{n+1}$ die Grössen des ersten und $b_1 \cdots b_{n+1}$ die des zweiten Vereins, welche der im Satze ausgesprochenen Bedingung unterworfen sind, so wird sich, gemäss dieser Bedingung, jede der Grössen $a_1, \cdots a_{n+1}$ aus den übrigen durch Zahlen ableiten lassen, welche alle von Null verschieden sind. Denn da der Verein aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen ableitbar sein soll, so muss er auch (nach 24) aus je n dieser Bedingung unterworfenen Grössen ableitbar sein, also auch jede der Grössen $a_1, \cdots a_{n+1}$ aus den übrigen, und sollte von den Ableitzahlen irgend eine Null sein, so würde zwischen den n übrigen, gegen die Voraussetzung eine Zahlbeziehung herrschen. Dasselbe gilt für die Grössen $b_1 \cdots b_{n+1}$. Nun sei

$$(a) \quad \begin{cases} a_{n+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n \\ b_{n+1} = \beta_1 b_1 + \cdots \beta_n b_n, \end{cases}$$

also $\alpha_1, \cdots \alpha_n$, $\beta_1, \cdots \beta_n$ alle ungleich Null.

Ferner seien $c_1, \cdots c_{n+1}$ die Grössen, welche beziehlich den Grössen $a_1, \cdots a_{n+1}$ entsprechen und den Grössen $b_1 \cdots b_{n+1}$ kongruent sein sollen. Aus diesen Kongruenzen folgt, dass für jeden Index r von 1 bis $n+1$ sich c_r als Produkt von b_r in eine Null verschiedene Zahl x_r muss darstellen lassen, also

$$(b) \quad c_r = x_r b_r.$$

Da ferner $c_1, \cdots c_{n+1}$ den Grössen $a_1, \cdots a_{n+1}$ so entsprechen sollen, dass die Vereine verwandt sind, so muss (nach 401)

$$(c) \quad c_{n+1} = \alpha_1 c_1 + \cdots \alpha_n c_n$$

sein. Substituirt man in (c) die Werthe aus (b) und dividirt mit x_{n+1}, so erhält man

$$b_{n+1} = \frac{x_1 \alpha_1}{x_{n+1}} b_1 + \cdots \frac{x_n \alpha_n}{x_{n+1}} b_n.$$

Aber aus (a) hat man zugleich

$$b_{n+1} = \beta_1 b_1 + \cdots \beta_n b_n,$$

also muss (nach 29)

$$\frac{x_1\alpha_1}{x_{n+1}} = \beta_1, \cdots \frac{x_n\alpha_n}{x_{n+1}} = \beta_n.$$

Hierdurch bestimmen sich alle Unbekannte bis auf eine. Setzen wir $x_{n+1} = \lambda$, so wird

$$(d) \quad x_1 = \frac{\lambda\beta_1}{\alpha_1}, \cdots, \; x_n = \frac{\lambda\beta_n}{\alpha_n}, \; x_{n+1} = \lambda.$$

Wenn diese Bedingungen (d) erfüllt sind, so wird auch umgekehrt die Gleichung c erfüllt. Dann sind also die Vereine verwandt in Bezug auf die $n+1$ Grössen $a_1 \cdots a_{n+1}$ und die ihnen entsprechenden $c_1 \cdots c_{n+1}$ und jeder Grösse

$$p = u_1a_1 + \cdots u_na_n$$

entspricht die Grösse

$$q = u_1c_1 + \cdots u_nc_n,$$

oder, indem man statt $c_1 \cdots c_n$ ihre Werthe aus (b) und dann statt $x_1 \cdots x_n$ ihre Werthe aus (d) setzt,

$$q = \lambda\left(\frac{u_1\beta_1}{\alpha_1}b_1 + \cdots \frac{u_n\beta_n}{\alpha_n}b_n\right),$$

d. h. q ist mit Ausnahme eines konstanten Faktors λ genau bestimmt.

Anm. Es lässt sich die Verwandtschaft zweier Vereine, abgesehen von den metrischen Werthen der entsprechenden Grössen, auch in der Art bestimmen, dass man festsetzt, es sollen jeden drei in einer Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen des ersten Vereins auch drei in einer Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen des zweiten und umgekehrt entsprechen. Der Beweis der Identität dieser Bestimmung mit der oben gegebenen (wenn man von den metrischen Werthen der entsprechenden Grössen absieht) ergiebt sich leicht, wenn man die von Möbius in seinem barycentrischen Calcul in §. 200—206 und besonders in §. 203 gegebene vortreffliche Entwickelung der Collineation auf die hier betrachtete allgemeine Verwandtschaft überträgt.

405. Der Raum und die Ebene lassen sich in der Art einander verwandt setzen, dass jedem Punkte im Raume ein Kreis in der Ebene entspricht und umgekehrt. Dann entsprechen den in Einer Ebene liegenden Punkten des Raumes solche Kreise, welche von Einem und demselben Kreise senkrecht geschnitten werden. Und zwar kann man fünf beliebige Punkte des Raumes, von denen keine vier in Einer Ebene liegen, mit fünf beliebigen Kreisen der Ebene, von

denen keine vier von Einem Kreise senkrecht geschnitten werden, entsprechend setzen. Dann aber ist zu jedem Punkte des Raumes der entsprechende Kreis der Ebene und umgekehrt bestimmt. Jeder Satz der Stereometrie lässt sich in diesem Sinne auf Kreise der Ebene, und umgekehrt jeder Satz über Kreise der Ebene auf Punkte des Raumes übertragen.

Beweis. Nach 395 ist jede Kreisfunktion aus vier beliebigen in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Kreisfunktionen numerisch ableitbar, und nach 232 ist jeder Punkt im Raume aus vier beliebigen in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Punkten numerisch ableitbar. Folglich kann man (nach 404), wenn die Punkte des Raumes und die Kreise einer Ebene zwei verwandte Vereine bilden sollen, fünf beliebige Punkte des Raumes, von denen keine vier in einer Zahlbeziehung stehen, d. h. keine vier in Einer Ebene liegen, und fünf beliebige Kreise der Ebene, von denen keine vier in einer Zahlbeziehung stehen, d. h. keine vier von Einem Kreise senkrecht geschnitten werden, annehmen und festsetzen, dass jenen fünf Punkten des Raumes diese fünf Kreise entsprechen sollen, dann ist zu jedem Punkte des Raumes der entsprechende Kreis der Ebene und umgekehrt bestimmt. Ferner, da nach dem Begriffe der Verwandtschaft (401) jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des einen Vereins herrscht, auch zwischen den entsprechenden Grössen des verwandten Vereins besteht, so folgt, dass wenn zwischen vier Punkten des Raumes eine Zahlbeziehung herrscht, auch zwischen den vier entsprechenden Kreisen eine solche herrschen muss, d. h. wenn die vier Punkte in Einer Ebene liegen, so müssen die vier entsprechenden Kreise von Einem Kreise senkrecht geschnitten werden. Endlich die Uebertragbarkeit der Sätze folgt daraus, dass jeder Satz des Raumes sich vermittelst der vier Ableitungszahlen, durch die jeder Punkt darstellbar ist, in einen analytischen Satz kleidet, und dieser sich wieder, indem man die vier Ableitzahlen als die Ableitzahlen des jenem Punkte entsprechenden Kreises setzt, in einen Satz über Kreise der Ebene verwandeln lässt, und ebenso umgekehrt.

406. Man kann in der Ebene zwei verwandte Vereine von Kreifen annehmen, und dabei fünf beliebige Kreife des einen fünf beliebigen Kreifen des andern Vereins entsprechend fetzen, vorausgefetzt, dass keine vier der in demfelben Vereine angenommenen fünf Kreife von einem und demfelben Kreife fenkrecht geschnitten werden, dann ist zu jedem 6-ten Kreife des einen Vereins der entsprechende des andern bestimmt, und jeden vier Kreifen des einen Vereins, die von Einem Kreife fenkrecht geschnitten werden, entsprechen vier Kreife des andern, die gleichfalls von Einem Kreife fenkrecht geschnitten werden.

Beweis ergiebt fich aus dem Obigen von felbst.

Anm. Wir nennen die fo eben behandelte Verwandtschaft die fyncyclische. Von befonderem Interesse ist der Fall, wo folchen Kreifen, die fich in Punkte zufammenziehen, auch in dem andern Vereine gleichfalls folche entsprechen.

407. Wenn der Kreis, dessen Gleichung

$$(a) \quad \alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0$$

ist, wo α, β, γ, δ reell find, fich in einen Punkt zufammenziehen foll, fo muss

$$(b) \quad \alpha\delta = \beta^2 + \gamma^2$$

fein, umgekehrt, wenn die Gleichung (b) stattfindet und nicht alle Koefficienten null find, fo muss der durch (a) dargestellte Kreis fich entweder in einen Punkt zufammenziehen, oder in die unendlich entfernte Gerade umschlagen; letzteres, wenn α, β, γ zugleich null find.

Beweis. Aus der Gleichung (a) ergiebt fich, wenn α nicht null ist, für den Radius r des zu jener Gleichung gehörigen Kreifes

$$r^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\delta}{\alpha^2},$$

woraus das Uebrige hervorgeht. Wenn hingegen α null ist, fo wird die Gleichung (a) die Gleichung einer geraden Linie; aber dann folgt aus (b), dass $\beta^2 + \gamma^2$ null fei, d. h. dass β und γ null feien; alfo ist dann die durch die Gleichung (a) dargestellte Linie die unendlich entfernte.

408. Nimmt man x und y als (rechtwinklige) Koordinaten eines Vereins von Kreifen und x' und y' als die eines andern, und fetzt den vier Funktionen

$$x^2 + y^2,\ x,\ y,\ 1$$

nach der Reihe die Funktionen

$$1,\ x',\ y',\ x'^2 + y'^2$$

entsprechend, so dass also jedem Kreise, dessen Gleichung

(a) $\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0$

ist, derjenige Kreis entspricht, dessen Gleichung

(b) $\alpha + 2\beta x' + 2\gamma y' + \delta(x'^2 + y'^2) = 0$

ist; so entspricht jedem Punkte des ersten Vereines, mit Ausnahme des Anfangspunktes der Abscissen, ein Punkt des zweiten und umgekehrt; dem Anfangspunkte der Abscissen hingegen entspricht in dem andern Vereine jedesmal die unendlich entfernte Gerade.

Beweis. Wenn der Kreis, dessen Gleichung (a) ist, sich in einen Punkt zusammenzieht, so ist $\alpha\delta = \beta^2 + \gamma^2$ (407). Wenn aber diese Gleichung gilt, so ist auch der Kreis, dessen Gleichung (b) ist (407), entweder ein Punkt (wenn $\delta \gtrless 0$) oder die unendlich entfernte Gerade, letzteres wenn β, γ, δ null sind, d. h. wenn der Punkt des ersten Vereins durch die Gleichung $\alpha(x^2 + y^2) = 0$ bestimmt, also Anfangspunkt der Koordinaten ist.

409. Wenn bei zwei syncyclisch verwandten Vereinen von Kreisen der unendlich entfernten Geraden jedes Vereins ein Punkt des andern entspricht, und allen übrigen Punkten jedes Vereines wiederum Punkte des andern entsprechen, so kann man stets den (zu einander senkrechten) Koordinatenaxen jedes Vereins eine solche Lage geben, und dem als Einheit genommenen Maasse der Längen einen solchen Werth, dass den vier Funktionen

$$x^2 + y^2,\ x,\ y,\ 1$$

des ersten Vereines nach der Reihe die vier Funktionen

$$1,\ x',\ y',\ x'^2 + y'^2$$

des andern entsprechen.

Beweis. Die unendlich entfernte Gerade wird durch eine Funktion dargestellt, welche bloss aus einer Konstanten besteht. Der Punkt, welcher in jedem Vereine der unendlich entfernten Geraden des andern Vereines entspricht, sei zum Anfangspunkte der Abscissen gemacht. Der Anfangs-

punkt der Abscissen wird durch die Kreisfunktion $x^2 + y^2$ dargestellt. Diefer Funktion entspreche in dem zweiten Vereine die Konstante a, durch welche die unendlich entfernte Gerade dargestellt; ebenfo entspreche der Funktion $x'^2 + y'^2$ des zweiten Vereins in dem ersten die Konstante b. Man ändere nun das als Einheit genommene Maass der Längen, fo multipliciren fich die Koordinaten mit einem konstanten Faktor λ, und es entsprechen fich dann

$$\lambda^2(x^2 + y^2),\ b$$
$$a,\quad \lambda^2(x'^2 + y'^2).$$

Es werde λ^2 fo bestimmt, dass $a : \lambda^2 = \lambda^2 : b$, d. h. $\lambda^4 = ab$ fei.

Setzen wir dann $\frac{a}{b} = \mu^2$, fo entsprechen fich

$$x^2 + y^2,\ 1$$
$$\mu,\quad \mu(x'^2 + y'^2).$$

Nun werden aber die räumlichen Gebilde, welche durch Funktionen dargestellt werden, nicht verändert, wenn man diefe alle mit einer konstanten Zahl, alfo hier mit μ dividirt, und wir können daher $x^2 + y^2$ und 1 mit 1 und $x'^2 + y'^2$ entsprechend fetzen. Es möge ferner den Funktionen x und y des ersten Vereines die Funktionen f_1 und f_2, nämlich

$$f_1 = \alpha_1(x'^2 + y'^2) + \beta_1 x' + \gamma_1 y' + \delta_1$$
$$f_2 = \alpha_2(x'^2 + y'^2) + \beta_2 x' + \gamma_2 y' + \delta_2$$

entsprechen, fo dass alfo den Funktionen

$$x^2 + y^2,\ x,\ y,\ 1$$

die Funktionen

$$1,\ f_1,\ f_2,\ x'^2 + y'^2$$

entsprechen. Aus den ersteren fei durch die Koefficienten α, β, γ, δ eine Funktion f abgeleitet, fo entspricht ihr im zweiten Vereine die Funktion f', welche durch diefelben Koefficienten aus den vier letzten Funktionen abgeleitet ist. Die Bedingung dafür, dass die erstere Funktion f einen blossen Punkt darstellt, ist (nach 407)

$$(a)\quad 4\alpha\delta = \beta^2 + \gamma^2.$$

Für die zweite Funktion

$$f' = \alpha + \beta f_1 + \gamma f_2 + \delta(x'^2 + y'^2)$$
$$= (\delta + \beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2)(x'^2 + y'^2) + (\beta\beta_1 + \gamma\beta_2)x'$$
$$+ (\beta\gamma_1 + \gamma\gamma_2)y' + \alpha + \beta\delta_1 + \gamma\delta_2$$

ist diese Bedingung:

$$4(\delta+\beta\alpha_1+\gamma\alpha_2)(\alpha+\beta\delta_1+\gamma\delta_2)=(\beta\beta_1+\gamma\beta_2)^2+(\beta\gamma_1+\gamma\gamma_2)^2.$$

Führt man hier statt δ den Werth aus (a) ein, so erhält man

$$(\beta^2+\gamma^2+4\alpha\beta\alpha_1+4\alpha\gamma\alpha_2)(\alpha+\beta\delta_1+\gamma\delta_2)$$
$$=\alpha(\beta\beta_1+\gamma\beta_2)^2+\alpha(\beta\gamma_1+\gamma\gamma_2)^2.$$

Diese Gleichung muss für beliebige Werthe von α, β, γ gelten, also müssen die Koefficienten, die zu gleichen Potenzen dieser Grössen gehören, auf beiden Seiten gleich sein. Da die rechte Seite α nur in der ersten Potenz enthält, so müssen die Koefficienten der Glieder, welche α^2 enthalten, und derer, welche α gar nicht enthalten, null sein, also sind α_1, α_2, δ_1, δ_2 null, d. h. f_1 und f_2 stellen gerade Linien dar, welche durch den Anfangspunkt der Abscissen gehen. Legen wir die Abscissenaxe so, dass sie mit der durch f_2 dargestellten Linie zusammenfällt, so reducirt sich f_2 bloss auf das Glied, was y enthält, d. h. β_2 wird null. Dividiren wir dann noch die so reducirte Gleichung durch α, so geht sie über in

$$\beta^2+\gamma^2=\beta^2\beta_1{}^2+(\beta\gamma_1+\gamma\gamma_2)^2.$$

Da in der entwickelten Gleichung $2\gamma_1\gamma_2$ der Koefficient von $\beta\gamma$ ist, so muss $\gamma_1\gamma_2=0$ sein; γ_2 kann nicht null sein, weil sonst f_2 identisch gleich null wäre, also muss γ_1 null sein. Dann erhält man

$$\beta^2(1-\beta_1{}^2)+\gamma^2(1-\gamma_2{}^2)=0,$$

also $\beta_1=\mp 1$, $\gamma_2=\mp 1$. Da auf jeder der beiden Koordinatenaxen die Seite, nach welcher die Koordinaten positiv genommen sind, beliebig gewählt werden können, so können wir β_1 und $\gamma_2=+1$ setzen, und es wird dann $f_1=x'$, $f_2=y'$, und entsprechen also den Funktionen

$$x^2+y^2,\ x,\ y,\ 1$$

des ersten Vereins die Funktionen

$$1,\ x',\ y',\ x'^2+y'^2$$

des zweiten.

Anm. Die hier behandelte specielle Art der syncyclischen Verwandtschaft ist zuerst von Möbius aufgestellt und von ihm Kreisverwandtschaft genannt worden; vergl. Möbius Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren (in den Berichten der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wiss., 5. Febr. 1853). Es ergiebt sich aus dem Obigen, dass derjenige Punkt in jedem der beiden kreisverwandten

Vereine als charakteristisch hervortritt, welchem im andern Vereine die unendlich entfernte Gerade entspricht. Es sei dieser Punkt Centralpunkt des Vereins genannt. Legt man nun die beiden Vereine so auf einander, dass die Centralpunkte, die x-Axen und die y-Axen sich gegenseitig decken, so deckt auch jede durch den Centralpunkt gehende gerade Linie, z. B. die gerade Linie $qx + ry = 0$ die entsprechende. Schlägt man nun noch um den Centralpunkt mit der Länge, welche als Maass der Koordinaten zu Grunde gelegt ist, einen Kreis, welcher Hauptkreis heisse, so stellt sich die ganze Art des gegenseitigen Entsprechens aufs Anschaulichste dar. Dann besteht die Peripherie des Hauptkreises aus den sämmtlichen Punkten, welche ihre entsprechenden decken, jedem Punkt im Innern des Kreises entspricht im andern Vereine ein auf demselben Radius liegender Punkt ausserhalb des Kreises, und zwar so, dass der Radius stets die mittlere Proportionale zwischen den Abständen der beiden entsprechenden Punkte vom Centrum ist. Letzteres folgt für einen Punkt der x-Axe sogleich aus den entsprechenden Funktionen, denn die Kreis-Gleichung eines Punktes der x-Axe, dessen Abscisse $= c$ ist, ist $(x - c)^2 + y^2 = 0$, d. h. $x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = 0$, also die des entsprechenden Punktes $1 - 2cx + c^2(x^2 + y^2) = 0$, d. h. $\left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = 0$, also ist der Abstand dieses Punktes vom Centralpunkte $= \frac{1}{c}$, während die des entsprechenden Punktes c war, also ihr Produkt 1, d. h. die als Einheit genommene Länge die mittlere Proportionale zwischen den Abständen der entsprechenden Punkte auf der x-Axe. Da man nun jede durch den Centralpunkt gehende gerade Linie als x-Axe annehmen kann, so gilt jene Beziehung allgemein. Wenn man statt der Annahme, dass den unendlich entfernten Geraden ein Punkt entsprechen soll, die Annahme macht, dass in den beiden syncyclischen Vereinen ohne Ausnahme jedem Punkte des einen Vereins ein Punkt des andern entsprechen soll, so entspricht auch der unendlich entfernten Geraden des einen Vereins die unendlich entfernte des andern, und man gelangt zur Aehnlichkeit, welche sich also auf diese Weise der Kreisverwandtschaft gegenüber stellt.

§. 7. Normale Einheiten der Funktionen, Stetigkeit der letzteren.

410. Erklärung. Normale Einheiten reeller Grössen. Für die reellen Zahlen setze ich 1 als normale Einheit, für die reellen extensiven Grössen setze ich als normale Einheiten die ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$;

für die reellen extenſiven Grössen m-ter Stufe ferner die wohlgeordneten (multiplikativen) Kombinationen ohne Wiederholung zur m-ten Klasse aus den ursprünglichen Einheiten, für die reellen algebraischen Produkte von Grössen gleicher Stufe endlich die (wohlgeordneten) Kombinationen mit Wiederholung aus den normalen Einheiten der Faktoren (wobei jede dieſer Kombinationen als algebraisches Produkt der darin enthaltenen Elemente aufzufassen ist).

Anm. Es ſind hier nur die früher vereinzelt vorkommenden Bestimmungen zuſammengefasst. Es kommt noch darauf an, auch für die reellen Lückenausdrücke die normalen Einheiten festzustellen. Wir haben (in 363 Anm.) gefehen, dass das Produkt der Faktoren, welche die Lücken eines Lückenausdrucks ausfüllen ſollen, als ein algebraisches Produkt aufzufassen ist, mit welchem der Lückenausdruck multiplicirt werden ſoll. Folglich kommt es nur darauf an, welche Werthe der Lückenausdruck annimmt, wenn die normalen Einheiten jener algebraischen Produkte mit ihm multiplicirt werden. Es ſeien E_1, E_2,··· die normalen Einheiten dieſer algebraischen Produkte und L der Lückenausdruck, ſo kommt es auf die Werthe LE_1, LE_2,··· an. Dieſe Werthe können wieder extenſive Grössen ſein, die normalen Einheiten derſelben ſeien e_1, e_2,···, ſo ergeben ſich als normale Einheiten von L diejenigen Lückenausdrücke, welche mit E_1, E_2,··· multiplicirt irgend eine der Einheiten e_1, e_2,··· liefern.

411. Erklärung. Normale Einheiten reeller Lückenausdrücke. Wenn E_1, E_2,···· die normalen Einheiten derjenigen algebraischen Produkte ſind, deren Faktoren die Lücken eines reellen Lückenausdruckes L auszufüllen vermögen, und e_1, e_2,··· die normalen Einheiten derjenigen Grössen ſind, in welche L nach Ausfüllung ſeiner Lücken übergeht, ſo ſetze ich diejenigen Lückenausdrücke $E_{r,s}$ als normale Einheiten von L, welche den Gleichungen

$$E_{r,s}E_r = e_s \text{ und } E_{r,s}E_t = 0\,[t \gtrless r]$$

genügen.

Anm. Es ist dieſe Erklärung in Uebereinstimmung mit der in 381 für die Einheiten des Quotienten, d. h. des Lückenausdruckes mit Einer Lücke gegebenen.

412. Jeder (reelle) Lückenausdruck lässt ſich aus den in 411 festgeſetzten normalen Einheiten desſelben numerisch ableiten, und dieſe letzteren stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.

Bewcis wie in 381.

413. Erkl. Normale Einheiten einer Grössengattung. Als Grössen derſelben Gattung ſetze ich alle diejenigen Grössen, welche nach dem Früheren zu einander addirt werden können. Die Anzahl der normalen Einheiten einer Grössengattung nehme ich stets als eine gerade an, indem die eine Hälfte derſelben reell ist, und die andere daraus durch Multiplikation mit $i = \sqrt{-1}$ hervorgeht. Die Ableitzahlen, durch welche eine Grösse aus ihren normalen Einheiten numerisch abgeleitet wird, nehme ich stets als reell an.

Anm. Für die allgemeinen Zahlgrössen ſind alſo 1 und $\sqrt{-1} = i$ die normalen Einheiten, für die allgemeinen Grössen erster Stufe $e_1, e_2, \cdots e_n, e_1 i, e_2 i, \cdots e_n i$, wo $e_1, e_2, \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten ſind u. ſ. w.

414. Erkl. Numerischer Werth einer Grösse heisst die poſitive Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate aller Zahlen, durch welche jene Grösse aus ihren normalen Einheiten ableitbar ist, d. h. wenn $E_1, E_2, \cdots$ die normalen Einheiten einer Grösse P ſind und

$$P = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \cdots$$

ist, ſo ist der numerische Werth von P gleich

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}.$$

Anm. Dieſe Definition ist in Uebereinstimmung mit der in 151 gegebenen. Der numerische Werth einer komplexen Zahlgrösse $p + qi$ ist hiernach gleich $\sqrt{p^2 + q^2}$.

415. Wenn der numerische Werth einer Grösse null ist, ſo ſind alle Zahlen, durch welche dieſe Grösse aus ihren normalen Einheiten abgeleitet ist, einzeln genommen null.

Beweis. Es ſeien $E_1, E_2, \cdots$ die normalen Einheiten der Grösse P und ſei

$$P = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \cdots.$$

Wenn nun der numerische Werth von P null ſein ſoll, ſo heisst das (nach 414)

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots} = 0, \text{ alſo}$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots = 0.$$

Da aber $a_1, a_2, \cdots$ (nach 413 Anm.) alle reell ſind, ſo kann die Summe ihrer Quadrate nicht anders null ſein, als wenn ſie alle einzeln genommen null ſind, alſo

$$0 = a_1 = a_2 = \cdots.$$

416. Erklärung. Wenn der numerische Werth einer Grösse a kleiner ist als der einer Grösse b, so sage ich, a sei numerisch kleiner als b und schreibe dies

$$a \text{ num.} < b.$$

417. Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ die Zahlen sind, durch welche a aus seinen normalen Einheiten ableitbar ist, und ebenso $\beta_1, \beta_2, \cdots$ die Zahlen, durch welche b aus seinen normalen Einheiten ableitbar ist, so sind die Vergleichungen

$$a \text{ num.} < b$$

und $$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots < \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots$$

einander gleichbedeutend.

Beweis folgt unmittelbar aus 416 und 414.

418. Wenn p, q, $\cdots$ positive Zahlwerthe und a, b, $\cdots$ beliebige (aus denselben normalen Einheiten ableitbare) Grössen von der Art sind, dass

$$a \text{ num.} < p,\ b \text{ num.} < q, \cdots$$

sei, so ist auch

$$a + b + \cdots \text{ num.} < p + q + \cdots.$$

Beweis 1 (für zwei Grössen). Es seien $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von a und b und sei

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots$$

und sei α der numerische Werth von a, β der von b und γ der von $a + b$, so ist $\alpha < p$, $\beta < q$, zu zeigen ist, dass $\gamma < p + q$ sei. Nach 414 ist

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots$$
$$\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots$$
$$\gamma^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2 + (\alpha_2 + \beta_2)^2 + \cdots,$$

also (*) $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)$.

Nun können wir zeigen, dass $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots = < \alpha\beta$ sei. In der That ist

$$(\alpha\beta)^2 - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)^2$$
$$= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)^2$$
$$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 + \cdots.$$

Die rechte Seite ist die Summe mehrerer Quadrate, also gleich oder grösser als Null, also auch die linke, d. h.

$$(\alpha\beta)^2 = > (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)^2,$$

alſo auch, da α und β poſitiv ſind,

$$\alpha\beta = > \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots.$$

Wenden wir dieſe Vergleichung auf die Gleichung (*) an, ſo folgt

$$\gamma^2 = < \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta, \text{ d. h. } \gamma^2 = < (\alpha + \beta)^2,$$

alſo, da γ und $\alpha + \beta$ poſitiv ſind,

$$\gamma = < \alpha + \beta;$$

aber da α und β (poſitive) Zahlen ſind, welche beziehlich kleiner als die poſitiven Zahlen p und q ſind, ſo iſt

$$\alpha + \beta < p + q,$$

alſo $\gamma < p + q$,

d. h. der numeriſche Werth von $a + b$ iſt kleiner als $p + q$.

2. (für mehr Grössen). Da nun (nach Bew. 1) $a + b$ num. $< p + q$ und (nach Hypotheſis) c num. $< r$ iſt, ſo iſt (nach Bew. 1) $a + b + c$ num. $< p + q + r$ u. ſ. w. für beliebig viele Grössen.

419. Wenn p und q poſitive Zahlwerthe und a und b beliebige (aus denſelben normalen Einheiten ableitbare) Grössen von der Art ſind, dass

$$a \text{ num.} < p, \quad b \text{ num.} < q$$

iſt, ſo iſt auch

$$a - b \text{ num.} < p + q.$$

420. Erklärung. Ich ſage, eine Funktion f(q) einer poſitiven Zahlgrösse verſchwinde mit q, wenn ſich zu jeder poſitiven Zahl p ein poſitiver Werth von q angeben lässt von der Art, dass

$$f(q) \text{ num.} < p$$

ſei, und auch bleibe, wenn q beliebig abnimmt, aber poſitiv bleibt. Wenn ausserdem $f(0) = 0$ iſt, ſo ſage ich f(q) werde mit q null.

Anm. Beide Ausdrücke: Mit (poſitivem) q verſchwinden und mit q null werden, ſind alſo nicht identiſch; ſondern nur der zweite ſchliesst den erſten ein, nicht umgekehrt; denn es könnten für f(q) die Bedingungen des Verſchwindens mit q erfüllt ſein, und könnte dennoch f(q) für $q = 0$ in einen iſolirten von Null verſchiedenen Werth überſpringen.

421. Wenn mehrere Funktionen $f_1(q), f_2(q), \cdots, f_n(q)$ einer poſitiven Zahlgrösse q mit q verſchwinden, ſo verſchwindet mit q auch

(a) $a_1 f_1(q) + a_2 f_2(q) + \cdots + a_n f_n(q)$,

wo $a_1, a_2, \cdots a_n$ endliche Zahlen, oder auch beliebige endliche Lückenausdrücke mit je einer Lücke sind, welche durch $f_1 q$, $f_2 q$ u. s. w. ausgefüllt werden kann. (Und ebenso wenn jene Funktionen mit q null werden, so wird auch dieser letzte Ausdruck (a) mit q null.)

Beweis 1 (für Zahlen). Sollten von den Grössen $a_1, \cdots a_n$ einige null sein, so kann man in dem Ausdrucke (a) die Glieder weglassen, in denen diese Koefficienten, welche gleich null sind, vorkommen. Wir nehmen an, dies sei schon geschehen, und es seien also $a_1, \cdots a_n$ lauter von Null verschiedene (endliche) Zahlen. Da nun (nach Hyp.) $f_1 q$ mit q verschwindet, so muss sich (nach 420) zu jeder von Null verschiedenen Zahl, z. B. zu $\frac{p}{n a_1}$, ein positiver Werth q_1 von der Art angeben lassen, dass $f_1(q_1)$ numerisch kleiner als $p : a_1 n$ sei und auch bleibe, wenn q_1 beliebig abnimmt, aber positiv bleibt; aus gleichem Grunde wird man auch einen positiven Werth q_2 der Art angeben können, dass $f_2(q_2)$ numerisch kleiner als $p : a_2 n$ sei und auch bleibe bei abnehmenden q_2, u. s. w. Wenn nun q ein positiver Werth ist, welcher noch kleiner als jede der Grössen $q_1, q_2, \cdots q_n$ ist, so ist auch $f_1 q$ num. $< p : a_1 n$ u. s. w. oder

$$a_1 f_1 q \text{ num.} < \frac{p}{n},\ a_2 f_2 q \text{ num.} < \frac{p}{n}, \cdots a_n f_n(q) \text{ num.} < \frac{p}{n};$$

folglich ist (nach 418) auch die Summe der linken Seiten numerisch kleiner als die der rechten, d. h.

$$a_1 f_1 q + a_2 f_2 q + \cdots + a_n f_n q \text{ num.} < p,$$

eine Vergleichung, die auch bestehen bleibt, wenn q beliebig abnimmt, aber positiv bleibt, d. h. es verschwindet der Ausdruck (a), wenn $a_1, \cdots a_n$ Zahlen sind, mit q.

2. Es reducire sich der Ausdruck (a) auf $a_1 f_1 q$, wo a_1 eine normale Einheit eines Lückenausdruckes sei, dessen Lücke durch $f_1 q$ ausgefüllt werden kann; es seien ferner $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von $a_1 f_1 q$, und $E_1, E_2, \cdots$ die von $f_1 q$ und sei

(b) $f_1 q = E_1 \varphi_1 q + E_2 \varphi_2 q + \cdots = \sum E_\alpha \varphi_\alpha q,$

ſo wird (nach 411) a_1 die Eigenſchaft haben, dass es mit einer der Einheiten $E_1, E_2, \cdots$, z. B. mit E_r, multiplicirt, eine der Einheiten $e_1, e_2, \cdots$, z. B. die Einheit e_s, liefert, hingegen mit jeder der übrigen Einheiten $E_1, E_2, \cdots$ multiplicirt null giebt, ſo dass alſo dann

(c) $a_1 E_r = e_s$, $a_1 E_t = 0$, für $t \gtrless r$

iſt. Dann erhalten wir

$$a_1 f_1 q = a_1 \sum \overline{E_\alpha \varphi_\alpha q} = \sum \overline{a_1 E_\alpha \varphi_\alpha q} \qquad [44]$$
$$= a_1 E_r \varphi_r q = e_s \varphi_r q \qquad [c].$$

Alſo iſt (nach 414) der numeriſche Werth von $a_1 f_1 q$ gleich $\sqrt{(\varphi_r q)^2}$. Da nun (nach Hyp.) $f_1 q$ mit q verſchwindet, ſo lässt ſich (nach 420) zu jeder poſitiven Zahl p ein Werth von q der Art angeben, dass $f_1(q)$ num. $< p$ ſei, und auch bei abnehmendem q bleibe, d. h. (nach 417), dass

$$(\varphi_1 q)^2 + (\varphi_2 q)^2 + \cdots < p^2$$

ſei und bei abnehmendem q bleibe. Da aber (nach 413) $\varphi_1 q$, $\varphi_2 q, \cdots$ reell, alſo $(\varphi_1 p)^2$, $(\varphi_2 q)^2, \cdots$ poſitiv ſind, ſo muss jedes dieſer Quadrate kleiner als p^2 ſein, alſo auch $(\varphi_r q)^2 < p^2$, d. h. $a_1 f_1 q$ num. $< p$, alſo verſchwindet $a_1 f_1 q$ mit q.

3. Es ſeien endlich $a_1, a_2, \cdots$ beliebige Lückenausdrücke (mit je einer Lücke), und ſei

$$a_r = \sum \overline{\alpha_{r,\beta} E_{r,\beta}},$$

wo $E_{r,1}, E_{r,2}, \cdots$ die normalen Einheiten von a_r darſtellen, ſo wird

$$a_1 f_1 q + a_2 f_2 q + \cdots = \sum \overline{\alpha_{\alpha,\beta} E_{\alpha,\beta} f_\alpha q}.$$

Da nun (nach Bew. 2) $E_{\alpha,\beta} f_\alpha q$ mit q verſchwindet, ſo verſchwindet (nach Bew. 1) auch die Vielfachenſumme dieſer Ausdrücke; alſo auch $a_1 f_1 q + a_2 f_2 q + \cdots$. Wenn ausserdem $f_1 q$, $f_2 q, \cdots$, für $q = 0$, auch null ſind, ſo gilt dasſelbe auch für $a_1 f_1 q + a_2 f_2 q + \cdots$, alſo, da ausserdem der letzte Ausdruck mit q verſchwindet, ſo wird er nun auch mit q null.

422. Wenn zwei Funktionen $f_1 q$ und $f_2 q$ einer poſitiven Zahlgröſſe q mit dieſer verſchwinden (oder null werden), ſo muss mit ihr auch die Differenz $f_1 q - f_2 q$ verſchwinden (oder null werden).

Beweis in 421.

423. Erklärung. Wenn fx für einen bestimmten Werth x die Eigenschaft hat, dass sich allemal ein konstanter Werth c von der Art angeben lässt, dass $f(x+qdx)-c$ jedesmal mit dem positiven Zahlwerthe q verschwindet, was für eine endliche Grösse, die mit x von gleicher Gattung ist, auch unter dx verstanden sein mag, so sage ich, die Funktion fx konvergire um x nach c.

Anm. Es ist hier also unter dx vorläufig nichts weiter verstanden, als eine beliebige endliche Grösse, welche mit x von gleicher Gattung ist. Doch habe ich schon hier diese Bezeichnung gewählt, da sie für das Folgende am bequemsten ist.

424. Wenn fx um x nach c konvergirt, so kann es um x nicht zugleich nach einem von c verschiedenen Werthe c_1 konvergiren.

Beweis. Denn sollte beides zugleich der Fall sein, so müssten (nach 423) $f(x+qdx)-c$ und $f(x+qdx)-c_1$ beide mit q verschwinden, also (nach 422) auch die Differenz beider, d. h. $c-c_1$, was unmöglich ist, da c und c_1 zwei verschiedene Konstanten sind.

425. Erklärung. Eine Funktion fx heisst in x stetig, wenn fx um x nach dem Werthe konvergirt, den fx in x hat.

426. Wenn fx in x stetig ist, so verschwindet für jedes endliche dx die Differenz $f(x+qdx)-fx$ mit q.

Beweis unmittelbar aus 425, 423.

Anm. Wenn fx in x nicht stetig ist, so verschwindet nicht für jedes endliche a die Differenz $f(x+qdx)-fx$ mit q; sondern es könnte $f(x+qdx)$ für verschiedene Grössen dx nach verschiedenen Gränzen konvergiren, oder, wenn es auch für alle endlichen Werthe dx nach ein und demselben Werthe c konvergirte, also (nach 423) die Funktion fx selbst um x nach diesem Werthe zu konvergirte, so würde doch (fx), wenn es in x unstetig ist, dort in einen von c verschiedenen Werth überspringen.

427. Erklärung. Wenn f_1x eine Zahlfunktion und fx eine beliebige Funktion ist, und beide für denselben Werth von $x=a$ null werden, doch so, dass der Quotient $fx:f_1x$ um $x=a$ nach einem konstanten Werthe c konvergirt: so verstehe ich unter dem Bruche $\frac{fx}{f_1x}$ diejenige Funktion, welche im Uebrigen mit jenem Quotienten übereinstimmt, aber für

$x = a$ den Werth c annimmt, und bezeichne den Werth c, welchen dieſer Bruch für $x = a$ annimmt, mit

$$c = \left[\frac{fx}{f_1 x}\right](x = a).$$

Anm. Es ist dieſe Bestimmung, ebenſo wie die vorhergehenden, nicht bloss für die Funktionen extenſiver Grössen, ſondern auch für die gewöhnliche Funktionenlehre nothwendig. In der That, mag nun x eine extenſive Grösse oder eine Zahlgrösse, fx eine extenſive Funktion oder eine Zahlfunktion ſein, ſo wird, wenn der Bruch $\frac{fx}{f_1 x}$ wieder als eine Funktion behandelt werden ſoll, derselbe für jeden bestimmten Werth von x gleichfalls einen bestimmten Werth annehmen müssen (348). Dieſer Werth wird im Allgemeinen durch Diviſion der beſonderen Werthe, welche fx und $f_1 x$ dann annehmen, gefunden. Aber wenn für $x = a$ ſowohl fx als $f_1 x$ null werden, ſo wird der Quotient dieſer beſonderen Werthe vollkommen unbestimmt, eine Unbestimmtheit, welche für den Bruch $\frac{fx}{f_1 x}$ durchaus aufgehoben werden muss, falls man den Bruch Verknüpfungen unterwerfen will, die auch für den Fall, dass $x = a$ ſei, ihre Geltung haben ſollen. An und für ſich ist es möglich, in dieſem Falle für jenen Bruch einen beliebigen bestimmten Werth b festzustellen, allein dann müsste in die Bezeichnung des Bruches dieſe Bestimmung, dass derselbe für $x = a$ den bestimmten Werth b annehmen ſollte, mit aufgenommen werden. Dieſe willkürliche Bestimmung wird überflüssig, wenn der in der obigen Erklärung aufgestellte Begriff festgehalten wird, nach welchem jener Bruch in $x = a$ stetig geſetzt wird. Aber dieſer Begriff ſetzt voraus, dass jener Bruch um $x = a$ nach einem bestimmten Werthe c zu konvergirt. Ist dies nicht der Fall, ſondern konvergirt der Bruch $\frac{f(a+qb)}{f_1(a+qb)}$ beim Verſchwinden der poſitiven Zahlgrösse q nach verſchiedenen Gränzen zu, je nachdem b andere Werthe annimmt, z. B. bei Zahlgrössen, wenn b die Werthe $+1$, -1 oder $\cos.p + i\,\sin.p$ annimmt, ſo ist der oben gegebene Begriff nicht mehr anwendbar, und es bleibt nichts übrig, als dann eine willkürliche Bestimmung hinzuzufügen und mit in die Bezeichnung aufzunehmen. Die Verkennung aller dieſer Verhältnisse hat in die höhere Analyſis eine heilloſe Verwirrung gebracht, welche ſich häufig genug durch Widersprüche und fehlerhafte Reſultate verrieth. Um dieſen Irrthümern zu entgehen, hat man hier und da die Methode zu verbessern geſucht; namentlich ist es Cauchy's Verdienst, dass er durch einen unerſchöpflichen Reichthum der genialsten Kunstgriffe die Methode überall, wo ſie schien zu Irrthümern führen zu können, gegen dieſelben ſicher zu ſtellen ſuchte. Aber auch er konnte damit nicht zum Ziele gelangen, weil er

das Uebel nicht bei der Wurzel ergriff, und nicht die wesentlichen Begriffsbestimmungen hinzufügte, aus deren Mangel alle jene Verwirrung hervorging. Ich habe mich daher genöthigt gesehen, diese Begriffsbestimmungen, so weit sie für das Folgende nothwendig erschienen, hier nachzutragen, und, statt mich auf frühere Bearbeitungen der Differenzialrechnung, der Potenzreihen und der Integralrechnung berufen zu können, musste ich diese Wissenschaften von vorne an aufbauen, um sie auch für extensive Grössen mit Sicherheit anwenden zu können. Es wurde dadurch um somehr geboten, mich nur auf das Nothwendigste zu beschränken. Ich bemerke hier noch, was sich aus dem oben Bemerkten leicht ergiebt, dass ähnliche Begriffsbestimmungen für alle die Fälle festzustellen sind, wo die zu verknüpfenden Funktionen für gewisse Werthe der Variabeln in solche Ausdrücke übergehen, welche keinen Verknüpfungen (oder wenigstens nicht denen, durch welche jene Funktionen unter sich verbunden sind) unterworfen werden dürfen, also namentlich, wenn eine oder mehrere derselben unendlich oder mehrdeutig werden. In allen diesen Fällen kann die Bestimmung ganz analog der so eben mitgetheilten getroffen werden. Die Bezeichnung, welche ich oben hinzugefügt, indem ich hinter die Funktion den besonderen Werth der Variabeln in Parenthese beifüge, um durch das Ganze den Werth auszudrücken, welchen die Funktion für diesen besonderen Werth der Variabeln annimmt, ist auch in vielen anderen Fällen mit Vortheil anwendbar, und zum Theil unvermeidlich.

Kap. 2. Differenzialrechnung.

§. 1. Differenzial erster Ordnung.

428. Erklärung. Wenn q eine reelle Zahlgrösse, dx aber eine beliebige endliche Grösse, welche mit x von gleicher Gattung ist, bezeichnet, so verstehe ich unter der (nach der Veränderlichen x und dem Zahlfaktor q genommenen) Differenz der Funktion fx, geschrieben $d_{x,q}fx$, diejenige Funktion, welche der Gleichung

$$(a)\quad d_{x,q}fx = \frac{f(x+qdx)-fx}{q}$$

genügt (wobei die Division durch q in dem 427 bestimmten Sinne zu fassen ist).

429. Erklärung. Wenn der Ausdruck $d_{x,q}fx$ in $q=0$ und in x (425) stetig ist, so bezeichne ich $d_{x,0}fx$ mit d_xfx

und nenne $d_x fx$ das nach x genommene Differenzial von fx, d. h. ich ſetze

$$d_x fx = d_{x,0} fx = \left[\frac{f(x + qdx) - fx}{q}\right](q = 0).$$

Wenn $d_{x,q} fx$ nicht die Eigenſchaft hat, dass es in $q = 0$ und in x ſtetig ſei, ſo ſage ich, dass auch $d_x fx$ unſtetig ſei. Wenn in einer Formel das vor eine Funktion geſetzte Differenzialzeichen d ohne jeden Index geſchrieben iſt, ſo ſoll das heissen, dass die Formel allgemein gelten ſoll, nach welcher Variabeln auch die dadurch ausgedrückte Differenziation genommen ſei, d. h. welchen Index man auch dem d hinzufügen mag, vorausgeſetzt nur, dass man dann in dieſer Formel jedem Differenzialzeichen d (was vor eine Grösse tritt) denſelben Index hinzufügt.

Anm. Es lässt ſich der Begriff des Differenzials auch für den Fall, dass dasſelbe unſtetig wird, feſtſtellen, und laſſen ſich mit ſolchen Differenzialen unter gewiſſen Umſtänden noch gültige Verknüpfungen vornehmen. Doch iſt es bei jeder Behandlung der Differenzialrechnung am zweckmässigsten, dieſen Fall zunächſt ganz auszuſchliessen, und namentlich den Fall, wo das Differenzial unendlich wird, im Zuſammenhange mit der allgemeinen Betrachtung unbegränzt wachsender Funktionen in einem eigenen, die ganze Analyſis des Unendlichen behandelnden Abſchnitte nachzuholen. Aus dem vorliegenden Werke ſchliessen wir jedoch dieſe Betrachtung aus, und ſetzen im Folgenden bei jedem Differenzial voraus, dass es ſtetig ſei. Noch bemerke ich, das die Stetigkeit von $d_x fx$ vorausſetzt, dass $f(x + qdx) - fx$ um $q = 0$ gleichfalls null werde, d. h. dass auch fx ſtetig ſei.

430. Wenn $d_x fx$ ſtetig iſt und $fx = y$ geſetzt wird, ſo iſt

$$f(x + qdx) = fx + q(d_x fx + N)$$
$$= y + q(d_x y + N),$$

wo N mit der reellen Zahlgrösse q zugleich null wird.

Beweis. Man ſetze

$$\frac{f(x + qdx) - fx}{q} - d_x fx = N.$$

Da $d_x fx$ ſtetig iſt (nach Hyp.), ſo iſt (nach 429) auch der Quotient $\frac{f(x + qdx) - fx}{q}$ in $q = 0$ ſtetig, und dann $= d_x fx$, alſo wird N als die Differenz dieſer beiden Ausdrücke mit q zugleich null. Dann erhalten wir aber

$$f(x + qdx) = fx + q(d_x fx + N) = y + q(d_x y + N).$$

431. Wenn A ein konstanter Lückenausdruck mit n Lücken (in jedem Gliede) ist, in welche Grössen von der Gattung x eintreten sollen, so ist

(a) $d_x(Ax^n) = nAx^{n-1}dx$;

ins Besondere ist

(b) $d_x(Ax) = A$

(c) $d_xA = 0$.

Beweis. Da für die Produkte, deren Faktoren in die Lücken eines Lückenausdruckes eintreten sollen (nach 363), die gewöhnlichen Gesetze der Algebra gelten, so folgt, wie in der Algebra, dass

$$A(x + qdx)^n = Ax^n + nqAx^{n-1}dx + q^2B$$

ist, wo B eine steigende Potenzreihe von q ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass

$$\frac{A(x + qdx)^n - Ax^n}{q} = nAx^{n-1}dx + qB$$

in $q = 0$ stetig ist, also ist (nach 429)

$$d_x(Ax^n) = nAx^{n-1}dx.$$

Hieraus folgen die Formeln b und c für $n = 1$ und 0.

432. Wenn $u_1, u_2, \cdots$ beliebige Funktionen einer beliebigen Variabeln x sind, so ist (wenn $du_1, du_2, \cdots$ stetig sind)

$$d(u_1 + u_2 + \cdots) = du_1 + du_2 + \cdots.$$

Beweis. Es sei $u_1 = f_1x$, $u_2 = f_2x$ u. s. w., so ist (nach 430)

$$f_1(x + qdx) = u_1 + q(du_1 + N_1),$$

wo N_1 mit q zugleich null wird, und so für jeden andern Index. Also

$$\sum f_\alpha(x + qdx) = \sum u_\alpha + q(d_xu_\alpha + N_\alpha).$$

Also ist

$$\frac{\sum f_\alpha(x + qdx) - u_\alpha}{q} = \sum d_xu_\alpha + N_\alpha$$
$$= \sum d_xu_\alpha + \sum N_\alpha.$$

Da nun $N_1, N_2, \cdots$ mit q null werden, wie gezeigt, so wird auch (nach 421) ihre Summe $\sum N_\alpha$ mit q null, also

$$\frac{\sum f_\alpha(x + qdx) - u_\alpha}{q}\,(q = 0) = \sum d_xu_\alpha.$$

Die linke Seite ist aber $d_x \sum f_\alpha x = d_x \sum u_\alpha$, also

$$d_x \sum u_\alpha = \sum d_x u_\alpha,$$

oder da die Formel für jeden Index x gilt,

$$d \sum u_\alpha = \sum du_\alpha.$$

433. Wenn y und z beliebige Funktionen von x sind, und [yz] ein beliebiges Produkt derselben ist, so ist (vorausgesetzt, dass dy und dz stetig sind)

$$d[yz] = [dy \cdot z] + [y \cdot dz].$$

Beweis. Es sei $y = fx$, $z = Fx$, so ist (nach 430)

$$f(x + qdx) = y + q(dy + N),$$
$$F(x + qdx) = z + q(dz + N'),$$

wo N und N' mit q zugleich null werden. Somit ist

$$d_x[yz] = \frac{[f x + qdx) \cdot F(x + qdx)] - [yz]}{q} (q = 0)$$
$$= [y \cdot (d_x z + N') + [(d_x y + N)z] \text{ für } q = 0,$$

oder (nach 429) mit Weglassung des Index,

$$d[yz] = [y \cdot dz] + [dy \cdot z] + [y \cdot N'] + [N \cdot z] \text{ für } q = 0.$$

Da nun N und N' mit q null werden, so wird (nach 421) auch $[y \cdot l]N' + [l \cdot z]N$, wo l eine Lücke, in welche N eintreten soll, bezeichnet, mit q null, d. h. $[y \cdot N'] + [N \cdot z]$ wird mit q null, also ist

$$d[yz] = [y \cdot dz] + [dy \cdot z].$$

434. Wenn y aus seinen normalen Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ durch die Zahlgrössen $y_1, y_2, \cdots$ ableitbar ist, und $y_1, y_2, \cdots$ Funktionen einer beliebigen Variabeln x sind, so ist (vorausgesetzt, dass $dy_1, dy_2, \cdots$ stetig sind)

$$dy = e_1 dy_1 + e_2 dy_2 + \cdots$$

Beweis. Da $y = e_1 y_1 + e_2 y_2 +$ ist (nach Hyp.), so ist

$$dy = d(e_1 y_1) + d(e_2 y_2) + \cdots \quad [432]$$
$$= e_1 dy_1 + e_2 dy_2 + \cdots \quad [433, 431 \text{ c.}].$$

Anm. Hierdurch lässt sich das Differenzial einer extensiven Funktion auf die Differenziale von Zahlfunktionen zurückführen.

§. 2. Differenzialquotient erster Ordnung.

435. Erklärung. Unter $\frac{d}{dx} fx$ oder unter $f'x$ verstehe ich (vorausgesetzt dass $d_x fx$ stetig sei), den Ausdruck, welcher,

mit jeder Grösse dx (die mit x von gleicher Gattung ist) multiplicirt, $d_x fx$ liefert, d. h. welcher der Gleichung

$$\frac{d}{dx}fx \cdot dx = f'x \cdot dx = d_x fx = \left[\frac{f(x+qdx)-fx}{q}\right](q=0)$$

genügt. Ich nenne $\frac{d}{dx}fx$ den nach x genommenen Differenzialquotienten erster Ordnung von fx, und f'x die erste abgeleitete Funktion von fx.

486. Erkl. Wenn man die Differenzialquotienten einer Funktion $u = f(x, y, \cdots)$ mehrerer Veränderlichen x, y, ··· auf die Weise bildet, dass man jedesmal den Differenzialquotienten nach einer dieser Veränderlichen nimmt, während man dabei die übrigen Veränderlichen wie Konstante behandelt, so nenne ich die so hervorgehenden Differenzialquotienten die zu dem Vereine der Veränderlichen x, y, ··· gehörigen partiellen Differenzialquotienten, und bezeichne dann den in diesem Sinne nach x genommenen Differenzialquotienten mit

$$\frac{d}{dx}u, \text{ oder } \frac{d}{dx}f(x, y, \cdot\cdot)$$

u. s. w.

Anm. Es ist bei den partiellen Differenzialquotienten unumgänglich nothwendig (worauf schon Jacobi in Crelle's Journal B. 22 S. 321 aufmerksam gemacht hat) den zugehörigen Verein der Veränderlichen anzugeben, also nicht bloss diejenige Veränderliche zu nennen, nach welcher der Differenzialquotient genommen werden soll, sondern auch diejenigen, welche bei der Bildung desselben als Konstante behandelt werden sollen. Denn wenn z. B. eine Gleichung zwischen x und y hervortritt, so lässt sich die Anzahl der Veränderlichen um eine vermindern; schafft man z. B. x weg, so bleiben nur y, z, ··· übrig; und betrachtet man jetzt diese als den Verein der Veränderlichen bildend, so gewinnt $\frac{d}{dy}u$ jetzt eine ganz andere Bedeutung und im Allgemeinen einen ganz andern Werth als vorher. Aber es würde sehr unbequem sein, wenn man den ganzen Verein der Variabeln, zu welchem die partiellen Differenzialquotienten gehören, mit in die Bezeichnung derselben aufnehmen wollte. Man beugt allen Verwechselungen vor, wenn man den Verein der Veränderlichen jedesmal angiebt, und wenn man, sobald in einer zusammenhängenden Darstellung bei der Differenziation nach derselben Variabeln, z. B. nach x, das eine Mal andere Grössen als konstant behandelt werden sollen, als das andere Mal, ein neues,

im Uebrigen willkürliches Zeichen statt $\frac{d}{dx}$ ſetzt, hat man dann die Bedeutung dieſes Zeichens angegeben, ſo ist eine Verwechſelung unmöglich. Die allgemeine Bezeichnung durch $\frac{d}{dx}u$, welche ich für die partiellen Differenzialquotienten nach x gewählt habe, bedarf, obwohl ſie ungebräuchlich ist, wohl kaum einer Rechtfertigung, indem ſie, ohne willkürlich zu ſein, äusserst bequem ist, und eine ſo ungehinderte Verwendung gestattet, wie keine andere.

437. Wenn $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$ ſind, und $\delta_1 fx, \delta_2 fx, \cdots$ die nach $x_1, x_2, \cdots$ genommenen Differenzialquotienten von x, welche zu dem Vereine der Veränderlichen $x_1, x_2 \cdots$ gehören, bezeichnen, ſo ist (vorausgeſetzt, dáss $d_x fx$ stetig ist)

$$d_x fx = \delta_1 fx \cdot dx_1 + \delta_2 fx \cdot dx_2 + \cdots.$$

Beweis 1. Es ſeien die normalen Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ in zwei Gruppen zerlegt, und y aus der einen Gruppe, z aus der andern numerisch abgeleitet, und zwar ſo, dass $x = y + z$ ſei, ſo zeige ich, dass $d_x fx = d_y fx + d_z fx$ ſei, wo bei den durch d_y, d_z bezeichneten Differenziationen y und z als den Verein der Variabeln bildend gedacht ſind. In der That, es ſei dy aus denſelben Einheiten ableitbar wie y, und dz aus denſelben wie z, und ſei $dy + dz = dx = e_1dx_1 + e_2dx_2 + \cdots$. Nun ist (nach Hypotheſis) $d_x fx$ stetig, d. h. es ist $\left[\frac{f(x+qdx)-fx}{q}\right]$ für jeden Werth dx (der aus $e_1, e_2, \cdots$ ableitbar ist) in $q = 0$ und in x stetig, alſo auch, wenn man dy statt dx ſetzt, d. h. es ist $\frac{f(x+qdy)-fx}{q}$ in $q = 0$ und in x stetig ferner ist

$$\frac{f(x+qdy)-fx}{q} = \frac{f(y+qdy+z)-f(y+z)}{q} = d_{y,q}fx,$$

alſo ist $d_y fx$ von $d_{y,q}fx$ verſchieden um eine Grösse N, die mit q null wird, ſomit

$$d_y fx = \frac{f(x+qdy)-fx}{q} + N$$

und ebenſo

$$d_z fx = \frac{f(x+qdz)-fx}{q} + N_1,$$

wo N und N_1 mit q null werden, und die ersten Glieder in

$q = 0$ und in x stetig ſind. Wenn nun eine Funktion φx in x stetig ist, ſo heisst das (nach 425), es konvergire $\varphi(x + qdx)$, wo dx eine beliebige Grösse, die mit x von gleicher Gattung ist, und q eine reelle Zahl bedeutet, um $q = 0$ nach einem Werthe zu, den es in $q = 0$ erreicht, d. h. es lasse ſich $\varphi(x + qdx)$ in der Form $\varphi x + N_2$ darstellen, wo N_2 mit q null wird. Wenden wir dies auf $d_y fx$ an, und ſetzen, da in $\varphi(x + qdx)$ das dx willkürlich war, dafür das obige dz, ſo erhalten wir

$$d_y fx = \frac{f(x + qdz + qdy) - f(x + qdz)}{q} + N + N_2.$$

Hier ist $qdz + qdy = q(dz + dy) = qdx$, da wir oben $dy + dz = dx$ ſetzten, alſo

$$d_y fx + d_z fx$$
$$= \frac{f(x+qdx) - f(x+qdz) + f(x+qdz) - fx}{q} + N + N_1 + N_2.$$

Hier hebt ſich das zweite und dritte Glied im Zähler, und da $N + N_1 + N_2 = N$ (nach 421) mit q null wird, ſo erhalten wir

$$d_y fx + d_z fx = \frac{f(x + qdx) - fx}{q} + N,$$

wo N mit q null wird, alſo

$$d_y fx + d_z fx = d_x f(x).$$

2. Da man nun ebenſo, wie man x in y und z zerlegte, wieder y oder z zerlegen kann, ſo gilt der Satz auch für beliebig viele Stücke, in die man x in der Art zerlegen kann, dass jedes Stück aus einer Gruppe der Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ numerisch abgeleitet ist, und die verschiedenen Gruppen keine gleichen Einheiten enthalten; alſo namentlich, wenn $x_1 e_1 = y_1$, $x_2 e_2 = y_2, \cdots$ und demgemäss $dy_1 = e_1 dx_1$, $dy_2 = e_2 dy_2, \cdots$ ist, ſo ist

$$d_x fx = d_{y_1} fx + d_{y_2} fx + \cdots,$$

wo die durch d_{y_1} u. ſ. w. bezeichneten partiellen Differenziale ſich auf den Verein der Veränderlichen $y_1, y_2, \cdots$ beziehen.

3. Nun ist

$$d_{y_1} fx = \left[\frac{f(x + qdy_1) - fx}{q}\right](q = 0).$$

Aber $f(x + qdy_1) = f(x + qe_1 dx_1) = f(x_1 e_1 + z + qe_1 dx_1)$,

wenn der Kürze wegen $x_2e_2 + x_3e_3 + \cdots$ mit z bezeichnet wird, alſo ist $f(x + qdy_1) = f[e_1(x_1 + qdx_1) + z]$, alſo

$$d_y fx = \frac{f[e_1(x_1 + qdx_1) + z] - f(e_1x_1 + z)}{q} \quad (q=0)$$

$$= d_{x_1} fx = \frac{d}{dx_1} fx \cdot dx_1 \qquad \text{[nach 436]}$$

$$= \delta_1 fx_1 dx_1,$$

und ebenſo für die übrigen Indices. Setzt man dieſe Werthe in die vorhergefundene Gleichung ein, ſo erhält man

$$d_x fx = \delta_1 fx \cdot dx_1 + \delta_2 fx \cdot dx_2 + \cdots.$$

438. Wenn $d_x fx$ stetig ist, ſo ist $\frac{d}{dx} fx$ oder $f'x$ ein von dx unabhängiger Quotient, und zwar, wenn e_1, $e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von $dx = e_1x_1 + e_2x_2 + \cdots$ ſind, ſo ist

$$f'x \cdot e_r = \frac{d}{dx_r} fx = \delta_r fx$$

und

$$f'x = \frac{\delta_1 fx, \delta_2 fx, \cdots}{e_1, e_2, \cdots},$$

wo δ_1, $\delta_2, \cdots$ oder $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \cdots$ die zu dem Verein der Veränderlichen x_1, $x_2, \cdots$ gehörigen Differenzialquotienten nach x_1, $x_2, \cdots$ bezeichnen.

Beweis. Wenn x eine Zahlgrösse ist, ſo ist (nach 428) auch dx eine Zahlgrösse und

$$\frac{d_{x,\,q} fx}{dx} = \frac{f(x + qdx) - fx}{qdx} = \frac{f(x + q') - fx}{q'},$$

wenn man qdx mit q′ bezeichnet. Nun wird q′ mit q null, alſo ist

$$\frac{d_x fx}{dx} = \frac{d_{x,\,0} fx}{dx} = \left[\frac{f(x + q') - fx}{q'}\right] (q' = 0),$$

alſo da (nach Hyp.) $d_x fx$, alſo auch $\frac{d_x fx}{dx}$ (wenn $dx \gtrless 0$ ist) stetig ist, ſo ist auch $\frac{f(x + q') - fx}{q'}$ in $q = 0$ stetig, d. h. (nach 427) es konvergirt dieſer Ausdruck, wenn x konstant ist, um $q' = 0$ nach einem konstanten (von q′ unabhängigen)

Werthe, welchen er in $q' = 0$ erreicht; dieſer Werth iſt alſo bei variablem x eine bloſſe Funktion von x, unabhängig von q', d. h. von qdx. Es ſei dieſe Funktion φx, ſo iſt

$$d_x fx = \varphi x \cdot dx,$$

alſo iſt φx die Grösse, welche mit jedem dx multiplicirt, $d_x fx$ liefert, d. h. (nach 435) $\varphi x = \frac{d}{dx} fx$, alſo iſt $\frac{d}{dx} fx$ von dx unabhängig.

2. Es ſei $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$, ſo iſt (nach 437)

$$d_x fx = \delta_1 fx \cdot dx_1 + \delta_2 fx \cdot dx_2 + \cdots,$$

wo δ_1, δ_2, $\cdots$ die im Satze angegebene Bedeutung haben. Nun iſt f'x (nach 435) der Ausdruck, welcher mit jedem $dx = e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + \cdots$ multiplicirt $d_x fx$ giebt, alſo hat man

$$f'x(e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + \cdots) = \delta_1 fx \cdot dx_1 + \delta_2 fx \cdot dx_2 + \cdots,$$

alſo

$$f'x \cdot e_1 dx_1 + f'x \cdot e_2 dx_2 + \cdots = \delta_1 fx \cdot dx_1 + \delta_2 fx \cdot dx_2 + \cdots.$$

Nun ſind nach Bew. 1 die Grössen $\delta_1 fx$, $\delta_2 fx$, $\cdots$ bloſſe Funktionen von x, alſo von dx_1, dx_2, $\cdots$ unabhängig; d. h. für jeden Werth x iſt die rechte Seite obiger Gleichung eine Summe von Produkten der variabeln Zahlgrössen dx_1, dx_2, $\cdots$ mit Grössen, welche bei unverändertem x ſich nicht ändern; alſo muss auch die linke Seite von gleicher Form, und müssen die entſprechenden Koefficienten gleich ſein, d. h. es iſt

$$f'x e_1 = \delta_1 fx, \quad f'x e_2 = \delta_2 fx, \cdots$$

und f'x iſt als derjenige Ausdruck beſtimmt, welcher, mit e_1, e_2, $\cdots$ einzeln multiplicirt, beziehlich die Werthe $\delta_1 fx$, $d_2 fx$, $\cdots$ liefert, d. h. (nach 377) es iſt

$$f'x = \frac{\delta_1 fx, \ \delta_2 fx, \cdots}{e_1, \quad e_2, \cdots}.$$

Anm. Hierdurch iſt die Differenziation nach einer extenſiven Grösse x auf die partiellen Differenzialquotienten nach Zahlgrössen zurückgeführt, während in 434 das Differenzial der extenſiven Funktion auf die Differenziale von Zahlfunktionen zurückgeführt war, wodurch alſo die Reduktion des nach einer extenſiven Grösse genommenen Differenzialquotienten einer extenſiven Funktion auf die nach Zahlgrössen genommenen Differenzialquotienten von Zahlfunktionen vollendet iſt.

439. Wenn z eine beliebige endliche Grösse, welche mit x von gleicher Gattung ist, und q wie bisher eine reelle Zahlgrösse bezeichnet, so ist

$$f(x + qz) = fx + q(zf'x + N),$$

wo N mit q null wird (und vorausgesetzt ist, dass $d_x fx$ stetig ist).

Beweis. Es ist für jede endliche Grösse dx, welche mit x von gleicher Gattung ist, (nach 430)

$$f(x + qdx) = fx + q(d_x fx + N),$$

wo N mit q null wird. Es ist aber dann (nach 435) $d_x fx = dx \cdot f'x$, also

$$f(x + qdx) = fx + q(dx \cdot f'x + N);$$

da aber z nach der Voraussetzung dieselbe Bedeutung hat wie dx, so können wir auch jenes für dieses setzen und erhalten die zu erweisende Gleichung.

440. Es ist

$$dfy = f'y \cdot dy = \frac{d}{dy} fy \cdot dy = d_y fy$$

auch dann, wenn y wieder Funktion einer beliebigen Grösse ist, auf welche sich die durch das vorgesetzte Zeichen d dargestellte Differenziation bezieht (vorausgesetzt, dass dy und dfy stetig sind).

Beweis. Es beziehe sich die Differenziation auf x und sei $y = \varphi x$, so ist (nach 430)

$$(*) \quad \varphi(x + qdx) = y + q(dy + N),$$

wo N mit q null wird und

$$dfy = df(\varphi x) = \frac{f[\varphi(x + qdx)] - fy}{q}(q = 0) \quad [429]$$

$$= \frac{f[y + q(dy + N)] - fy}{q}(q = 0) \quad [*]$$

$$= \frac{fy + q[(dy + N)f'y + N'] - fy}{q}(q = 0) \quad [439],$$

wo N' mit q null wird,

$$= f'y(dy + N) + N' \text{ für } q = 0,$$

da nun N und N' mit q null werden, so wird (nach 421) auch $f'yN + N'$ mit q null, und also ist

$$dfy = f'y \cdot dy.$$

441. Wenn x und $y = fx$ aus den n urſprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ numeriſch ableitbar ſind, und

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$
$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n$$

iſt, und $d_x y$ ſtetig iſt, ſo iſt der Potenzwerth des Quotienten $\frac{d}{dx}y$ gleich der Funktionaldeterminante von $y_1, y_2, \cdots$ nach $x_1, x_2, \cdots$, d. h. gleich der Determinante, welche aus den partiellen Differenzialquotienten der Funktionen $y_1, y_2, \cdots$ nach den Variabeln $x_1, x_2, \cdots$ gebildet wird, d. h.

$$[f'x]^n = \left[\frac{d}{dx}y\right]^n = \sum \mp \frac{d}{dx_1}y_1 \cdot \frac{d}{dx_2}y_2 \cdot \cdots \frac{d}{dx_n}y_n,$$

wo für jeden Index r von 1 bis n, das Zeichen $\frac{d}{dx_r}$ den partiellen Differenzialquotienten bezeichnet, welcher nach x_r ſo genommen iſt, daſs alle übrigen unter den Variabeln $x_1, \cdots x_n$ (ausser x_r) bei der Differenziation als konſtant geſetzt ſind.

Beweis. Es iſt, wenn das Zeichen $\frac{d}{dx_r}$ der Kürze wegen durch δ_r erſetzt wird, (nach 438)

$$f'x = \frac{\delta_1 y,\ \delta_2 y, \cdots, \delta_n y}{e_1,\ e_2, \cdots,\ e_n},$$

alſo (nach 383) der Potenzwerth

$$[f'x]^n = [\delta_1 y \cdot \delta_2 y \cdots \delta_n y].$$

Aber da $y = e_1y_1 + e_2y_2 + \cdots$ iſt, ſo iſt (nach 434) $\delta_1 y = e_1\delta_1 y_1 + e_2\delta_1 y_2 + \cdots$, alſo

$$[f'x]^n = [(e_1\delta_1 y_1 + e_2\delta_1 y_2 + \cdots)(e_1\delta_2 y_1 + e_2\delta_2 y_2 + \cdots) \cdots (e_1\delta_n y_1 + e_2\delta_n y_2 + \cdots)]$$
$$= \sum \mp \delta_1 y_1 \cdot \delta_2 y_2 \cdot \cdots \cdot \delta_n y_n \quad [63],$$

indem nämlich $[e_1e_2 \cdots e_n]$ (nach 94) gleich 1 iſt.

Anm. Der Begriff der Funktionaldeterminante, wie er von Jacobi in Crelle's Journal, Bd. 22, p. 319ff., zuerſt aufgeſtellt wurde, tritt hier als Potenzwerth der abgeleiteten Funktion in ſeiner wahren Bedeutung hervor; und die dort nachgewieſenen Sätze ergeben ſich aus dieſer Bedeutung aufs leichteſte; ich überlaſse dieſe Ableitung daher dem Leſer.

442. Wenn u eine beliebige Funktion der veränderlichen Grössen $x, y, \cdots$ iſt, ſo iſt

$$du = \frac{d}{dx}u \cdot dx + \frac{d}{dy}u \cdot dy + \cdots$$
$$= d_x u + d_y u + \cdots,$$

wo $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\cdots$ die zu dem Verein der Veränderlichen $x, y, \cdots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten und d_x, d_y, $\cdots$ in demfelben Sinne die partiellen Differenziale bezeichnen (und die letzteren als ſtetig vorausgeſetzt ſind).

Beweis. Es ſei x aus ſeinen normalen Einheiten durch die veränderlichen Zahlgrössen $x_1, x_2, \cdots$, ebenſo y aus ſeinen normalen Einheiten durch die veränderlichen Zahlgrössen $y_1, y_2, \cdots$ ableitbar u. ſ. w. Man bilde nun ein neues System normaler Einheiten $e_1, e_2, \cdots, f_1, f_2, \cdots, \cdots$, und ſetze $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + \cdots$, ſo wird u (nach 352) eine Funktion der einzigen Variabeln v und man erhält (nach 437)

$$d_v u = \frac{d}{dx_1}u \; dx_1 + \frac{d}{dx_2}u \cdot dx_2 + \cdots + \frac{d}{dy_1}u \cdot dy_1$$
$$+ \frac{d}{dy_2}u \cdot dy_2 + \cdots + \cdots,$$

wo $\frac{d}{dx_1}$ u. ſ. w. ſich auf den Verein der Variabeln $x_1, x_2, \cdots y_1, y_2, \cdots, \cdots$ beziehen. Da u eine Funktion von v iſt, ſo können wir (nach 429) ſtatt $d_v u$ auch du ſchreiben. Ferner iſt, wenn man $y, z, \cdots$, d. h. $y_1, y_2, \cdots z_1, z_2, \cdots, \cdots$ konſtant ſetzt (nach 437)

$$\frac{d}{dx}u \cdot dx = \frac{d}{dx_1}u \cdot dx_1 + \frac{d}{dx_2}u \cdot dx_2 + \cdots, \text{ und ebenſo}$$
$$\frac{d}{dy}u \cdot dy = \frac{d}{dy_1}u \cdot dy_1 + \frac{d}{dy_2}u \cdot dy_2 + \cdots$$

u. ſ. w. Alſo

$$du = \frac{d}{dx}u \cdot dx + \frac{d}{dy}u \cdot dy + \cdots.$$

§. 3. Differenziale höherer Ordnung.

443. Erklärung. Wenn u eine beliebige Funktion iſt, und δ und δ_1 zwei beliebige Differenzzeichen ($d_{x,q}$, $d_{y,q}$)

oder Differenzialzeichen (d_x, d_y) ſind, bei denen ſich jedoch die Differenziation auf ein und denſelben Verein von Variabeln bezieht, deren Differenziale bei jeder Differenziation konſtant geſetzt werden, ſo verſtehe ich unter $\delta\delta_1 u$ den Ausdruck $\delta(\delta_1 u)$, und nenne $\delta\delta_1$ in dieſem Sinne ein Produkt von Differenzzeichen; und halte dieſe Beſtimmung auch dann noch feſt, wenn δ_1 ein Produkt von Differenzzeichen iſt, d. h. ich ſetze

$$\delta\delta_1 u = \delta(\delta_1 u)$$
$$\delta\delta_1\delta_2 u = \delta(\delta_1\delta_2 u) = \delta(\delta_1(\delta_2 u))$$
u. ſ. w.,

wo δ, δ_1, δ_2, $\cdots$ ſich auf denſelben Verein von Variabeln beziehen, deren Differenziale konſtant geſetzt werden.

444. Erklärung. Wenn δ ein beliebiges Differenzzeichen ($d_{x,q}$) iſt, ſo ſetze ich

$$\delta^0 u = u$$
$$\delta^{n+1} u = \delta\delta^n u,$$

letzteres jedoch nur, wenn $n + 1$ eine ganze poſitive Zahl iſt.

Anm. Es läſst ſich auch dem negativen Exponenten eine Bedeutung beilegen, was jedoch erſt in der Integralrechnung klar werden kann.

445. Es iſt

(a) $$d_{x,q}d_{y,q}f(x,y) = \frac{f(x+qdx,y+qdy) - f(x+qdx,y) - f(x,y+qdy) + fx}{q^2}$$

auch wenn $f(x,y)$ noch andere Veränderliche enthält, welche aber alle bei der Differenziation konſtant geſetzt werden, und ebenſo iſt

(b) $d_{x,q}d_{y,q}u = d_{y,q}d_{x,q}u$.

Beweis. Es iſt (nach 443)

$$d_{x,q}d_{y,q}f(x,y) = d_{x,q}[d_{y,q}f(x,y)] = d_{x,q}\frac{f(x,y+qdy) - f(x,y)}{q} \qquad [435]$$

und dies nach demſelben Satze

$$= \frac{f(x+qdx,y+qdy) - f(x+qdx,y) - f(x,y+dy) + f(x,y)}{q^2}.$$

Alſo Formel a erwieſen. Aber aus dieſer Formel folgt ſogleich, dass $d_{y,q}d_{x,q}f(x, y)$ denſelben Ausdruck liefert, wie $d_{x,q}d_{y,q}f(x, y)$, alſo auch Formel b erwieſen.

Anm. Man hätte auch das zu y gehörige q von dem zu x gehörigen verſchieden ſetzen und jenes etwa mit q_1 bezeichnen können, ſo wären die Formeln noch beſtehen geblieben, eine Verallgemeinerung, die jedoch ohne beſonderen Nutzen iſt.

446. Die Ordnung der auf einander folgenden Differenzzeichen ($d_{x,q}$ u. ſ. w.), unter denen die Differenzialzeichen mit einbegriffen ſind, iſt gleichgültig für das Reſultat.

Beweis. Denn nach 445 b laſſen ſich je zwei auf einander folgende Differenzzeichen vertauſchen.

447. Wenn ein höheres Differenzial ſtetig iſt, ſo ſind auch die niederen Differenziale, durch deren fortſchreitende Differenziation jenes entſtanden iſt, ſtetig.

Beweis. Es ſei u ein beliebiges Differenzial, und ſei $d_x u$ ſtetig. Es wird u im Allgemeinen eine Funktion der Variabeln x, y, ·· und ihrer Differenziale ſein. Allein da bei der Differenziation nach x alle übrigen Variabeln und ſämmtliche Differenziale als konſtante behandelt werden, ſo genügt es für dieſe Differenziation, u als bloſſe Funktion von x zu betrachten. Es ſei in dieſem Sinne $u = fx$, ſo iſt

$$d_x u = \left[\frac{f(x + qdx) - fx}{q}\right] (q = 0).$$

Da nun $d_x u$ ſtetig iſt, ſo muſs der in Klammer geſchloſſene Bruch um $q = 0$ nach einer beſtimmten endlichen Gränze konvergiren, die es in $q = 0$ erreicht, alſo muſs mit dem Nenner (q) auch der Zähler null werden, d. h. $f(x + qdx) - fx$ muſs mit q null werden, d. h. (nach 425) fx iſt in x ſtetig, alſo auch u. Durch Fortſetzung dieſer Schluſsweiſe gelangt man zu dem allgemeinen Reſultate des Satzes.

448. Es iſt, wenn A einen Ausdruck mit n Lücken von der Gattung x bezeichnet,

$$d_x^m(Ax^n) = \frac{n!}{(n-m)!}Ax^{n-m}dx^m.$$

Beweis 1. Der Satz gilt (nach 431) für $m = 1$.

2. Wenn nun der Satz für irgend einen Werth m gilt, ſo gilt er auch für $m + 1$; denn dann iſt

$$d_x^{m+1}(Ax^n) = d_x(d_x^m Ax^n) \qquad [448]$$
$$= d_x\left[\frac{n!}{(n-m)!}Ax^{n-m}dx^m\right],$$

da nach der Annahme der Beweis für den angenommenen Werth m gilt; da nun (nach 443) dx bei der Differenziation als konstant betrachtet werden soll, und es mit x von gleicher Gattung ist, so ist $\frac{n!}{(n-m)!}Adx^m$ ein Ausdruck mit n — m Lücken, folglich erhalten wir (nach 431) den zuletzt gefundenen Ausdruck

$$= \frac{(n-m)n!}{(n-m)!}Adx^m x^{n-m-1}dx$$
$$= \frac{n!}{(n-m-1)!}Ax^{n-m-1}dx^{m+1},$$

d. h. der Satz gilt dann auch, wenn man m + 1 statt m setzt; da er nun (nach Bew. 1) für m = 1 gilt, so gilt er auch für m = 2, und weil für m = 2, so auch für m = 3, also für alle positiven Werthe.

449. Wenn e_1, e_2, ··· die normalen Einheiten von $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$ sind, und δ_1, δ_2, ··· die zu dem Vereine der Veränderlichen x_1, x_2, ··· gehörigen partiellen Differenzialquotienten nach x_1, x_2, ··· bezeichnen, so ist (vorausgesetzt, dass $d_x^n u$ stetig sei)

$$d_x^n u = \sum \delta_a\delta_b\cdots u\cdot dx_a\cdot dx_b\cdots,$$

wo die Anzahl der Faktoren $dx_a dx_b\cdots$ in jedem Gliede n ist, und die Summe sich auf alle unter dieser Bedingung möglichen ganzen positiven Werthe a, b, ··· bezieht.

Beweis. Nach 437 ist

$$d_x u = \sum \delta_a u\cdot dx_a.$$

Differenzirt man noch einmal nach x, so ist, da bei dieser Differenziation (nach 443) dx, also auch dx_1, dx_2, ·· konstant zu setzen sind, (nach 437)

$$d_x^2 u = \sum \delta_b\delta_a u\cdot dx_a dx_b = \sum \delta_a\delta_b u\cdot dx_a dx_b \qquad [446]$$

u. s. w.

450. Erklärung. Unter $\frac{d^n}{dx^n}fx$ oder unter $f^{(n)}x$ ververstehe ich (vorausgesetzt, dass $d_x^n fx$ stetig ist) den Aus-

druck, welcher mit dx^n multiplicirt, was auch dx für eine mit x gleichgattige Grösse sein mag, $d_x^n fx$ liefert.

451. Wenn $d_x^n fx$ stetig ist, so ist $f^{(n)}x$ derjenige Ausdruck mit je n Lücken (in jedem Gliede), welcher die Eigenschaft hat, dass

$$(a) \quad f^{(n)}x(e_r e_s \overset{n}{\smile} \cdots) = \delta_r \delta_s \cdots fx$$

ist, für jede Reihe von n Indices r, s, ···, wobei die Bedeutung von $e_1, e_2, \cdots, \delta_1, \delta_2, \cdots$, dieselbe ist, wie in 449.

Beweis. Nach 450 ist zu zeigen, dass allemal $f^{(n)}x \cdot dx^n = d_x^n fx$ ist, wenn $f^{(n)}x$ der Gleichung (a) genügt. Es ist dann

$$f^{(n)}x dx^n = f^{(n)}x(e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + \cdots)^n$$

$$= \sum f^{(n)}x(e_a e_b \overset{n}{\smile} \cdots) dx_a dx_b \cdots$$

nach dem allgemeinen polynomischen Lehrsatze (oder auch nach 45)

$$= \sum \delta_a \delta_b \cdots fx \cdot dx_a dx_b \cdots \qquad [a]$$

$$= d_x^n fx \qquad [449].$$

452. Erklärung. Wenn x, y, ··· Zahlgrössen und u eine Funktion derselben ist, so verstehe ich, wenn $a + b + \cdots = n$ ist, unter $\frac{d^n}{dx^a dy^b \cdots} u$ den Ausdruck

$$\frac{d^n}{dx^a dy^b \cdots} u = \frac{d_x^a d_y^b \cdots u}{dx^a dy^b \cdots},$$

wo sich die Differenziationen auf den Verein der Variabeln x, y, ··· beziehen, und dx, dy, ··· von Null verschieden angenommen sind.

Anm. Die partiellen Differenzialquotienten nach verschiedenen extensiven Variabeln können fast überall entbehrt werden, da man mehrere extensive Variabeln stets auf eine einzige zurückführen kann (nach 352).

453. Wenn y noch wieder Funktion einer beliebigen Veränderlichen ist, so ist (die Stetigkeit der vorkommenden Differenziale vorausgesetzt)

$$\frac{d^n fy}{n!} = \sum \frac{f^{(r)}y}{r!} \cdot \left(\frac{d^a y}{a!} \cdot \frac{d^b y}{b!} \overset{r}{\smile} \cdots \right) (a + b + \cdots = n).$$

Beweis. Wie in der gewöhnlichen Analysis.

Kap. 3. Unendliche Reihen.

§. 1. Die unendlichen Reihen im Allgemeinen.

454. Erklärung. Eine Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ heisst ächt, wenn sich eine positive Zahl $T > 1$ finden lässt von der Art, dass u_0, $u_1 T$, $u_2 T^2, \cdots$ bis ins Unendliche hin endlich bleiben, d. h. dass sie numerisch kleiner bleiben als eine gewisse endliche Grösse M, so dass also

$$u_r T^r \text{ num.} < M$$

bleibt für jeden Index r.

455. Zusatz. Setzen wir $\frac{1}{T} = t$, so können wir die Bedingung der Aechtheit auch so ausdrücken, dass sich zwei positive Zahlen t und M, von denen $t < 1$ ist, finden lassen, so dass stets

$$u_r : t^r \text{ num.} < M$$

bleibe.

456. Jede ächte Reihe ist konvergent.

Beweis. Es sei $R = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ eine ächte Reihe, so giebt es (nach 455) eine positive Zahl < 1 von der Art, dass, für jeden Index r, $u_r : t^r$, was wir mit a_r bezeichnen wollen, numerisch kleiner als eine gewisse endliche (positive) Zahl M sei; dann wird

$$R = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots, \text{ wo } a_r \text{ num.} < M.$$

Der Rest ϱ_n dieser Reihe von dem Gliede $a_n t^n$ an ist

$$\varrho_n = a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \cdots.$$

Nun ist a_r num. $< M$, $a_r t^r$ num. $< M t^r$, also (nach 418)

$$\varrho_n \text{ num.} < M t^n + M t^{n+1} + \cdots$$
$$\text{num.} < M t^n (1 + t + t^2 + \cdots)$$
$$\text{num.} < M \frac{t^n}{1 - t}.$$

Nun lässt sich hier n so gross wählen, dass ϱ_n num. kleiner wird als eine beliebig gegebene positive Grösse k, und auch bleibt, wenn n noch wächst; dies wird nämlich erfüllt, wenn

$$n > \log. \frac{M}{k(1-t)} : \log. \left(\frac{1}{t}\right)$$

ist. **Da alſo der Rest ϱ_n mit wachſendem n nach Null zu konvergirt, ſo iſt die Reihe konvergent.**

Anm. Um die Beziehung zwischen ächten, unächten, konvergenten und divergenten Reihen noch anschaulicher hervortreten zu lassen, will ich hier noch die unächten Reihen berühren. Wenn die ſämmtlichen Glieder einer unächten Reihe endlich bleiben, d. h. numerisch kleiner bleiben als eine endliche poſitive Zahl M, ſo will ich dieſe Reihe eine Uebergangsreihe nennen, wenn dagegen die Glieder einer Reihe unendlich werden, d. h. wenn es zu jeder poſitiven Zahl M Glieder der Reihe giebt, welche noch grösser als M ſind, ſo mag eine ſolche Reihe eine abſurde heissen. So z. B. ist die Reihe $t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\cdots$ eine ächte, wenn der numerische Werth der Zahlgrösse t kleiner als 1 ist; ſie wird eine Uebergangsreihe, wenn t numerisch gleich 1 wird, und zwar eine divergente Uebergangsreihe, wenn $t=1$, eine konvergente, wenn $t=-1$ ist; ſie wird abſurd, wenn t num. >1 wird. Eine ſolche abſurde Reihe ist stets zu verwerfen. Hingegen hat die Uebergangsreihe mit der ächten noch das gemein, dass ſie den Werth der Funktion, welche durch die Reihe dargestellt werden ſoll, wirklich ausdrückt, gleichviel ob ſie konvergirt oder divergirt. Im letzteren Falle zeigt ſie, falls ſie ſich dem Unendlichen nähert, dass für dieſen Fall in der That die Funktion unendlich wird; ſo z. B. ist die obige Reihe bekanntlich die Reihe für $-\log.(1-t)$; dieſe Funktion wird mit $t=1$ unendlich, ebenſo wie die Reihe $t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\cdots$; und dieſe stellt alſo auch für dieſen Fall noch den Werth jener Funktion dar. Oder, um ein einfacheres Beispiel zu wählen, die Reihe $1+t+t^2+\cdots$ wird für $t=\mp 1$ eine Uebergangsreihe; und zwar nimmt ſie für $t=1$, entsprechend der Funktion $\frac{1}{1-t}$, deren Entwickelung ſie darstellt, unendlichen Werth an. — Wenn hingegen die divergente Uebergangsreihe ſich keinem unendlichen Werthe annähert, ſondern stets, wie weit man ſie auch verfolge, zwischen verschiedenen Werthen hin und her schwankt, wie z. B. die Reihe $1+t+t^2+\cdots$ bei dem Werthe $t=-1$, ſo lässt ſich dennoch ihr Werth aus der Gränze bestimmen, nach welcher jene Reihe konvergirt, wenn man t zuerst kleiner als 1 ſetzt und ſich dann t der 1 unbegränzt annähern lässt. Aber alle dieſe Uebergangsreihen, ſelbst wenn ſie konvergiren, dürfen nur mit Vorſicht angewandt werden; da die Rechnungsgeſetze ächter Reihen auf ſie nicht mehr anwendbar ſind.

457. Wenn a eine beliebige Grösse, b, c, $\cdots$ aber Zahlgrössen ſind, ſo ist der numerische Werth (ϱ) des Produktes ($abc\cdots$) dieſer Grössen, gleich dem Produkte ihrer numerischen Werthe ($\alpha, \beta, \gamma, \cdots$); d. h.

$$\varrho=\alpha\beta\gamma\cdots.$$

Beweis 1. Für zwei Grössen. Es seien $e_1, e_2, \cdots$ die reellen, $ie_1, ie_2, \cdots$ $(i = \sqrt{-1})$ die imaginären Einheiten von a und sei $a = \sum \alpha_a e_a + i\gamma_a e_a$, wo die α_a und γ_a alle reell sind und sei $b = \delta + \varepsilon i$, so ist (nach 414) $\alpha^2 = \sum \alpha_a^2 + \gamma_a^2$, $\beta^2 = \delta^2 + \varepsilon^2$. Ferner ist

$$ab = \sum (\delta\alpha_a - \varepsilon\gamma_a)e_a + i(\delta\gamma_a + \varepsilon\alpha_a)e_a, \text{ also}$$
$$\varrho^2 = \sum (\delta\alpha_a - \varepsilon\gamma_a)^2 + (\delta\gamma_a + \varepsilon\alpha_a)^2$$
$$= \sum \delta^2\alpha_a^2 + \varepsilon^2\gamma_a^2 + \delta^2\gamma_a^2 + \varepsilon^2\alpha_a^2$$
$$= (\delta^2 + \varepsilon^2)\sum \alpha_a^2 + \gamma_a^2 = \beta^2\alpha^2,$$

also, da ϱ, α, β positiv sind,

$$\varrho = \alpha\beta, \text{ d. h. ab num.} = \alpha\beta.$$

2. Da nun (nach Bew. 1) ab num. $= \alpha\beta$ ist, so ergiebt sich (nach Bew. 1) abc num. $= \alpha\beta\gamma$ u. s. w.

458. Wenn a und a_1 beliebige Grössen, b, c, $\cdots$ b_1, $c_1, \cdots$ aber Zahlgrössen sind und

$$a \text{ num.} < a_1, \; b \text{ num.} < b_1, \; c \text{ num.} < c_1, \cdots$$

sind, so ist auch

$$abc \cdots \text{ num.} < a_1 b_1 c_1 \cdots.$$

Beweis. Denn es seien $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \cdots$ beziehlich die numerischen Werthe von a, b, c, $\cdots$, $a_1, b_1, c_1, \cdots$, so ist (nach 457) $\alpha\beta\gamma\cdots$ der numerische Werth von abc$\cdots$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1\cdots$ der von $a_1b_1c_1\cdots$. Da aber $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \cdots$ positive Zahlen sind und $\alpha < \alpha_1$, $\beta < \beta_1$, $\gamma < \gamma_1, \cdots$ ist, so ist auch $\alpha\beta\gamma\cdots < \alpha_1\beta_1\gamma_1\cdots$, d. h. abc$\cdots$ num. $< a_1b_1c_1\cdots$.

Anm. Diese zwei Sätze, welche systematischer nach 419 ständen, sind hier nachgeholt, um sie im Folgenden verwenden zu können.

459. Wenn mehrere Reihen ächt sind, so ist auch ihre Vielfachensumme ächt, d. h. wenn

$$R_1 = u_1 + u_1' + u_1^{(2)} + u_1^{(3)} + \cdots$$
$$R_2 = u_2 + u_2' + u_2^{(2)} + u_2^{(3)} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_n = u_n + u_n' + u_n^{(2)} + u_n^{(3)} + \cdots$$

ächte Reihen sind, und $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ beliebige endliche Zahlgrössen sind, so ist auch die Reihe

$$R = u + u' + u^{(2)} + u^{(3)} + \cdots,$$

wo für jeden Zeiger s

$$u^{(s)} = \alpha_1 u_1^{(s)} + \alpha_2 u_2^{(s)} + \cdots \alpha_n u_n^{(s)}$$

ist, eine ächte Reihe.

Beweis. Da R_1 eine ächte Reihe ist, ſo giebt es (nach 454) zwei poſitive Zahlen T_1 und M_1, von denen die erstere > 1 iſt, von der Art, dass für jeden Zeiger s

$$u_1^{(s)} T_1 \text{ num.} < M_1$$

ſei. Ebenſo lassen ſich für die übrigen Reihen $R_2, \cdots R_n$ ſolche poſitiven Zahlenpaare $T_2, M_2, \cdots T_n, M_n$ finden, von denen die erste jedes Zahlenpaares > 1, und ſo, dass

$$u_2^{(s)} T_2 \text{ num.} < M_2, \cdots u_n^{(s)} T_n \text{ num.} < M_n$$

ist. Es ſei T die kleinste der Zahlen $T_1, \cdots T_n$, alſo noch $T > 1$, ſo bleibt

$$u_1^{(s)} T \text{ num.} < M_1, \; u_2^{(s)} T \text{ num.} < M_2, \cdots u_n^{(s)} T \text{ num.} < M_n,$$

alſo auch (nach 458), wenn $\beta_1, \cdots \beta_n$ die numerischen Werthe von $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ ſind,

$$\alpha_1 u_1^{(s)} T \text{ num.} < \beta_1 M_1, \cdots, \; \alpha_n u_n^{(s)} T \text{ num.} < \beta_n M_n;$$

folglich, da die rechten Seiten dieſer Vergleichung poſitiv ſind, ſo ist (nach 418)

$$\alpha_1 u_1^{(s)} T + \cdots + \alpha_n u_n^{(s)} T \text{ num.} < \beta_1 M_1 + \cdots + \beta_n M_n,$$

d. h.

$$u^{(s)} T \text{ num.} < M,$$

wenn $\beta_1 M_1 + \cdots \beta_n M_n$ mit M bezeichnet ist; folglich ist die Reihe R (nach 454) eine ächte.

§. 2. Die Reihen als Funktionen einer Zahlgrösse.

460. Der nach der Zahlgrösse x genommene Differenzialquotient einer ächten Reihe $R = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum a_n x^n$ ist wieder eine ächte Reihe.

Beweis 1. Da R eine ächte Reihe ist, ſo müssen ſich (nach 455) zwei poſ. Grössen t und M, von denen die erste < 1 ist, finden lassen, ſo dass für jedes r

$$\frac{a_r x^r}{t^r} \text{ num.} < M$$

ist. Nun ſei τ eine poſitive Zahl zwischen t und 1, d. h. $\tau > t$ aber < 1, ſo zeige ich, dass alle Glieder der Reihe

$$\frac{d}{dx}R = \sum \alpha a_\alpha x^{\alpha-1}$$

die Eigenschaft haben, dass für jeden Index r bis ins Unendliche hin der Ausdruck $\frac{ra_r x^{r-1}}{\tau^r}$ endlich sei. In der That ist

$$\frac{ra_r x^{r-1}}{\tau^r} = \frac{rt^r}{x\tau^r} \cdot \frac{a_r x^r}{t^r}.$$

Der zweite Faktor ist (nach Hypoth.) numerisch kleiner als M, also (nach 459) der ganze Ausdruck

$$\text{num.} < \frac{rt^r}{\tau^r} M_1,$$

wenn wir der Kürze wegen den numerischen Werth von M : x mit M_1 bezeichnen. Nun sei $n > \frac{t}{\tau - t}$, was stets möglich ist, da τ grösser als t, also $\tau - t$ ungleich null ist. Dann wird $n > (n+1)\frac{t}{\tau}$, oder, indem wir mit $\frac{t^n}{\tau^n}$ multipliciren,

$$\frac{nt^n}{\tau^n} > \frac{(n+1)t^{n+1}}{\tau^{n+1}}, \text{ und aus gleichem Grunde}$$

$$\frac{(n+1)t^{n+1}}{\tau^{n+1}} > \frac{(n+2)t^{n+2}}{\tau^{n+1}} > \ldots.$$

Nun werden aber die Ausdrücke

$$\frac{t}{\tau}, \frac{2t^2}{\tau^2}, \ldots \frac{nt^n}{\tau^n},$$

da ihre Anzahl endlich ist, und sie alle endliche Werthe haben, kleiner sein als eine gewisse positive endliche Grösse; diese heisse m. Da nun alle Ausdrücke $\frac{rt^r}{\tau^r}$ für jedes r, was grösser als n ist, wie eben bewiesen, kleiner als $\frac{nt^n}{\tau^n}$ sind, und dies letztere $< m$ ist, so werden alle jene Ausdrücke für jeden Werth von r kleiner als m sein, also auch

$$\frac{rt^r}{\tau^r} M_1 < mM_1.$$

Hier ist m eine endliche Grösse, aber auch M_1, wenn nicht etwa x gleich null ist, also auch mM_1 endlich, also auch $\frac{ra_r x^{r-1}}{\tau^r}$ numerisch kleiner als eine endliche Grösse, d. h. die

Reihe $\frac{d}{dx}R$ ist eine ächte, vorausgesetzt noch, dass $x \gtrless 0$ ist. Wenn aber $x = 0$ ist, so ist $\frac{d}{dx}R = a_1$, also gewiss eine ächte Reihe.

2. Da nun $\frac{d}{dx}R$ eine ächte Reihe ist, so ist (nach Beweis 1) auch dessen Differenzialquotient nach x, d. h. $\frac{d^2}{dx^2}R$ eine ächte Reihe u. s. w.

461. Wenn eine Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ für irgend einen Werth x' der Zahlgrösse x ächt ist, so ist sie es auch für jeden Werth der numerisch gleich oder kleiner als x' ist.

Beweis. Denn wenn die Reihe für $x = x'$ ächt ist, so müssen sich (nach 454) zwei positive Werthe T und M, von denen der erste > 1 ist, angeben lassen, so dass für jedes r

$$a_r x'^r T^r < M$$

ist. Dann ist aber, wenn x num. $= <$ x' ist,

$$a_r x^r T^r \text{ num.} = < a_r x'^r T^r \qquad [458]$$
$$\text{num.} < M_1,$$

d. h. die Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ ist dann auch eine ächte (nach 454).

Anm. Es folgt hieraus sogleich (nach 360), dass auch die nach x genommenen Differenzialquotienten jener Reihe für jedes x, was numerisch gleich oder kleiner als x' ist, ächte Reihen, also auch stetig sein müssen. Daraus folgt auch umgekehrt, dass wenn eine Funktion fx für irgend einen Werth von x, der numerisch kleiner als x' ist, sich in einer ächten Reihe soll entwickeln lassen, nothwendig fx und seine Differenziale für jeden Werth, der numerisch gleich oder kleiner als x' ist, auch stetig sein müssen. Und es kommt darauf an, ob diese Bedingung der Stetigkeit ausreichend dafür ist, dass sich fx in einer ächten Reihe entwickeln lasse. Zu dem Ende kommt es darauf an, fx für die verschiedenen numerisch gleichen Werthe zu betrachten, namentlich für eine Reihe solcher Werthe, von denen jeder folgende aus dem vorhergehenden durch gleiche circuläre Aenderung hervorgeht. Nun hat Cauchy nachgewiesen, dass, wenn fx stetig ist, das arithmetische Mittel aller Werthe, welche fx erhält, indem x fortschreitend einer konstanten circulären Aenderung unterworfen wird, bis x wieder zu dem ursprünglichen Werthe zurückkehrt, ein Ausdruck ist, welcher stets nach einer konstanten (von x unabhängigen)

Gränze konvergirt, ſobald der Winkel der circulären Aenderung verſchwindend klein wird. Er hat aus dieſem Satze auf eine ſehr ſinnreiche Weiſe die Bedingung abgeleitet, unter welcher eine Funktion fx ſich in einer konvergenten (genauer in einer ächten) Reihe entwickeln lässt, worüber Moigno Leçons de calcul differentiel Tom. 1 p. 150 ss. zu vergleichen ist. Der Gang der folgenden Entwickelung ist im weſentlichen derſelbe, wie er in dem angeführten Werke gewählt ist; doch ist hier die Betrachtung verallgemeinert, in ſofern fx als extenſive Grösse betrachtet wird, während x ſelbst eine Zahlgrösse bleibt.

462. Lehrſatz und Erklärung. Wenn f'x stetig ist für jede Zahlgrösse x, deren numerischer Werth zwischen den Gränzen a und b liegt, und Θ eine n-te Wurzel der abſoluten Einheit und zwar $\Theta = \cos.\frac{2\pi}{n} + i\,\sin.\frac{2\pi}{n}$ ist, ſo konvergirt der Ausdruck

$$\frac{1}{n}\sum f(x\Theta^\alpha) = \frac{f(x\Theta) + f(x\Theta^2) + \cdots + f(x\Theta^n)}{n}$$

mit unendlich wachſendem n nach einer konstanten (von x unabhängigen) Gränze. Dieſe konstante Gränze ſei das zu jenem Stetigkeitsgebiete gehörende konstante Glied der Funktion fx genannt und mit C(fx) bezeichnet.

Beweis des Lehrſatzes. Da f'x stetig ist, ſo ist (nach 439)

$$f(x+q) - fx = q(f'x + N),$$

wo N mit q null wird. Da nun Θ^α numerisch gleich 1 ist, ſo ist $x\Theta^\alpha$ numerisch $= x$, alſo auch $f'(x\Theta^\alpha)$ stetig. Setzt man nun in die obige Gleichung $x\Theta^\alpha$ statt x, und $q = x\Theta^\alpha(\Theta - 1)$; ſo verwandelt ſich $x + q$ in $x\Theta^{\alpha+1}$ und wir erhalten, wenn wir noch dem N den Zeiger α beifügen,

$$f(x\Theta^{\alpha+1}) - f(x\Theta^\alpha) = x\Theta^\alpha(\Theta - 1)[f'(x\Theta^\alpha) + N_\alpha].$$

Nun ist, wenn wir $\frac{d}{dx}$ mit δ bezeichnen, $\delta f(x\Theta^\alpha) = \Theta^\alpha f'(x\Theta^\alpha)$ (nach 440); alſo wird

$$\frac{f(x\Theta^{\alpha+1}) - f(x\Theta^\alpha)}{x(\Theta - 1)} = \delta f(x\Theta^\alpha) + N'_\alpha,$$

indem wir statt $\Theta^\alpha N_\alpha$, welches mit N_α numerisch gleich ist, alſo, eben ſo wie dies, mit q zugleich null wird, N'_α geſchrieben haben.

Gehen wir nun zum arithmetischen Mittel über, so wird, wenn die folgenden Summen von $\alpha = 1$ bis n genommen werden,

$$\frac{1}{nx(\Theta-1)}\sum f(x\Theta^{\alpha+1}) - f(x\Theta^{\alpha}) = \delta\sum\frac{f(x\Theta^{\alpha})}{n} + \frac{1}{n}\sum N'_{\alpha}.$$

Die linke Seite ist null; denn die dort erscheinende Summe ist gleich

$$f(x\Theta^{n+1}) + f(x\Theta^{n}) + \cdots + f(x\Theta^{2}) - f(x\Theta^{n}) - \cdots - f(x\Theta^{2}) - f(x\Theta), \text{ also } = f(x\Theta^{n+1}) - f(x\Theta) = 0,$$

da $\Theta^{n} = 1$, also $x\Theta^{n+1} = x\Theta$ ist. Somit erhalten wir

$$\delta\sum\frac{f(x\Theta^{\alpha})}{n} = -\frac{1}{n}\sum N'_{\alpha}.$$

Aber $\frac{1}{n}\sum N'_{\alpha}$ ist das arithmetische Mittel der Grössen $N'_1, N'_2, \cdots$, ist also, wie gross auch n sei, numerisch kleiner als der grösste numerische Werth dieser Grössen, den wir mit N' bezeichnen wollen. Wenn nun n unendlich wird, so konvergirt $\Theta = \cos.\frac{2\pi}{n} + i\sin.\frac{2\pi}{n}$ nach 1, also $\Theta - 1$ nach 0, also konvergirt auch $q = x\Theta^{\alpha}(\Theta - 1)$, was mit $x(\Theta - 1)$ numerisch gleich ist, nach 0, also auch $N'_1, N'_2, \cdots$, also auch N'; also auch $\delta\sum\frac{f(xN^{\alpha})}{n}$, da sein numerischer Werth noch kleiner ist als der von N'. Setzen wir die Gränze, nach welcher $\sum\frac{f(x\Theta^{\alpha})}{n}$ konvergirt $= \varphi x$, so haben wir also

$$\delta\varphi x = 0, \text{ d. h. } \varphi x = \text{Const.}$$

Anm. Ich habe hier den Satz, dass, wenn das Differenzial einer Funktion null bleibt, die Funktion konstant sei, als bekannt vorausgesetzt, um hier nicht die Entwickelung zu unterbrechen. Der Beweis dieses Satzes ist im Eingange des folgenden Kapitels (der Integralrechnung) nachgeholt, und zwar ohne dass in diesem Beweise auf irgend einen Satz des gegenwärtigen Kapitels zurückgegangen sei.

463. Das konstante Glied einer Vielfachensumme von Funktionen (deren erste abgeleitete Funktionen stetig sind), ist die entsprechende Vielfachensumme aus den konstanten Gliedern der Funktionen, d. h. (wenn $f'_1x, f'_2x, \cdots$ stetig sind, so ist)

$$C[\alpha_1 f_1 x + \alpha_2 f_2 x + \cdots] = \alpha_1 C(f_1 x) + \alpha_2 C(f_2 x) + \cdots.$$

Beweis. Wenn Θ dieſelbe Bedeutung wie in 462 hat, ſo ist $C(f_1x)$ die Gränze, nach welcher $\frac{1}{n}\sum f_1(x\Theta^\alpha)$ mit unendlichem n konvergirt, d. h. es verschwindet $\frac{1}{n}\sum f_1(x\Theta^\alpha) - C(f_1x)$ mit $\frac{1}{n}$, ebenſo $\frac{1}{n}\sum f_2(x\Theta^\alpha) - C(f_2x)$ u. ſ. w., alſo (nach 421) auch ihre Vielfachenſumme, d. h.

$$\frac{1}{n}\sum \alpha_1 f_1(x\Theta^\alpha) + \alpha_2 f_2(x\Theta^\alpha) + \cdots - \alpha_1 C(f_1x) - \alpha_2 C(f_2x) - \cdots,$$

d. h. es konvergirt

$$\frac{1}{n}\sum \alpha_1 f_1(x\Theta^\alpha) + \alpha_2 f_2(x\Theta^\alpha) + \cdots$$

nach $\alpha_1 C(f_1x) + \alpha_2 C(f_2x) + \cdots$. Aber die Gränze, nach welcher jener Ausdruck konvergirt, ist (nach 462) mit $C(\alpha_1 f_1x + \alpha_2 f_2x + \cdots)$ bezeichnet, alſo

$$C(\alpha_1 f_1x + \alpha_2 f_2x + \cdots) = \alpha_1 C(f_1x) + \alpha_2 C(f_2x) + \cdots.$$

464. Wenn m eine ganze Zahl, aber ungleich null ist, ſo ist

$$C(x^m) = 0.$$

Beweis. $C(x^m)$ ist (nach 462) die Gränze, nach welcher $\frac{1}{n}\sum (x\Theta^\alpha)^m$ mit unendlich wachſendem n konvergirt. Es ist aber $\frac{1}{n}\sum (x\Theta^\alpha)^m = \frac{x^m}{n}\sum \Theta^{m\alpha}$. Nehmen wir n ſo groß an, daſs m num. $< n$ ist, und ſetzen $\sum \Theta^{m\alpha} = s$, ſo ist

$$s = \Theta^m + \Theta^{2m} + \cdots + \Theta^{nm}$$
$$s = 1 + \Theta^m + \Theta^{2m} + \cdots + \Theta^{(n-1)m},$$

weil $\Theta^{nm} = 1$ ist. Es geht aber der obere Ausdruck aus dem unteren durch Multiplikation mit Θ^m hervor; alſo haben wir

$$s\Theta^m = s, \text{ d. h. } s(1 - \Theta^m) = 0.$$

Es ist aber (nach 462) $\Theta = \cos.\frac{2\pi}{n} + i\sin.\frac{2\pi}{n}$, alſo $\Theta^m = \cos.\frac{2m\pi}{n} + i\sin.\frac{2m\pi}{n}$; alſo da $\frac{m}{n}$ ein ächter Bruch ist, ſo ist $\Theta^m \gtrless 1$, alſo folgt aus der Gleichung $s(1 - \Theta^m) = 0$, daſs

s gleich null ist, also auch $\frac{x^m}{n}\sum\overline{\Theta^{ma}}=0$, d. h. $\frac{1}{n}\sum\overline{(x\Theta^a)^m}=0$, sobald $n>m$ ist, also die Gränze, nach welcher dieser Ausdruck mit unendlich wachsendem n konvergirt, 0, d. h. $C(x^m)=0$.

Anm. In diesen Sätzen liegt der Grund der obigen Benennung, indem, wenn fx eine beliebige (begränzte) Potenzreihe von x mit ganzen positiven oder negativen Exponenten und dem konstanten Gliede a ist, C(fx) gleich diesem konstanten Gliede a ist.

465. Wenn x num. $>$ a ist, so ist

$$C\frac{x}{x-a}=1.$$

Beweis. Es ist

$$\frac{x}{x-a}=1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\cdots+\frac{a^{r-1}}{x^{r-1}}+\frac{a^r}{x^{r-1}(x-a)}.$$

Also (nach 463)

$$C\frac{x}{x-a}=1+C\left[\frac{a^r}{x^{r-1}(x-a)}\right].$$

Nun ist das letzte Glied der rechten Seite (nach 462) numerisch kleiner als der grösste der Ausdrücke, welche aus $\frac{a^r}{x^{r-1}(x-a)}$ hervorgehen, indem man statt x beliebige mit x numerisch gleiche Werthe setzt. Der grösste dieser Ausdrücke ist, wenn A und X die numerischen Werthe von a und x sind, $=\frac{A^r}{X^{r-1}(X-A)}$. Ist nun p eine beliebige positive Grösse, so kann man r stets so gross wählen, dass $\frac{A^r}{X^{r-1}(X-A)}$ num. $<$ p wird, und auch bleibt, wenn p noch wächst; also wird dann

$$C\left[\frac{x}{x-a}\right]-1 \text{ num.} < p,$$

d. h. numerisch kleiner als jede positive Grösse, d. h. $=0$, also

$$C\left[\frac{x}{x-a}\right]=1.$$

466. Wenn die zweite abgeleitete Funktion von fx stetig ist für jeden Zahlwerth x, der numerisch kleiner als x′ ist, so lässt sich fx in einer ächten, nach Potenzen von x aufsteigenden Reihe entwickeln. Und zwar, wenn z num. $>$ x,

aber num. $< x'$ ist und das Zeichen C sich auf die Variable z bezieht, während x als konstant gesetzt wird, so ist

$$fx = C\left[\frac{zfz}{z-x}\right] = \sum x^a C\left[\frac{fz}{z^a}\right],$$

und wenn X und Z beziehlich die numerischen Werthe von x und z sind, und F der grösste der numerischen Werthe ist, welche fz für die verschiedenen Werthe von z, welche numerisch $= Z$ sind, annimmt, so ist jedes Glied der obigen Entwickelungsreihe von fx, und auch der Rest der Reihe numerisch kleiner als das entsprechende Glied und als der entsprechende Rest der nach Potenzen von X entwickelten Reihe

$$\frac{ZF}{Z-X} = F\sum \frac{X^a}{Z^a}.$$

Beweis. Es sei zunächst für z nur vorausgesetzt, dass es numerisch kleiner als x' sei, so ist (nach Hyp.) $f''z$ stetig, also (nach 447) auch $f'z$ und fz. Nun sei x als konstant betrachtet, und nur z als variabel, und sei das konstante Glied der Funktion

$$* \quad \varphi z = \frac{z(fz - fx)}{z - x}$$

betrachtet; also zunächst die Stetigkeit von $\varphi' z$ untersucht. Es ist zuerst für $z = x$ der Ausdruck $\frac{fz - fx}{z - x}$ (nach 429, wo man nur $dx = 1$, und $x + q = z$ zu setzen hat) $= f'x = f'z$, also in diesem Falle $\varphi z = zf'z$, also $\varphi' z$ in diesem Falle $= f'z + zf''z$, also stetig, da $f'z$ und $f''z$ es sind. Ferner, wenn $z \gtrless x$, also $z - x \gtrless 0$ ist, so ist

$$\varphi' z = \frac{fz - fx}{z - x} + \frac{zf'z}{z - x} - \frac{z(fz - fx)}{(z - x)^2}.$$

Da nun fz, $f'x$, z stetig sind, und $z - x \gtrless 0$ ist, so ist auch in diesem Falle $\varphi' z$ stetig; also $\varphi' z$ so lange stetig, als z num. $< x'$ ist. Somit bleibt $C(\varphi z)$ (nach 462) von unverändertem Werthe, so lange z num. $< x'$ ist, aber für $z = 0$ wird (nach *) φz gleichfalls null, somit ist $C(\varphi 0) = 0$, also auch $C(\varphi z)$, also erhalten wir die Gleichung

$$C\left[\frac{z(fz - fx)}{z - x}\right] = 0.$$

Nehmen wir jetzt z numerisch $>$ x aber noch immer num. $<$ x' an, so ist $z - x \gtrless 0$ und es sind daher $\frac{zfz}{z-x}$ und $\frac{zfx}{z-x}$ so wie ihre Differenziale nach z stetig, also (nach 463)

$$C\left[\frac{zfz}{z-x}\right] - fxC\left[\frac{z}{z-x}\right] = 0.$$

Aber $C\frac{z}{z-x} = 1$ (nach 465, wo man nur z statt x, und x statt a zu schreiben hat), folglich hat man

$$fx = C\left[\frac{zfz}{z-x}\right].$$

Nun ist $\frac{z}{z-x} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{z^{r-1}} + \frac{x^r}{z^{r-1}(z-x)}$, also (nach 463)

$$fx = C(fz) + xC\left(\frac{fz}{z}\right) + x^2C\left(\frac{fz}{z^2}\right) + \cdots + x^{r-1}C\left(\frac{fz}{z^{r-1}}\right) + C\frac{x^r fz}{z^{r-1}(z-x)}.$$

Hier ist das letzte Glied (nach 462) numerisch kleiner als der numerisch grösste der Ausdrücke, die man erhält, wenn man in $\frac{x^r fz}{z^{r-1}(z-x)}$ statt z alle möglichen mit ihm numerisch gleichen Werthe setzt. Der grösste der numerischen Werthe, die dabei fz annimmt, ist oben mit F bezeichnet, die numerischen Werthe von z und x aber mit Z und X; der numerisch grösste Werth, den $\frac{1}{z-x}$ annehmen kann, ist $\frac{1}{Z-X}$; also ist $C\frac{x^r fz}{z^{r-1}(z-x)}$ num. $< \frac{X^r F}{Z^{r-1}(Z-X)}$; und aus gleichem Grunde sind die übrigen Glieder, vom ersten anfangend, numerisch kleiner als F, $\frac{XF}{Z}$, $\frac{X^2F}{Z^2}$, $\cdots$ $\frac{X^{r-1}F}{Z^{r-1}}$; dies sind aber die entsprechenden Glieder und ersteres der entsprechende Rest der Reihe $\frac{FZ}{X-Z} = F\sum\frac{X^a}{Z^a}$. Da nun endlich die letztgenannte Reihe eine ächte ist, so ist auch die Reihe für fx, da ihre Glieder numerisch noch kleiner sind, als die Glieder dieser Reihe, eine ächte.

467. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz. Wenn $f'x$ stetig ist für jedes x, was numerisch kleiner als x' ist, so ist in demselben Umfange

$$fx = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}0 + \cdots$$

$$= \sum \frac{f^{(a)}0\, x^a}{a!}.$$

Beweis. Denn dann lässt sich fx (nach 466) in einer Reihe entwickeln. Es sei diese Reihe

$$(*) \quad fx = \sum a_a x^a,$$

so ist

$$f^{(n)}x = \sum \frac{a!}{(a-n)!} a_a x^{a-n} \qquad [448],$$

also $f^{(n)}0 = n!\, a_n$, da alle übrigen Glieder null sind, also

$$a_n = \frac{f^{(n)}0}{n!}.$$

Dies in (*) eingesetzt giebt die zu erweisende Gleichung.

Anm. Da $f(a+x)$ als Funktion von x betrachtet werden kann, so ist es überflüssig, den Satz in zwei Sätze (den Taylor'schen und Maclaurin'schen) zu zertrennen.

§. 3. Entwickelung der Funktionen mehrerer Zahlgrössen oder Einer extensiven Grösse in Reihen.

468. Lehrsatz und Erklärung (Erweiterung von 462). Wenn $f(x_1, x_2, \cdots)$ eine Funktion mehrerer veränderlicher Zahlgrössen $x_1, x_2, \cdots$ ist, und die zu diesem Vereine gehörigen partiellen ersten Differenzialquotienten $\frac{d}{dx_1} f(x_1, x_2, \cdots)$, $\frac{d}{dx_2} f(x_1, x_2, \cdots), \cdots$ allemal stetig sind, sobald gleichzeitig der numerische Werth von x_1 zwischen den Gränzen a_1 und b_1, der von x_2 zwischen den Gränzen a_2 und b_2 liegt u. s. w.; und wenn endlich $\Theta_1 = \cos.\frac{2\pi}{n_1} + i\sin.\frac{2\pi}{n_1}$, $\Theta_2 = \cos.\frac{2\pi}{n_2} + i\sin.\frac{2\pi}{n_2}, \cdots$, so konvergirt der Ausdruck

$$\frac{1}{n_1 n_2 \cdots} \sum f(x_1 \Theta_1^a,\ x_2 \Theta_2^b, \cdots)$$

mit den unbegränzt wachfenden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \cdots$ nach einer konstanten (von $x_1, x_2, \cdots$ unabhängigen) Gränze. Diefe konstante Gränze fei das zu jenem Stetigkeitsgebiete gehörende konstante Glied der Funktion $f(x_1, x_2, \cdots)$ genannt und mit $C[f(x_1, x_2, \cdots)]$ bezeichnet. Dann ist für 2 Variabeln

$$C[f(x_1, x_2)] = C_1(C_2[f(x_1, x_2)]),$$

wo C_2 fich nur auf die Variable x_2 bezieht (x_1 als konstant gefetzt) und C_1 fich nur auf die Variable x_1 bezieht (x_2 als konstant gefetzt); und entsprechend für mehr Variabeln.

Beweis 1 (für 2 Variabeln). Nach der Bedeutung der Summenbezeichnung ist

$$\frac{1}{n_1 n_2}\sum\overline{f(x_1\Theta_1^a, x_2\Theta_2^b)} = \sum\overline{\frac{1}{n_1}\sum\frac{1}{n_2}f(x_1\Theta_1^a, x_2\Theta_2^b)},$$

wo die innere Summe fich nur auf den Index b bezieht, die äussere nur auf den Index a. Lassen wir nun zunächst n_2 unbegränzt wachfen, fo konvergirt die innere Summe (nach 462) nach einer von x_2 unabhängigen Gränze, welche wir mit $C_2[f(x_1\Theta_1^a, x_2)]$ zu bezeichnen haben. Diefe Gränze wird alfo nur noch eine Funktion von $x_1\Theta_1^a$ fein, und fei diefelbe mit $\varphi(x_1\Theta_1^a)$ bezeichnet; fo ist die Gränze, nach welcher der obige Ausdruck mit unbegränzt wachfendem n_2 konvergirt,

$$= \frac{1}{n_1}\sum\overline{\varphi(x_1\Theta_1^a)};$$

wächst nun auch n_1 unbegränzt, fo konvergirt (nach 462) diefer Ausdruck nach der auch von x_1 unabhängigen Gränze $C_1[\varphi x_1]$. Nach diefer Gränze konvergirt alfo der urfprüngliche Ausdruck, wenn in ihm fowohl n_1 als n_2 unbegränzt wachfen; d. h. es ist

$$C[f(x_1, x_2)] = C_1[\varphi x_1].$$

Aber es war $\varphi(x_1\Theta_1^a) = C_2[f(x_1\Theta_1^a, x_2)]$ gefetzt, alfo ist (für $a = 0$), $\varphi x_1 = C_2[f(x_1, x_2)]$; alfo

$$C[f(x_1, x_2)] = C_1(C_2[f(x_1, x_2)]).$$

2. Diefelbe Schlussreihe lässt fich auf beliebig viele Veränderliche übertragen.

Anm. Es versteht fich von felbst, dass man auch $n_1 = n_2 = \cdots$, alfo auch $\Theta_1 = \Theta_2 = \cdots$ fetzen kann, ohne dass der Satz aufhört richtig zu fein.

469. (Erweiterung von 466). Wenn $f(x_1, x_2, \cdots)$ eine Funktion mehrerer veränderlichen Zahlgrössen $x_1, x_2, \cdots$ ist, und die zu dem Vereine dieſer Veränderlichen gehörigen partiellen zweiten Differenzialquotienten $\frac{d^2}{dx_1^2} f(x_1, x_2, \cdots)$, $\frac{d^2}{dx_2^2} f(x_1, x_2, \cdots), \cdots$ allemal stetig ſind, ſobald gleichzeitig x_1 numerisch kleiner als x'_1, x_2 numerisch kleiner als x'_2 ist u. ſ. w., ſo lässt ſich $f(x_1, x_2, \cdots)$ in einer nach ganzen homogenen Funktionen von $x_1, x_2, \cdots$ aufsteigenden ächten Reihe entwickeln. Und zwar wenn ſich das Zeichen C auf die Veränderlichen $z_1, z_2, \cdots$ bezieht, während $x_1, x_2 \cdots$ als konstant gesetzt werden, ſo ist

$$\text{(a)} \quad f(x_1, x_2, \cdots) = C\left[f(z_1, z_2, \cdots)\frac{z_1}{z_2 - x_2}\cdot\frac{z_2}{z_1 - x_1}\cdots\right]$$

$$\text{(b)} \quad = \sum x_1^a, x_2^b, \cdots C\left[\frac{f(z_1, z_2, \cdots)}{z_1^a, z_2^b \cdots}\right];$$

und wenn X_1, Z_1, X_2, Z_2, $\cdots$ beziehlich die numerischen Werthe von x_1, z_1, x_2, $z_2, \cdots$ ſind, und F der grösste der numerischen Werthe ist, welche $f(z_1, z_2, \cdots)$ für die verschiedenen Werthe von $z_1, z_2, \cdots$, welche beziehlich numerisch $= Z_1, Z_2, \cdots$ ſind, annimmt, ſo ist jedes Glied der obigen Entwickelungsreihe von $f(x_1, x_2, \cdots)$, ſo wie auch jede Summe jener Glieder und namentlich der mit dem homogenen Gliede eines beliebigen (n-ten) Grades beginnende Rest der Reihe numerisch kleiner als das entsprechende Glied, oder die entsprechende Summe oder der entsprechende Rest in der Reihe

$$F\frac{Z_1}{Z_1 - X_1}\cdot\frac{Z_2}{Z_2 - X_2}\cdots = \sum F\cdot\frac{X_1^a}{Z_1^a}\cdot\frac{X_2^b}{Z_2^b}\cdots.$$

Beweis 1 (für 2 Veränderliche). Betrachten wir zunächst x_1 als konstant, ſo ist (nach 466)

$$(*) \quad f(x_1, x_2) = C_2\left[\frac{z_2 f(x_1, z_2)}{z_2 - x_2}\right].$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist nur noch eine Funktion von x_1 und x_2; dieſe Funktion ſei mit $\varphi(x_1, x_2)$ bezeichnet, ſo ist (nach 466)

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) = C_1\left[\frac{z_1}{z_1 - x_1}\varphi(z_1, x_2)\right],$$

wo C_1 sich nur auf die Veränderliche z_1 bezieht. Setzen wir nun statt $\varphi(z_1, x_2)$ seinen Werth, welcher aus der rechten Seite der obigen Gleichung (*) dadurch hervorgeht, dass man z_1 statt x_1 setzt, so erhält man

$$f(x_1, x_2) = C_1\left(\frac{z_1}{z_1 - x_1} C_2\left[\frac{z_2}{z_2 - x_2} f(z_1, z_2)\right]\right).$$

Da C_2 sich nur auf die Variable z_2 bezieht, also $\frac{z_1}{z_1 - x_1}$ in Bezug auf C_2 als konstant gesetzt wird, so können wir (nach 463) auch das Zeichen C_2 vor diesen Faktor setzen und erhalten

$$f(x_1, x_2) = C_1\left(C_2\left[\frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} f(z_1, z_2)\right]\right)$$
$$= C\left[\frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} f(z_1, z_2)\right] \text{ [nach 468]},$$

also Formel (a) bewiesen. Es kommt nun darauf an, hier den in Klammern geschlossenen Ausdruck, in welchem wir der Kürze wegen f statt $f(z_1, z_2)$ schreiben wollen, in einer Reihe nach steigenden ganzen homogenen Funktionen von x_1 und x_2 zu entwickeln, und den zugehörigen Rest hinzuzufügen. Setzen wir $u_0, u_1, \cdots u_{n-1}$ als die n ersten Glieder und r_n als den zugehörigen Rest dieser Reihe, also

$$** \quad \frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} \cdot f = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + r_n,$$

so ist bekanntlich $u_0 = f$, $u_1 = \left(\frac{x_1}{z_1} + \frac{x_2}{z_2}\right)f$, und für jeden Index r

$$*** \quad u_r = \sum \frac{x_1^a x_2^b f}{z_1^a z_2^b} (a + b = r),$$

$$\text{und } r_n = \frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} u_n.$$

Dann ist also

$$f(x_1, x_2) = u_0 + C(u_1) + C(u_2) + \cdots C(u_{n-1}) + C(r_n).$$

Hier ist jedes Glied der rechten Seite (nach 462) numerisch kleiner als der numerisch grösste der Ausdrücke, die

man erhält, wenn man in die in Klammer geschlossene Funktion von z_1 und z_2 statt dieſer Variabeln alle möglichen mit ihnen numerisch gleichen Werthe ſetzt. Der grösste der numerischen Werthe, die dabei f annimmt, ist oben mit F bezeichnet, die numerischen Werthe von z_1 und z_2, x_1 und x_2 mit Z_1 und Z_2, X_1 und X_2. Folglich ist

$$\frac{x_1^a x_2^b f}{z_1^a z_2^b} \text{ num.} < \frac{X_1^a X_2^b F}{Z_1^a Z_2^b};$$

alſo da der Ausdruck rechts poſitiv ist, ſo ist (nach 418) auch

$$\sum \frac{x_1^a x_2^b f}{z_1^a z_2^b} \text{ num.} < \sum \frac{X_1^a X_2^b F}{Z_1^a Z_2^b},$$

alſo auch (nach ***) für jeden Index r

$$u_r \text{ num.} < U_r,$$

wo U_r dasjenige bezeichnet, was aus u_r hervorgeht, wenn man darin X_1, Z_1, X_2, Z_2, F statt x_1, z_1, x_2, z_2, f ſetzt, ſo dass alſo

$$(****) \quad \frac{Z_1}{Z_1 - X_1} \cdot \frac{Z_2}{Z_2 - X_2} F = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + R_n$$

wird, wo auch der Rest R_n aus r_n durch dieſelben Substitutionen hervorgeht. Dieſer Rest ist noch zu unterſuchen. Es ist, wie ſo eben gezeigt,

$$u_n \text{ num.} < U_n.$$

Ferner aber auch, da unter allen Werthen welche $z_1 - x_1$ annehmen kann, wenn statt z_1 und x_1 alle möglichen mit ihnen numeriſch gleichen Werthe geſetzt werden, $Z_1 - X_1$ der numeriſch kleinste ist, ſo ist

$$\frac{z_1}{z_1 - x_1} \text{ num.} < \frac{Z_1}{Z_1 - X_1}, \text{ und aus gleichem Grunde}$$

$$\frac{z_2}{z_2 - x_2} \text{ num.} < \frac{Z_2}{Z_2 - X_2}.$$

Alſo da die beiden letzten Vergleichungen nur Zahlgrössen enthalten, ſo ist (nach 458)

$$\frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} u_n \text{ num.} < \frac{Z_1}{Z_1 - X_1} \cdot \frac{Z_2}{Z_2 - X_2} \cdot U_n,$$

d. h. $r_n \text{ num.} < R_n$.

Alſo ist auch (nach 462)

$$C(u_r) \text{ num.} < U_r, \quad C(r_n) \text{ num.} < R_n,$$

d. h. jedes Entwickelungsglied der Reihe für $f(x_1, x_2)$, und der Rest derfelben ist numerisch kleiner als das entsprechende Glied und als der entsprechende Rest der Entwickelungsreihe (****). Diefe letztere Reihe ist aber bekanntlich konvergent, d. h. ihr Rest R_n konvergirt mit unbegränzt wachfendem n nach null; alfo thut dies auch der Rest $C(r_n)$, da er noch numerisch kleiner als R_n ist, d. h. auch die Entwickelungsreihe für $f(x_1, x_2)$ ist konvergent, fo lange nämlich die Bedingung erfüllt wird, dass x_1 num. $< x'$ und x_2 num. $< x'_2$ bleibt. Die Reihe für $f(x_1, x_2)$ war aber, wenn wir den Rest, wie dies bei konvergenten Reihen gestattet ist, weglassen,

$$f(x_1, x_2) = u_0 + C(u_1) + C(u_2) + \cdots,$$

wo
$$C(u_r) = C\sum \overline{\frac{x_1^a x_2^b f}{z_1^a z_2^b}}(a + b = r), \text{ d. h.}$$
$$= \sum \overline{x_1^a x_2^b C\left[\frac{f(z_1, z_2)}{z_1^a z_2^b}\right]}(a + b = r),$$

womit die Formel (b) bewiefen ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Reihe $f(x_1, x_2) = u_0 + C(u_1) + C(u_2) + \cdots$ nicht bloss eine konvergente, fondern auch eine ächte ist. Da x_1, x_2 num. $< x'_1, x'_2$ find, fo find $\frac{x'_1}{x_1}$ und $\frac{x'_2}{x_2}$ num. > 1; folglich muss es eine pofitive Zahl T geben, welche > 1 aber numerisch kleiner als $\frac{x'_1}{x_1}$ und $\frac{x'_2}{x_2}$ ist. Dann hat man $x_1 T$ num. $< x'_1$ und $x_2 T$ num. $< x'_2$, folglich muss die Reihe für $f(x_1, x_2)$ noch konvergent bleiben, wenn man $x_1 T$ statt x_1 und $x_2 T$ statt x_2 fetzt; dann verwandelt fich aber $C(u_r)$, da es eine homogene Funktion r-ten Grades von x_1, x_2 ist, in $T^r C(u_r)$, folglich bleibt die Reihe

$$u_0 + TC(u_1) + T^2 C(u_2) + \cdots$$

konvergent, alfo auch ihre Glieder bis ins Unendliche hin endlich, alfo (nach 454) die Reihe

$$u_0 + C(u_1) + C(u_2) + \cdots$$

eine ächte.

2. Der Beweis 1 ist überall fo geführt, dass er fich unmittelbar auf beliebig viele Variable übertragen lässt.

470. Der Taylor'sche Satz (467) gilt auch, wenn x eine beliebige extenfive Grösse ist; d. h. es ist auch in diefem Falle

$$fx = f(0) + xf'0 + \frac{x^2}{2}f''0 + \cdots = \sum \frac{x^a}{a!}f^{(a)}0,$$

vorausgefetzt, dass d^2fx für jeden Werth x, der numerisch kleiner als x' ist, stetig fei.

Beweis. Es fei $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$, wo $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von x find, fo ist (nach Hyp.) d^2fx stetig; aber (nach 449)

$$d_x^2fx = \delta_1^2fx \cdot dx_1^2 + \delta_2^2fx \cdot dx_2^2 + \cdots + 2\delta_1\delta_2fx \cdot dx_1dx_2 + \cdots,$$

wo $\delta_1, \delta_2, \cdots$ die zu dem Vereine der Variabeln $x_1, x_2, \cdots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten find. Diefe Gleichung gilt für jede Werthreihe von $dx_1, dx_2, \cdots$, alfo namentlich, wenn man $dx_2, dx_3, \cdots$ null fetzt. Dann aber wird $d^2fx = \delta_1^2fx \cdot dx_1^2$, alfo ist δ_1^2fx stetig, aus gleichem Grunde δ_2^2fx u. f. w.; alfo lässt fich (nach 469) fx, als Funktion von $x_1, x_2, \cdots$ in einer ächten Reihe entwickeln, deren Glieder nach ganzen homogenen Funktionen von $x_1, x_2, \cdots$ fortschreiten, es fei

$$fx = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

diefe Reihe, wo

$$u_r = \sum a_{a,b,\ldots}x_1^a x_2^b \cdots (a + b + \cdots = r)$$

ist. Setzen wir hier

$$\sum a_{a,b,\ldots}[1|e_1]^a[1'|e_2]^b \cdots (a + b + \cdots = r) = a_r,$$

wo 1 eine durch x ausfüllbare Lücke bezeichnet, fo wird $u_r = a_rx^r$, und alfo

$$(*)\quad fx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots.$$

Setzen wir hier $x = yz$, wo z eine Zahl ist; fo wird

$$fx = f(yz) = a_0 + a_1y \cdot z + a_2y^2 \cdot z^2 \cdots = \sum a_ay^a \cdot z^a.$$

Alfo find (nach 460) die Differenzialquotienten diefer Reihe nach z gleichfalls ächte Reihen, und es wird alfo

$$\frac{d^n}{dz^n}f(yz) = \sum \frac{a!}{(a-n)!}a_ay^a \cdot z^{a-n}.$$

Aber (nach 440) ist $\frac{d}{dz}f(yz) = f'(yz)\frac{d}{dz}(yz) = f'x \cdot y$, und

ebenso $\frac{d^2}{dz^2} f(yz) = f''x \cdot y^2$ u. s. w., $\frac{d^n}{dz^n} f(yz) = f^{(n)}x \cdot y^n$. Also

$$f^{(n)}x \cdot y^n = \sum \frac{\alpha!}{(\alpha - n)!} a_\alpha y^\alpha \cdot z^{\alpha - n}.$$

Setzt man nun $z = 0$, so wird auch $x = yz = 0$, also

$$f^{(n)}0 \cdot y^n = n! a_n \cdot y^n,$$

da alle übrigen Glieder der rechten Seite verschwinden. Somit, da diese Gleichung für jeden Werth y gilt, so ist, wie aus 357 leicht hervorgeht,

$$f^{(n)}0 = n! a_n, \text{ also } a_n = \frac{f^{(n)}0}{n!},$$

was, in die obige Gleichung (*) eingeführt, die zu erweisende Formel liefert.

Kap. 4. Integralrechnung.

§. 1. Integration von Differenzialausdrücken.

471. Wenn ft eine reelle Zahlfunktion der reellen Zahl-Grösse t ist, und die abgeleitete Funktion f't zwischen $t = t_1$ und t_2 stetig und positiv ist, so wächst zwischen denselben Gränzen ft mit t; wenn dagegen f't stetig und negativ ist, so nimmt ft ab, während t wächst.

Beweis. Es ist (nach 439, indem man hier t statt x, und $z = 1$ setzt)

$$f(t + q) = ft + q(f't + N),$$

wo N mit q verschwindet, also

$$f(t + q) - ft = q(f't + N).$$

Da N mit q verschwindet, so muss für gehörig kleine Werthe von q auch $f't + N$ mit f't gleichbezeichnet sein; also wenn q und f't gleichbezeichnete Grössen sind, so wird dann $q(f't + N)$ positiv, also auch $f(t + q) > ft$ sein; d. h. ft wächst mit t, wenn aber q und f't ungleichbezeichnete Grössen sind, so wird $q(f't + N)$ negativ, also $f(t + q) < ft$, d. h. ft nimmt ab wenn t wächst.

472. Wenn die reelle Zahlfunktion ft der reellen Zahl-Grösse t für $t = t_1$ denselben Werth annimmt, wie für $t = t_2$, wo $t_2 > t_1$ ist und f't für jeden Werth t, der zwischen t_1

und t_2 liegt, stetig ist, so muss für irgend einen Werth t, der zwischen t_1 und t_2 liegt, $f't = 0$ sein.

Beweis. Wenn f't für jedes zwischen t_1 und t_2 liegende t von Null verschieden wäre, so müsste es fortdauernd positiv oder fortdauernd negativ sein. Denn wäre f't für einige Werthe positiv, für andere negativ, so müsste es mindestens einen Werth geben, wo f't aufhörte positiv zu sein und anfinge negativ zu werden oder umgekehrt; da aber f't (nach Hyp.) stetig ist, so müsste es bei diesem Werthe von t nothwendig null werden. Wenn aber f't dauernd positiv wäre, so würde (nach 471) $ft_2 > ft_1$ sein, was mit der Voraussetzung, dass $ft_1 = ft_2$ sei, streitet; es müsste also f't dauernd negativ sein; allein dann wäre $ft_1 < ft_2$ (nach 471), was gleichfalls mit der Voraussetzung streitet, also ist die Annahme, dass f'(t) für jedes zwischen t_1 und t_2 liegende t von Null verschieden sei, unmöglich, d. h. f't ist für irgend ein zwischen t_1 und t_2 liegendes t null.

473. Wenn ft eine reelle Zahlfunktion einer reellen Zahlgrösse t ist, und f't für jedes zwischen t_1 und t_2 liegende t stetig ist, so muss für irgend ein zwischen diesen Gränzen liegendes t

$$\frac{ft_2 - ft_1}{t_2 - t_1} = f't$$

sein.

Beweis. Die Funktion

$$\varphi t = ft - \frac{ft_2 - ft_1}{t_2 - t_1}(t - t_1)$$

nimmt für $t = t_1$ den Werth ft_1, für $t = t_2$ denselben Werth ft_1 an; da nun $\varphi' t = f't - (ft_2 - ft_1) : (t_2 - t_1)$ ist, so ist also auch $\varphi' t$ zwischen jenen Gränzen stetig, folglich giebt es (nach 472) einen zwischen denselben Gränzen liegenden Werth t, für welchen $\varphi' t = 0$, d. h.

$$f't = \frac{ft_2 - ft_1}{t_2 - t_1}$$

ist.

474. Wenn ft eine beliebige Funktion der reellen Zahlgrösse t ist, so ist, so lange $f't = 0$ ist, auch ft nothwendig konstant.

Beweis 1. ft sei eine reelle Zahlfunktion. Angenommen, es habe ft für zwei verschiedene Werthe t_1 und t_2 ungleiche Werthe, also $ft_1 \gtrless ft_2$, während doch f't zwischen t_1 und t_2 null sei, so hätte man (nach 473) für irgend ein zwischen t_1 und t_2 liegendes t, $f't = \frac{ft_2 - ft_1}{t_2 - t_1}$ also ungleich null, was mit der Voraussetzung streitet; also ist die Annahme, dass ft für irgend zwei Werthe, welche noch innerhalb der Gränzen liegen, zwischen welchen $f't = 0$ ist, ungleiche Werthe annehme, unmöglich, d. h. ft ist innerhalb dieser Gränzen konstant.

2. Wenn ft eine beliebige Funktion ist, und $e_1, e_2, \cdots$ ihre normalen Einheiten und $f_1t, f_2t, \cdots$ die zugehörigen Ableitzahlen sind, also

$$ft = e_1f_1t + e_2f_2t + \cdots$$

ist; so ist (nach 434)

$$dft = e_1df_1t + e_2df_2t + \cdots, \text{ d. h.}$$
$$f't = e_1f'_1t + e_2f'_2t + \cdots.$$

Da nun vorausgesetzt war, dass $f't = 0$ sei, so sind (nach 28)

$$f'_1t = f'_2t = \cdots = 0,$$

also (nach Bew. 1, da f_1t u. s. w. Zahlfunktionen sind) $f_1t, f_2t, \cdots$ konstant, also auch $e_1f_1t + e_2f_2t + \cdots$ konstant, d. h. ft konstant.

475. Wenn d_xfx innerhalb gewisser Gränzen, für jedes dx, null ist, so ist innerhalb derselben Gränzen fx konstant.

Beweis. Es seien $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten, und $x_1, x_2, \cdots$ die zugehörigen Ableitzahlen von x, also $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$, und seien die zu dem Vereine der Variabeln $x_1, x_2, \cdots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten nach $x_1, x_2, \cdots$ beziehlich mit $\delta_1, \delta_2, \cdots$ bezeichnet, so ist (nach 437)

$$d_xfx = \delta_1fx \cdot dx_1 + \delta_2fx \cdot dx_2 + \cdots.$$

Da nun d_xfx (nach Hypoth.) für jedes dx null ist, also auch wenn $dx_1 \gtrless 0$, $dx_2, dx_3, \cdots$ null sind, so hat man $\delta_1fx = 0$, also (nach 474) fx von x_1 unabhängig, und aus gleichem Grunde auch fx von $x_2, x_3, \cdots$ unabhängig, d. h. von x unabhängig, also konstant.

476. Wenn innerhalb gewisser Gränzen die Differenziale der Funktionen fx und φx fortdauernd gleich sind, und für irgend einen Werth x innerhalb jener Gränzen die Funktionen

selbst einander gleich sind, so findet diese Gleichheit auch für jeden andern zwischen jenen Gränzen liegenden Werth x statt.

Beweis. Es sei $Fx = fx - \varphi x$, so hat man $dFx = dfx - d\varphi x$, also dFx innerhalb jener Gränzen, für welche die Voraussetzung, dass $dfx = d\varphi x$ sei, statt fand, null; also (nach 475) innerhalb derselben Gränzen Fx konstant, d. h. $fx - \varphi x = \text{Konst.}$ Da nun für einen gewissen Werth von x, nach der Voraussetzung, $fx = \varphi x$ ist, so ist die obige Konstante null, also für jeden Werth x innerhalb jener Gränzen $fx - \varphi x = 0$, d. h. $fx = \varphi x$.

477. Erklärung. Wenn t eine positive Zahl ist und die Funktion ft zwischen $t = 0$ und $t = t_1$ stetig ist, so verstehe ich unter dem Integral von ftdt diejenige Funktion Ft, welche mit t null wird und deren nach t genommenes Differenzial für jedes t, welches zwischen jenen Gränzen liegt, gleich ftdt ist. Ich bezeichne dies Integral mit $d^{-1}ftdt$; d. h. es ist

$$d^{-1}ft \cdot dt = Ft,$$

wenn $d_t F(t) = ft \cdot dt$ und $F(0) = 0$ ist.

Anm. Die gewählte Bezeichnung gewährt vor der gewöhnlichen den Vorzug, dass sie nur als eine Erweiterung der für die Differenzialrechnung geltenden erscheint; eine neue Bezeichnung schien aber wünschenswerth, da der Begriff des Integrals, wie er oben aufgestellt ist, mit dem gewöhnlichen Begriffe desselben nicht deckend ist. Wenn wir bei der gewählten Bezeichnung festsetzen, dass das Differenzial, auf welches sich die Integration bezieht (hier dt) stets an den Schluss des zu integrirenden Ausdruckes gestellt werde, so können wir bei derselben die Klammer, welche eigentlich den zu integrirenden Ausdruck umschliessen müsste, entbehren. Eben so hat man nicht nöthig, die Grösse, nach welcher integrirt werden soll, dem Integrationszeichen beizufügen, da diese gleichfalls durch das an den Schluss gestellte Differenzial schon bezeichnet ist. Allein dann muss man festhalten, dass man dann nicht für dies Differenzial einen ihm gleichen Ausdruck, welcher ein anderes Differenzial enthält, setzen darf, wenn man nicht zuvor nachgewiesen hat, dass das Integral, wenn es sich auf dies neue Differenzial bezieht, denselben Werth beibehält. Die Aenderung in dem Begriffe des Integrals, wie sie die obige Definition zeigt, besteht darin, dass die Unbestimmtheit, welche das sogenannte allgemeine Integral vermöge der willkürlich hinzuzufügenden Konstanten erhält, aufgehoben ist, indem das Integral nach dem aufgestellten Begriffe stets zwischen zwei genau festgestellten Gränzen genommen

ist, indem nämlich als Anfangsgränze 0, als Endgränze der Werth der Variabeln selbst gesetzt ist. Das allgemeine Integral ist als für sich bestehende Grösse aus der Mathematik aus demselben Grunde gänzlich zu verbannen, wie alle andern mehrdeutigen Grössen und Grössenverknüpfungen, weil nämlich kein algebraisches Gesetz für solche mehrdeutigen Ausdrücke allgemeine Geltung behält. Es hat also nur das bestimmte Integral wissenschaftliche Berechtigung. Die gewählte Bezeichnung reicht aber aus, um jedes bestimmte Integral zu bezeichnen. Denn soll z. B. das Integral von fz·dz zwischen den Gränzen a und a + b genommen werden, so hat man nur z = a + t zu setzen und $d^{-1}f(a+t)dt$ zu nehmen und nach der Integration t = b zu setzen. Noch bemerke ich, dass die Stetigkeit der zu intergrirenden Funktion im Folgenden überall vorausgesetzt wird, auch wenn diese Bedingung nicht ausdrücklich hinzugefügt ist.

478. Zusatz. Es ist

$$d_t(d^{-1}ft\cdot dt) = ft\cdot dt, \text{ und } [d^{-1}ftdt](t=0) = 0.$$

479. Wenn f(0) = 0 ist, so ist für jedes t, was zwischen den Gränzen 0 und t′ liegt, zwischen welchen dft stetig ist,

$$d^{-1}dft = ft.$$

Beweis. Nach 478 ist, wenn alle Differenziale nach t genommen sind,

$$d(d^{-1}dft) = dft \text{ und } [d^{-1}dft](t=0) = 0;$$

also haben die beiden Funktionen $d^{-1}dft$ und ft die Eigenschaft, dass für jedes zwischen 0 und t′ liegende t ihre Differenziale gleich sind, und dass für t = 0 beide Funktionen einander gleich, nämlich gleich null werden; denn für $d^{-1}dft$ haben wir es so eben bewiesen, und für ft ist es (nach Hyp.) der Fall. Also sind (nach 476) beide Funktionen einander gleich.

480. Eine Summe integrirt man, indem man die Stücke integrirt, und ein Produkt, dessen einer Faktor konstant ist, integrirt man, indem man den variablen Faktor integrirt, und den konstanten unverändert lässt; oder beides zu einer allgemeineren Formel zusammengefasst,

$$d^{-1}\sum a_\alpha f_\alpha(t)dt = \sum a_\alpha d^{-1}f_\alpha(t)dt.$$

Beweis. Nach 478 wird die Funktion $d^{-1}f_\alpha(t)dt$ mit t null, also auch $a_\alpha d^{-1}f_\alpha(t)dt$, also auch die Summe dieser Ausdrücke; folglich ist (nach 479)

$$\sum a_\alpha d^{-1} f_\alpha(t)dt = d^{-1} d \sum a_\alpha d^{-1} f_\alpha(t)dt$$
$$= d^{-1} \sum a_\alpha d d^{-1} f_\alpha(t)dt \quad [432, 433]$$
$$= d^{-1} \sum a_\alpha f_\alpha(t)dt \quad [478].$$

481. Wenn ft stetig ist für jede zwischen den Gränzen 0 und t' liegende positive Zahlgrösse t, so ist für jedes solche t auch die Integration von ftdt ausführbar.

Beweis. Wenn ft eine reelle Zahlfunktion ist, so ist der Beweis bekannt (vergl. z. B. Moigno Calcul intégral p. 1 ss.). Wenn aber ft eine beliebige Grösse ist, und $e_1, e_2, \cdots$ ihre normalen Einheiten, $f_1t, f_2t, \cdots$ ihre Ableitzahlen sind, also $ft = e_1f_1t + e_2f_2t + \cdots$ ist, so ist (nach 480)

$$d^{-1}ftdt = e_1 d^{-1} f_1 t dt + e_2 d^{-2} f_2 t dt + \cdots.$$

Da nun (nach 413) $f_1t, f_2t, \cdots$ reell sind, so sind, wie eben gezeigt, die Integrationen $d^{-1}f_1tdt, d^{-1}f_2tdt, \cdots$ ausführbar, also auch die Integration $d^{-1}ftdt$.

482. Wenn die positive Zahlgrösse $t = \varphi u$ Funktion einer andern positiven Zahlgrösse u ist, und φu mit u zugleich null wird, so ist

$$d^{-1}ft \cdot dt = d^{-1}ft \cdot \varphi' u \cdot du.$$

Beweis. Es sei $d^{-1}ft \cdot dt = Ft$, d. h. $d_tFt = ftdt$ und $F(0) = 0$. Da nun $d_tFt = F't dt$ ist, so folgt aus der ersteren Gleichung $F't = ft$. Nun ist (nach 440)

$$d_uFt = F't \cdot d_u t = F't \cdot d_u \varphi u$$
$$= F't \cdot \varphi' u \cdot du \quad [440].$$

Ferner ist, wie oben gezeigt, $F't = ft$, und $Ft = F\varphi(u)$, also da φu mit u zugleich null wird, so wird Ft nicht bloss mit t, sondern auch mit u null; und wir erhalten also

$$d_uF\varphi(u) = ft \cdot \varphi' u \cdot du \text{ und}$$
$$F\varphi(0) = 0,$$

also ist (nach 477) $F\varphi u = d^{-1}ft \cdot \varphi' u \cdot du$; aber es war auch $F\varphi u = Ft = d^{-1}ftdt$, also

$$d^{-1}ftdt = d^{-1}ft \cdot \varphi' u \cdot du.$$

483. Erklärung. Wenn x eine beliebige Grösse ist, deren numerischer Werth t ist, und $x : t$ mit e bezeichnet wird (wo also der numerische Werth von e gleich 1 und $x = et$ ist), so setze ich

$$d^{-1}fxdx = d^{-1}f(et) \cdot edt,$$

wo e bei der Integration als konstant gesetzt und vorausgesetzt wird, dass f(et) in t stetig ist, und auch bleibt, wenn t bis null hin abnimmt. Wenn sich eine mit x verschwindende Funktion von x finden lässt, deren nach x genommenes Differenzial fxdx ist, so sagen wir, dass in diesem Falle fxdx allseitig integrirbar sei.

Anm. Wir werden späterhin zeigen, dass jedesmal, wenn es eine Funktion Fx von der Art giebt, dass $d_x Fx = fxdx$, und $F0 = 0$ sei, dann auch für jedes x jene Funktion $Fx = d^{-1}fxdx$ sei, wobei $d^{-1}fxdx$ in dem oben gegebenen Sinne aufzufassen ist. Dagegen wird sich zeigen, dass es nicht zu jedem fxdx eine Funktion Fx von der genannten Eigenschaft giebt, während auf der andern Seite $d^{-1}fxdx = d^{-1}f(et)\cdot edt$ (nach 481) stets gefunden werden kann. Es ist also $d^{-}fxdx$ in der Weise, wie wir es oben definirt haben, als das allgemeine stets mögliche Integral von fxdx aufzufassen, welches sich nur in speciellen Fällen als Funktion von x in der Art darstellen lässt, dass das nach x genommene Differenzial dieser Funktion gleich fxdx sei.

484. Statt eine Summe zu integriren, kann man die Stücke einzeln integriren, d. h.

$$d^{-1}(f_1x + f_2x + \cdots)dx = d^{-1}f_1xdx + d^{-1}f_2xdx + \cdots$$

oder

$$d^{-1}\sum f_\alpha x\,dx = \sum d^{-1}f_\alpha x\cdot dx.$$

Beweis. Es sei $x = et$, wo t eine positive Zahlgrösse und e numerisch gleich 1 ist, so ist

$$d^{-1}\sum f_\alpha x\,dx = d^{-1}\sum f_\alpha x\,edt \qquad [483]$$
$$= d^{-1}\sum f_\alpha x\cdot e\,dt \qquad [39]$$
$$= \sum d^{-1}f_\alpha x\cdot edt \qquad [480],$$

weil nämlich t eine positive Zahlgrösse ist,

$$= \sum d^{-1}f_\alpha x\cdot dx \qquad [483].$$

485. Statt ein Produkt zweier Faktoren, von denen der eine konstant ist, zu integriren, kann man den andern Faktor integriren, und den konstanten Faktor unverändert lassen, d. h.

$$d^{-1}afxdx = ad^{-1}fxdx,$$

wo fx im Allgemeinen einen Ausdruck mit zwei Lücken darstellt, von denen die eine durch a, die andere durch dx ausgefüllt werden soll. Bezeichnen wir die erstere Lücke durch l, die letztere durch l_1, und schreiben statt a und dx beziehlich $\frac{a}{l}$ und $\frac{dx}{l_1}$, um dadurch symbolisch auszudrücken, dass a

in die Lücke l, und dx in die Lücke l_1 eintreten soll, so können wir die obige Formel bezeichnender schreiben

$$d^{-1}\frac{a}{l}fx\cdot\frac{dx}{l_1}=\frac{a}{l}d^{-1}fx\cdot\frac{dx}{l_1}.$$

Beweis. Setzen wir $x=et$ (in dem Sinne von 483), so ist

$$\begin{aligned}\frac{a}{l}d^{-1}fx\cdot\frac{dx}{l_1}&=\frac{a}{l}d^{-1}f(et)\cdot\frac{e}{l_1}dt && [483]\\ &=d^{-1}d\left[\frac{a}{l}d^{-1}f(et)\frac{e}{l_1}dt\right] && [479]\\ &=d^{-1}\frac{a}{l}dd^{-1}f(et)\frac{e}{l_1}dt && [433, 431\,c]\\ &=d^{-1}\frac{a}{l}f(et)\frac{e}{l_1}dt && [478]\\ &=d^{-1}\frac{a}{l}fx\cdot\frac{dx}{l_1} && [483].\end{aligned}$$

Anm. Es versteht sich von selbst, dass, wenn eine der Grössen a oder x (also auch dx) eine Zahlgrösse ist, die zugehörige Lücke wegfällt und daher die Unterscheidung der Lücken überflüssig wird; ebenso wenn die beiden Lücken vertauschbar sind, d. h. wenn stets dasselbe Resultat hervorgeht, sobald von zwei beliebigen Grössen (hier a und dx) die eine in die erste, die andere in die zweite Lücke eintritt, oder umgekehrt jene in die zweite, diese in die erste. Noch bemerke ich nachträglich, dass in dem ganzen vorhergehenden Abschnitte überall, wo von einem Lückenausdrucke mit n Lücken die Rede ist, ohne dass eine nähere Bestimmung hinzugefügt ist, stets die n Lücken als vertauschbar gesetzt sind.

486. Es ist fxdx dann und nur dann allseitig integrirbar, wenn die abgeleitete Funktion f'x entweder ein lückenloser Ausdruck (d. h. x eine reelle Zahlgrösse) oder ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken ist, nämlich so, dass es für das Resultat gleichgültig ist, in welcher Vertheilung zwei Grössen in die beiden Lücken eintreten. Wenn diese Bedingung erfüllt ist und Fx die mit x verschwindende Funktion von x ist, deren nach x genommenes Differenzial fxdx ist, so ist allemal

$$Fx=d^{-1}fxdx.$$

Beweis 1. Wenn es eine mit x verschwindende Funktion Fx giebt, so dass $d_xFx=fxdx$ ist, so ist $F'x=fx$ (nach

435), alſo $F''x = f'x$ (nach 450). Aber $F''x$ iſt (nach 451) ein Ausdruck mit zwei vertauſchbaren Lücken, alſo auch das ihm gleiche $f'x$. Wenn die Lücken von nullter Stufe ſind (d. h. x eine Zahlgrösse iſt), ſo können die Lücken weggelaſſen werden, und wird dann $f'x$ ein lückenloſer Ausdruck.

2. Es ſei $x = yt$, wo y numeriſch gleich 1 und t eine poſitive Zahl iſt und ſei vorausgeſetzt, daſs $f'x$ ein Ausdruck mit zwei vertauſchbaren Lücken ſei, ſo hat man (nach 483) $d^{-1}fxdx = d^{-1}f(yt)ydt$, wo bei der Integration y als konſtant betrachtet wird. Es ſei dies Integral gleich $F(y, t)$ geſetzt, d. h. es ſei $d_tF(y, t) = f(yt)\cdot ydt$, und $F(y, 0) = 0$, ſo beweiſe ich, daſs $d_xF(y, t) = fxdx$ ſei. Da y und t von einander unabhängig ſind, ſo iſt, wenn d_y und d_t die auf den Verein dieſer beiden Variabeln bezüglichen Differenziale ſind, (nach 437)

$$d_xF(y, t) = d_yF(y, t) + d_tF(y, t) = d_yF(y, t) + f(yt)\cdot ydt.$$

Ferner iſt (nach 446)

$$\begin{aligned} d_t[d_yF(y, t)] = d_y[d_tF(y, t)] &= d_y[f(yt)\cdot ydt] \\ &= f'(yt)\cdot tdy\cdot ydt + f(yt)dydt \quad [433] \\ &= d_tf(yt)\cdot tdy + f(yt)dtdy \quad [440] \\ &= d_t[f(yt)\cdot tdy] \quad [433]. \end{aligned}$$

Da nun, wie oben gezeigt, $F(y, 0) = 0$ iſt für jedes y, ſo iſt auch $d_yF(y, 0)$ gleich null, ebenſo wird $f(yt)\cdot tdy$ mit t null, alſo iſt (nach 479)

$$d_yF(y, t) = f(yt)\cdot tdy.$$

Indem wir nun dieſen Werth in den oben für $d_xF(y, t)$ gefundenen Ausdruck einführen, erhalten wir

$$\begin{aligned} d_xF(y, t) &= f(yt)\cdot tdy + f(yt)\cdot ydt \\ &= f(yt)\cdot d(yt) = fx\cdot dx. \end{aligned}$$

Hier ſind y und t Funktionen von x (nämlich $t = \sqrt{x^2}$, $y = x : \sqrt{x^2}$), alſo iſt $F(y, t)$ auch als Funktion von x zu faſſen und ſei als ſolche mit Fx bezeichnet; ſo haben wir alſo in jedem Falle, wo $f'x$ ein Ausdruck mit zwei vertauſchbaren Lücken iſt (wohin auch der Fall gerechnet werden kann, wo $f'x$ ein lückenloſer Ausdruck iſt), eine mit $x = yt$ verſchwindende Funktion Fx gefunden, deren nach x genommenes Differenzial gleich $fx\cdot dx$ iſt; und zwar war dieſe Funktion gleich $d^{-1}fx\cdot dx$.

3. Ausser der Funktion $Fx = d^{-1}fxdx$ kann es keine andere Funktion φx geben, deren nach x genommenes Differensial in demselben Umfange, wie das von Fx, gleich fxdx ist, und welche mit x verschwindet; denn wenn $d_x Fx = d_x \varphi x$ und für irgend einen Werth (hier für $x = 0$) $Fx = \varphi x$ ist, so findet (nach 476) diese Gleichheit allgemein statt. Folglich, so bald $d_x Fx = fxdx$ und $F(0) = 0$ ist, muss auch $Fx = d^{-1}fxdx$ sein.

487. Wenn x aus seinen normalen Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ durch die Zahlen $x_1, x_2, \cdots$ ableitbar, also $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$ ist, und wenn zugleich $fxdx = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \cdots$ ist, wo $A_1, A_2, \cdots$ Funktionen von $x_1, x_2, \cdots$ sind: so ist die Bedingung (allseitiger Integrirbarkeit), dass f'x ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken sei, identisch der Bedingung, dass für je zwei Indices r und s

$$\delta_r A_s = \delta_s A_r$$

sei, wo $\delta_1, \delta_2, \cdots$ die zu dem Vereine der Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten nach $dx_1, dx_2, \cdots$ bezeichnen.

Beweis. Statt $A_1 dx_1 + A dx_2 + \cdots$ können wir, da (nach 142) $[e_r|e_r] = 1$, und $[e_r|e_s] = 0$ ist, wenn $r \gtrless s$ ist, schreiben $(A_1[l|e_1] + A_2[l|e_2] + \cdots)dx$. Also da, für jedes dx, $fxdx = (A_1[l|e_1] + A_2[l|e_2] + \cdots)dx$ ist, so ist (nach 357)

$$fx = A_1[l|e_1] + A_2[l|e_2] + \cdots = \sum A_a[l|e_a].$$

Nun ist (nach 437)

$$d_x fx = \sum \delta_b fx \cdot dx_b = \sum \delta_b A_a [l|e_a] dx_b$$

$$f'xdx = \sum \delta_b A_a [l|e_a][l_1|e_b] \frac{dx}{l_1},$$

wo l_1 eine Lücke ist, in welche dx eintreten soll. Somit wird (nach 357)

$$f'x = \sum \delta_b A_a [l|e_a][l_1|e_b].$$

Sind nun l und l_1 vertauschbare Lücken, so hat man für je zwei Zeiger r und s

$$\sum \delta_b A_a [e_s|e_a][e_r|e_b] = \sum \delta_b A_a [e_r|e_a][e_s|e_b].$$

Da aber $[e_r|e_s]$ null ist für je zwei verschiedene Zeiger r und s, und gleich 1 ist, für je zwei gleiche, so erhält man

$$\delta_x A_s = \delta_s A_x,$$

und ebenso geht umgekehrt aus diesen letzteren Gleichungen die vorletzte, welche die Vertauschbarkeit der Lücken aussagt, hervor.

488. Wenn fx innerhalb gewisser Gränzen, in denen auch $x = 0$ und $x = a$ liegt, stetig ist, und

$$F(x) = d^{-1}fxdx$$

ist, so ist auch, wenn $x = a + y$ ist,

$$F(a + y) - Fa = d^{-1}f(a + y)dy.$$

Beweis. Wenn $F(x) = d^{-1}f(x)dx$ ist, so ist $d_xFx = fx \cdot dx$, d. h. $F'x = fx$; also $d_y[F(a + y) - Fa] = F'(a + y)dy$ [nach 440] $= f(a + y)dy$. Ferner ist $F(a + y) - Fa$ für $y = 0$ gleichfalls null, also (nach 487) $F(a + y) - Fa = d^{-1}f(a + y)dy$.

489. Es ist, wenn a einen Ausdruck mit n Lücken l und einer Lücke l_1 bezeichnet,

$$d^{-1}a\left(\frac{x}{l}\right)^n\frac{dx}{l_1} = \frac{1}{n+1}ax^{n+1}.$$

Beweis. Es sei $x = et$, wo t der numerische Werth von x, und e numerisch gleich 1 ist, so ist

$$d^{-1}a\left(\frac{x}{l}\right)^n\frac{dx}{l_1} = d^{-1}a\left(\frac{e}{l}\right)^n\frac{e}{l_1}t^n dt.$$

Es sei ae^{n+1}, was wir, da in die Lücken l und l_1 in dem Ausdrucke $a\left(\frac{e}{l}\right)^n\frac{e}{l_1}$ dieselbe Grösse e eintritt, statt dieses Ausdruckes setzen können, mit b bezeichnet, so erhalten wir

$$d^{-1}a\left(\frac{x}{l}\right)^n\frac{dx}{l_1} = d^{-1}bt^n dt = \frac{1}{n+1}bt^{n+1},$$

da der letzte Ausdruck mit t verschwindet und nach t differenziirt $bt^n dt$ liefert, also

$$= \frac{1}{n+1}ae^{n+1}l^{n+1} = \frac{1}{n+1}ax^{n+1}.$$

490. Wenn die Reihe $\sum a_\alpha\left(\frac{x}{l}\right)^\alpha\frac{dx}{l_1}$, in welcher a_α einen Ausdruck mit α Lücken l und einer Lücke l_1 darstellt, eine ächte ist, so ist

$$d^{-1}\sum a_\alpha\left(\frac{x}{l}\right)^\alpha\frac{dx}{l_1} = \sum\frac{a_\alpha}{\alpha+1}x^{\alpha+1}.$$

Beweis. Man hat (nach 484)

$$d^{-1}\sum a_a\left(\frac{x}{l}\right)^a\frac{dx}{l_1}=\sum d^{-1}a_a\left(\frac{x}{l}\right)^a\frac{dx}{l_1}$$

$$=\sum\frac{a_a}{a+1}x^{a+1}\quad\text{(nach 489).}$$

Anm. Durch diese Formel, welche nur dann das allseitige Integral darstellt, wenn die Bedingung allseitiger Integrirbarkeit (486) erfüllt wird, ist die Aufgabe der Integration von Differenzialausdrücken allgemein gelöst. Da es uns hier nur auf die Darstellung der Integralrechnung in ihren wesentlichsten Zügen ankommt, so können wir mit dieser Lösung der Aufgabe uns hier begnügen.

§. 2. Integration von Differenzialgleichungen, wenn die unabhängige Variable eine Zahlgrösse ist.

491. Erklärung. Einen gegebenen Verein von Differenzialgleichungen (der aber auch aus einer einzigen Gleichung bestehen kann) vollständig integriren, heisst die sämmtlichen Vereine von Gleichungen finden, welche keine Differenziale mehr enthalten, und von denen jeder Verein die Eigenschaft hat, dass, wenn er erfüllt ist, auch der gegebene Verein erfüllt sei; jeder solche Verein heisst ein (den gegebenen Verein) integrirender Verein. Wenn also A ein Verein von Differenzialgleichungen und B ein ihn integrirender Verein ist, so heisst das 1) B enthält keine Differenziale mehr und 2) sobald die Gleichungen des Vereins B als richtig vorausgesetzt sind, so lassen sich daraus die Gleichungen des Vereines A als richtig nachweisen.

Anm. Es soll in diesem §. vorausgesetzt werden, dass, wenn alle Variabeln als veränderliche Zahlgrössen aufgefasst werden, von einer derselben (t) alle übrigen ($x_1, \cdots x_n$) abhängen. Soll diese Abhängigkeit durch die gegebenen Differenzialgleichungen so genau bestimmt werden, als dies überhaupt durch Differenzialgleichungen möglich ist, so müssen so viel (n) von einander unabhängige Differenzialgleichungen gegeben sein, als es abhängige Variabeln giebt. Ist t die unabhängige (variable) Zahlgrösse und sind $x_1, \cdots x_n$ die abhängigen Zahlgrössen, so können wir ein System von n Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ annehmen und $x_1e_1+\cdots+x_ne_n=x$ setzen. Da t als die unabhängige Variable angenommen ist, so werden alle in den gegebenen Differenzialgleichungen vorkommenden Differenzialquotienten

nach t genommen ſein müſſen. Wenn dieſe Differenzialquotienten bis zur m-ten Ordnung aufſteigen, ſo wird jede der n Gleichungen die Form haben, dass eine Zahlfunktion von t, x und den Differenzialquotienten von x bis zur m-ten Ordnung hin gleich 0 geſetzt ist. Sind nun $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \cdots f_n = 0$ dieſe n Gleichungen, ſo ſetze man $e_1 f_1 + \cdots e_n f_n = f$, ſo haben wir eine Gleichung

$$f\left(t, x, \frac{d}{dt}x, \cdots \frac{d^m}{dt^m}x\right) = 0$$

aufzulöſen, in welcher t eine Zahlgrösse ist, hingegen x und die Funktion f aus n Einheiten numerisch ableitbar ſind. Die Löſung dieſer Gleichung bildet alſo den Gegenstand dieſes §. Zunächst behandeln wir die Differenzialgleichungen erster Ordnung, d. h. den Fall, wo $m = 1$ ist.

492. **Aufgabe.** Die Gleichung $f(t, x, \delta x) = 0$, in welcher t eine Zahlgrösse, x und $f(t, x, \delta x)$ Grössen ſind, die aus n Einheiten ableitbar ſind, und δx das Differenzial von x nach t bezeichnet, zu integriren; wobei vorausgeſetzt wird, dass ſich $f(t, x, \delta x)$ nicht aus weniger als n Einheiten ableiten lasse.

Auflöſung. Es ſeien $e_1, \cdots e_n$ die Einheiten, aus denen $x = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$ und $f = e_1 f_1 + \cdots e_n f_n$ numerisch abgeleitet ſind. Es wird vorausgeſetzt, dass die Gleichungen $f_1 = 0, \cdots f_n = 0$, welche in $f = 0$ enthalten ſind, nicht von einander abhängig ſind, d. h. dass keine derſelben aus den übrigen ſich mit Nothwendigkeit ergebe. Denn dann würde ſich in der Gleichung $f = 0$, f aus weniger als n Einheiten numerisch ableiten lassen, was oben ausgeschlossen wurde. Es ſind hier $f_1, \cdots f_n$ Funktionen der Zahlgrössen, $t, x_1, \cdots x_n, \delta x_1, \cdots \delta x_n$. Man bestimme aus einer der Gleichungen $f_1, \cdots f_n$ eine der Unbekannten $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ und ſetze den gefundenen Werth in die übrigen Gleichungen ein, mit den ſo erhaltenen, und überhaupt mit den jedesmal noch übrig bleibenden Gleichungen, ſo fern ſie noch eine der Variabeln $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ enthalten, verfahre man ebenſo, ſo erhält man zuletzt entweder aus der zuletzt übrig bleibenden Gleichung den Werth der letzten jener Unbekannten, und dadurch dann nach und nach alle jene Unbekannten $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ als Funktionen von $t, x_1, \cdots x_n$, d. h. δx als Funktion von t und x, oder es ſind aus der letzten oder auch ſchon aus den letzten

m Gleichungen die sämmtlichen Grössen $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ verschwunden. In diesem Falle bleiben m Gleichungen übrig, welche nur Beziehungen zwischen t, $x_1, \cdots x_n$ ausdrücken, und zwar müssen diese Gleichungen alle von einander unabhängig sein, weil im entgegengesetzten Falle auch die n ursprünglichen Gleichungen von einander abhängig wären. Diese m Gleichungen bilden dann einen Theil der gesuchten Integralgleichungen. Durch sie kann man m der Werthe t, $x_1, \cdots x_n$ durch die übrigen $n - m + 1$ ausdrücken, und dadurch reduciren sich die $n - m$ ersten Differenzialgleichungen (vermittelst welcher man $n - m$ der Unbekannten $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ ausdrückte) auf $n - m$ Gleichungen, in welchen ausser t nur $n - m$ der Grössen $x_1, \cdots x_n$ und die entsprechenden $n - m$ der Grössen $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ vorkommen; und durch welche sich diese letzteren als Funktionen der ersteren darstellen lassen. Somit kommt es nur auf die Integration der Gleichungen von der Form $\delta x = f(t, x)$, d. h. $dx = f(t, x)dt$ an. Diese Integration soll in den nächstfolgenden Nummern behandelt werden.

493. Wenn

$$dx = f(t)dt$$

ist, wo t eine Zahlgrösse und x eine aus einem Systeme von n Einheiten ableitbare Grösse ist, so ist

$$x = d^{-1}f(t)dt + c,$$

wo c eine (aus n Einheiten ableitbare) willkürliche Konstante ist.

Beweis. Es sei $d^{-1}f(t)dt$ gleich y gesetzt, so ist (nach 478) $dy = f(t)dt$, also $dx - dy = 0$, d. h. (nach 484) $d(x - y) = 0$, also (nach 475) $x - y$ konstant. Diese Konstante, welche mit x von gleicher Gattung, also aus n Einheiten ableitbar ist, sei c, so hat man $x = y + c = d^{-1}f(t)dt + c$.

494. Wenn

(a) $\delta x = f(x, t)$

ist, und man überall mit δ den allgemeinen Differenzialquotienten nach t (auch x als von t abhängig gedacht), hingegen unter $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dt}$ die partiellen Differenzialquotienten in Bezug auf den Verein der Variabeln x, t, von denen die erste eine

extenſive Größe, die letztere eine Zahlgröſse darſtellt, bezeichnet: ſo iſt

$$\text{(b)}\quad \begin{cases} \delta^2 x = \frac{d}{dt} f + f\frac{d}{dx} f \\ \delta^3 x = \frac{d}{dt}(\delta^2 x) + f\frac{d}{dx}(\delta^2 x) \text{ u. ſ. w.} \\ \delta^{r+1} x = \frac{d}{dt}(\delta^r x) + f\frac{d}{dx}(\delta^r x), \end{cases}$$

und wenn man

$$\delta^{r+1} x = f_r(x, t)$$

ſetzt, ſo iſt

$$\text{(c)}\quad x = c + f(c, 0)\cdot t + f_1(c, 0)\frac{t^2}{2} + f_2(c, 0)\frac{t^3}{3!} + \cdots,$$

wo c eine willkürliche Konſtante iſt, nämlich der Werth, den x annimmt, wenn t null wird, und wo vorausgeſetzt wird, daſs die Reihe auf der rechten Seite eine ächte ſei. Aus der Gleichung (d) findet man auch c als Funktion von x und t, nämlich:

$$\text{(d)}\quad c = x - f(x, t)t + f_1(x, t)\frac{t^2}{2} - f_2(x, t)\frac{t^3}{3!} + \cdots.$$

Beweis. Die Formeln (b) ergeben ſich unmittelbar aus (a), indem, wenn φ eine beliebige Funktion von x und t iſt, und x als von t abhängig gedacht wird, $d\varphi = \frac{d}{dx}\varphi \cdot dx + \frac{d}{dt}\varphi \cdot dt$, alſo $\frac{d\varphi}{dt}$, d. h. $\delta\varphi = \frac{d}{dx}\varphi \cdot \delta x + \frac{d}{dt}\varphi$ iſt; es iſt aber nach (a) $\delta x = f$, alſo erhält man $\delta\varphi = f\frac{d}{dx}\varphi + \frac{d}{dt}\varphi$, woraus die Formeln (b) hervorgehen, indem man ſtatt φ nach und nach δx, $\delta^2 x, \cdots \delta^r x$ ſetzt. Dann aber ergiebt ſich die Formel (c) unmittelbar aus dem Taylor'ſchen (Maclaurin'ſchen) Satze (470). Setzen wir $x = F(t)$, ſo können wir den Taylor'ſchen Satz auch in der Form darſtellen

$$F(t + \tau) = x + f(x, t)\tau + f_1(x, t)\frac{\tau^2}{2!} + \cdots,$$

oder, wenn wir $\tau = -t$ ſetzen,

$$F(0) = x + f(x, t)t + f_1(x, t)\frac{t^2}{2!} + f_2(x, t)\frac{t^3}{3!} + \cdots,$$

$F(0)$ ist aber der Werth von $x = F(t)$ für $t = 0$, d. h. $F(0)$ ist gleich c, somit auch Gleichung (d) bewiesen.

Anm. Es versteht sich von selbst, dass die willkürliche Konstante c mit x von gleicher Gattung ist, und also n numerische Konstanten einschliesst, wenn x aus einem Systeme von n Einheiten ableitbar ist. Die Integrationsgleichung in der Form (d) ist von besonderem Interesse, in so fern in ihr eine Funktion von x und t einer Konstanten gleich gesetzt ist, und zwar derjenigen Konstanten, welcher x gleich wird, wenn $t = 0$ wird, worauf wir im folgenden §. zurückkommen werden. Wir haben oben die Differenzialquotienten $\delta^2 x$, $\delta^3 x$, ... fortschreitend jeden aus dem nächstvorhergehenden abgeleitet. Es ist von Interesse, auch eine unmittelbare Darstellung dieser Differenzialquotienten als Funktionen von x und t zu versuchen; was in dem folgenden Satze geschehen ist, dessen sich leicht ergebenden aber etwas umständlichen Beweis ich dem Leser überlasse.

495. Wenn in dem Sinne von 494

$$\delta x = f(x, t)$$

ist, so ist

$$\delta^{r+f} x = \sum a_{a,a,b,b,\ldots} f^f \cdot \frac{d^{a+a}}{dt^a dx^a} f \cdot \frac{d^{b+b}}{dt^b dx^b} f \cdot \ldots,$$

wo sich die Summe auf alle möglichen ganzen, aber nicht negativen Werthe a, a, b, b, ... f bezieht, welche den Bedingungen unterworfen sind, dass $f = 1 + (a-1) + (b-1) + \cdots$, dass ferner $a + a + b + b + \cdots = r$, und die Summen $a + a$, $b + b$, ... alle grösser als null seien, und wo

$$a_{a,a,b,b,\ldots} = \frac{a(a+b-1)(a+b+c-2)\cdots}{(r-a)(r-a-b-1)(r-a-b-c-2)\cdots} \cdot \frac{n!}{a!\,a!\,b!\,b!\cdots}$$

ist.

496. Aufgabe. Die Gleichung

$$f(\delta^m x, \delta^{m-1} x, \ldots \delta^0 x, t) = 0,$$

wo x sowohl als f aus einem Systeme von n Einheiten ableitbar sind, t eine Zahlgrösse darstellt, δ der allgemeine Differenzialquotient nach t (x als von t abhängig gedacht) bezeichnet, und $\delta^0 x$ statt x geschrieben ist, zu integriren.

Auflösung. Man setze $\delta^0 x = p_0$, $\delta x = p_1, \cdots \delta^{m-1} x = p_{m-1}$, so wird $\delta^m x = \delta p_{m-1}$ und man hat die m Gleichungen:

$$\delta p_0 = p_1$$
$$\delta p_1 = p_2$$
$$\vdots$$
$$\delta p_{m-2} = p_{m-1}$$

und die Gleichung $f(\delta p_{m-1}, p_{m-1}, \cdots p_1, p_0, t) = 0$. Aus der letzten Gleichung bestimme man δp_{m-1}, es sei

$$\delta p_{m-1} = \varphi(p_0, p_1, \cdots p_{m-1}, t).$$

Nun nehme man ausser den n Einheiten $e_1, \cdots e_n$, aus denen x abgeleitet ist, noch m neue Einheiten $e^{(0)}, e^{(1)}, \cdots e^{(m-1)}$ an und multiplicire die obigen m Gleichungen beziehlich mit $e^{(0)}, e^{(1)}, \cdots e^{(m-1)}$ und addire. Man setze ferner

$$p_0 e^{(0)} + p_1 e^{(1)} + \cdots + p_{m-1} e^{(m-1)} = p$$

und

$$p_1 e^{(0)} + p_2 e^{(1)} + \cdots + p_{m-1} e^{(m-2)} + e^{(m-1)} \varphi(p_0, p_1, \cdots p_{m-1}, t) = F(p, t),$$

so sind p und F aus den nm Einheiten $e^{(r)} e_s$ (wo r jeden der m Werthe 0 bis m — 1, und s jeden der n Werthe 1 bis n annehmen kann) ableitbar, und man erhält die Gleichung

$$\delta p = F(p, t).$$

Diese Gleichung ist nach der Methode von 496 zu integriren und liefert eine aus nm Einheiten $(e^{(r)} e_s)$ ableitbare willkürliche Konstante.

Anm. Hierdurch ist die für diesen §. vorgesteckte Aufgabe durch Anwendung unendlicher Reihen ganz allgemein gelöst, denn auch die sogenannten besonderen Auflösungen sind, wie dies schon die Allgemeinheit der angewandten Beweismethode zu erkennen giebt, in der oben mitgetheilten allgemeinen Auflösungsmethode vollständig mit eingeschlossen. Da jedoch diejenigen Differenzialgleichungen, welche in Bezug auf die abhängige Variable (x) und deren Differenziale von erstem Grade sind, und welche die unabhängige numerische Variable (t) nur in Gliedern enthalten, in denen jene Variable und deren Differenziale nicht vorkommen, durch Gleichungen von endlicher Form integrirbar sind, so will ich diesen Fall hier noch behandeln.

498. Die Gleichung

$$(a) \quad \delta x + Ax = 0,$$

in welcher δ und x die Bedeutung der vorigen Nummern haben, A aber einen Bruch mit n Nennern (377 ff.) darstellt, wird, wenn $m_1, \cdots m_n$, die wir alle von einander verschieden

vorausfetzen, die n Hauptzahlen des Bruches A, und $a_1, \cdots a_n$ die zugehörigen Hauptgebiete erster Stufe (388, 389) find, integrirt durch die Gleichung

$$(b) \quad x = \sum \alpha_a a_a e^{-m_a t},$$

wo e die Bafis des natürlichen Logarithmenfystems ist, und $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ willkürliche konstante Zahlen bezeichnen, und die Summe fich auf $a = 1$ bis n bezieht. Die n Werthe $m = m_1, \cdots m_n$ find durch die Gleichung n-ten Grades

$$(c) \quad [(A - m)^n] = 0$$

bestimmt und die n Grössen $a_1, \cdots a_n$ durch die Gleichung

$$(d) \quad a_r \equiv [(A - m_r)^{n-1}].$$

Beweis. Dass die n Hauptzahlen $m = m_1, m_2, \cdots m_n$ die n Wurzeln der Gleichung (c) und die n zugehörigen Hauptgebiete $a_1, \cdots a_n$ durch die Gleichung (d) bestimmt find, folgt fogleich aus 388 und 389, womit noch die Anmerkung zu 383 zu vergleichen ist. Die Hauptgebiete $a_1, \cdots a_n$ haben (nach 389) die Eigenschaft, dass fie in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen und $Aa_r = m_r a_r$ ist. Es muss fich alfo x aus $a_1, \cdots a_n$ numerisch ableiten lassen. Es fei

$$(*) \quad x = \sum x_a a_a$$

der Ausdruck diefer Ableitung, fo verwandelt fich die Gleichung (a) in

$$0 = \sum a_a \delta x_a + \sum A a_a \cdot x_a,$$

alfo da $Aa_r = m_r a_r$ ist, fo erhalten wir

$$0 = \sum a_a (\delta x_a + m_a x_a).$$

Da hier $\delta x_a + m_a x_a$ eine Zahlgrösse ist, und $a_1, \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo hat man (nach 28) $\delta x_a + m_a x_a = 0$, d. h. $dx_a = -m_a x_a dt$, alfo

$$x_a = \alpha_a e^{-m_a t},$$

wo α_a eine willkürliche konstante Zahl ist. Setzen wir diefen Werth in die obige Gleichung (*) ein, fo erhalten wir

$$x = \sum \alpha_a e^{-m_a t} \cdot a_a.$$

Anm. Es find hier die Hauptzahlen des Bruches A als verschieden von einander vorausgefetzt. Sind einige derfelben gleich, fo gelangt man leicht zu dem Refultate, wenn man in bekannter Weife diejenigen unter ihnen, welche gleich werden follen, zunächst als unendlich wenig von einander verschieden fetzt, dann x nach dem

obigen Satze entwickelt, und endlich, nachdem man die unendlich kleinen Differenzen aus den Nennern weggeschafft hat, diese Differenzen ganz verschwinden lässt. Ob Wurzeln imaginär werden oder nicht, ist für die ganze Behandlung gleichgültig; auch kann man die imaginären Formen der Endresultate leicht in reelle Formen umsetzen.

499. Wenn

$$(a)\quad \delta x + Ax = f(t)$$

ist, wo δ, x, A, t die Bedeutung wie in 498 haben, so wird die obige Gleichung, wenn man auch den Grössen $m_1, \cdots m_n$, $a_1, \cdots a_n$ dieselbe Bedeutung giebt, wie dort, und

$$(b)\quad f(t) = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots a_n f_n$$

ist, und $d^{-1} f_r e^{m_r t} dt = y_r$ gesetzt wird, integrirt durch die Gleichung

$$(c)\quad x = \sum (y_\alpha + \alpha_\alpha) e^{-m_\alpha t} a_\alpha,$$

in welcher $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ willkürliche Konstanten sind.

Beweis. Da $a_1, \cdots a_n$ (nach 389) in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so lassen sich sowohl f (wie oben geschehen), als auch x aus ihnen numerisch ableiten. Es sei

$$*\quad x = \sum a_\alpha x_\alpha,$$

so hat man, da (nach 389) $Aa_\alpha = m_\alpha a_\alpha$ ist, aus der Gleichung (a)

$$0 = \sum a_\alpha (\delta x_\alpha + m_\alpha x_\alpha - f_\alpha),$$

also (nach 28) $\delta x_\alpha + m_\alpha x_\alpha - f_\alpha = 0$, wo alle Grössen Zahlgrössen sind, d. h. $dx_\alpha + m_\alpha x_\alpha dt = f_\alpha dt$. Setzt man hier $x_\alpha = (y_\alpha + \alpha_\alpha) e^{-m_\alpha t}$, wo y_α eine Funktion von t ist, die mit t verschwindet, und α_α konstant ist, so erhält man, indem man dies in die vorige Gleichung einsetzt, $dy_\alpha = f_\alpha e^{-m_\alpha t} dt$, also (nach 477) $y_\alpha = d^{-1} f_\alpha e^{-m_\alpha t} dt$, wie oben. Setzt man dann statt x_α den gefundenen Werth in die Gleichung * ein, so erhält man die zu erweisende Gleichung.

Anm. Die Integration einer Gleichung, welche Differenzialquotienten höherer Ordnung nach t enthält, im Uebrigen aber die Form der Gleichungen 498 und 499 hat, reducirt sich nach der Methode in 497 auf Gleichungen, welche ganz diese Form der Gleichungen 498 und 499 haben, nur dass statt der n Einheiten $e_1, \cdots e_n$ hier, wenn die Differenzialgleichung von m-ter Ordnung ist, mn Einheiten hervortreten.

§. 3. Integration von Differenzialgleichungen, wenn die unabhängige Variable eine extensive Grösse ist.

500. Die Integration jeder beliebigen partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung lässt sich zurückführen auf die Integration einer Differenzialgleichung der Form $Xdx = 0$, in welcher x eine extensive Grösse, Xdx eine Zahlgrösse darstellt.

Beweis. Wenn $x_1, \cdots x_n$ die unabhängigen Variabeln und x_0 die von ihnen abhängige Variable ist, und $x_0, x_1, \cdots x_n$ Zahlgrössen sind, so wird jede partielle Differenzialgleichung erster Ordnung zwischen diesen Grössen sich in Form einer Gleichung darstellen lassen, welche zwischen den Grössen $x_0, x_1, \cdots x_n, \frac{d}{dx_1}x_0, \frac{d}{dx_2}x_0, \cdots \frac{d}{dx_n}x_0$ stattfindet. Bezeichnen wir die Grössen $\frac{d}{dx_1}x_0, \cdots \frac{d}{dx_n}x_0$ mit $p_1, \cdots p_n$, so können wir vermittelst jener Gleichung eine der Grössen $p_1, \cdots p_n$, z. B. p_n, als Funktion der sämmtlichen Grössen $x_0, \cdots x_n$, $p_1, \cdots p_{n-1}$ darstellen, und also der zu integrirenden partiellen Differenzialgleichung die Form geben

$$(*)\quad p_n = f(x_0, x_1, \cdots x_n, p_1, p_2, \cdots p_{n-1}) = f.$$

Nun ist $dx_0 = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \cdots p_ndx_n$. Und umgekehrt, wenn diese Gleichung erfüllt ist, so sind $p_1, \cdots p_n$ die partiellen Differenzialquotienten von x_0 nach $x_1, x_2, \cdots x_n$. Setzt man daher in dieser Gleichung statt p_n seinen Werth aus der vorigen, so ist, wenn die Gleichung

$$(**)\quad dx_0 = p_1dx_1 + \cdots p_{n-1}dx_{n-1} + fdx_n$$

erfüllt ist, auch die gegebene erfüllt. Jeder Verein von Gleichungen also, welcher die letztere integrirt, erfüllt auch die erstere und es kommt also nur auf die Integration dieser letzteren an. Setzen wir nun $e_0, e_1, \cdots e_n$ als ein System von Einheiten und $x = x_0e_0 + x_1e_1 + \cdots x_ne_n$, also $dx = e_0dx_0 + e_1dx_1 + \cdots e_ndx_n$, und setzen ferner, wenn l eine Lücke darstellt,

$$X = [l|e_0] - p_1[l|e_1] - p_2[l|e_2] - \cdots - p_{n-1}[l|e_{n-1}] - f[l|e_n],$$

so verwandelt sich die Gleichung (**) in

$$Xdx = 0,$$

auf deren Integration es also nur ankommt.

Anm. Die Integration der Gleichung $Xdx = 0$, auf welche es hier ankommt, ist nach der berühmten Pfaff'schen Methode, wie sie namentlich durch Jacobi (Crelle Journal B. 2, p. 347 und B. 17, p. 138) vereinfacht ist, vollständig zu lösen, oder genauer, auf die im vorigen §. behandelten Integrationen zurückzuführen. Die Darstellung und Ergänzung dieser Methode durch Anwendung extensiver Grössen, durch welche sich die lösenden Formeln grösstentheils in einer erstaunenswerthen Einfachheit darstellen, sollen den Hauptgegenstand der folgenden Entwickelung bilden. Doch wollen wir zuvor den aufgestellten Satz auch auf partielle Differenzialgleichungen höherer Ordnungen ausdehnen.

501. Die Integration jeder beliebigen partiellen Differenzialgleichung von höherer als erster Ordnung lässt sich zurückführen auf die Integration einer Differenzialgleichung der Form $Xdx = 0$, in welcher sowohl x als Xdx extensive Grössen darstellen.

Beweis. Es sei z die abhängige Variable und $y_1, \cdots y_n$ seien die unabhängigen Variabeln, wo z, $y_1, \cdots y_n$ Zahlgrössen darstellen. Um die partiellen Differenzialquotienten höherer Ordnung bequem bezeichnen zu können, nehmen wir zunächst ein System von n Einheiten $e_1, \cdots e_n$ an und setzen $y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n = y$, so werden die verschiedenen Differenzialquotienten bis zur m-ten Ordnung hin sich darstellen lassen in der Form $\frac{d}{dy}z$, $\frac{d^2}{dy^2}z, \cdots \frac{d^m}{dy^m}z$. Hier stellt jeder dieser Differenzialquotienten einen Ausdruck mit so viel (unter einander vertauschbaren) Lücken dar, als die Ordnung des Differenzialquotienten beträgt, und zwar in der Art, dass der Ausdruck nach Ausfüllung dieser Lücken durch die Einheiten von y, einen Zahlausdruck liefert und zwar jedesmal einen der gewöhnlichen (numerischen) Differenzialquotienten; z. B. stellt $\frac{d^2}{dy^2}z$ einen Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken dar und zwar so, dass $\frac{d^2}{dy^2}z \cdot e_1e_2 = \frac{d^2}{dy_1dy_2}z$ ist u. s. w. Es seien nun

$$\frac{d}{dy}z = p_1,\ \frac{d^2}{dy^2}z = p_2, \cdots \frac{d^m}{dy^m}z = p_m$$

gefetzt, fo wird die partielle Differenzialgleichung in ihrer vollständigsten Allgemeinheit die Form annehmen

(*) $f(y, z, p_1, p_2, \cdots p_m) = 0.$

Von den hierin vorkommenden Variabeln ist nur z eine Zahlgrösse, alle übrigen find extenfive Grössen, und zwar enthält y, vermöge der ihm beigelegten Bedeutung, n veränderliche Zahlgrössen, und jede der Grössen $p_1, \cdots p_m$ fo viel veränderliche Zahlgrössen, als es Kombinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur fo vielten Klasse giebt, als der Index jener Grösse beträgt. Die Anzahl der veränderlichen Zahlgrössen, welche in den fämmtlichen in der obigen Gleichung (*) vorkommenden Variabeln enthalten find, fei r, fo kann man vermöge der Gleichung (*) eine diefer Variabeln durch die übrigen $r - 1$ ausdrücken. Es bleiben alfo noch $r - 1$ Variabeln übrig. Jetzt erweitere man das System der n Einheiten $e_1, \cdots e_n$ fo, dass es nun $r - 1$ Einheiten enthält und multiplicire mit jeder derfelben eine der $r - 1$ veränderlichen Zahlgrössen, und fetze die Summe diefer Produkte $= x$, fo enthält x die fämmtlichen $r - 1$ veränderlichen Zahlgrössen. Nun hat man ferner vermöge der oben angegebenen Bedeutung der Grössen $p_1, \cdots p_m$

(**) $dz = p_1 dy,\ dp_1 = p_2 dy, \cdots dp_{m-1} = p_m dy,$

und wenn diefe Gleichungen erfüllt find, und zugleich vermittelst der Gleichung (*) eine der r veränderlichen Zahlgrössen, welche in jenen Gleichungen (**) enthalten find, durch die $(r - 1)$ übrigen ausgedrückt find, fo ist damit die gegebene partielle Differenzialgleichung (*) erfüllt. Folglich kommt es nur darauf an, die Gleichungen (**) zu integriren. Von diefen ist nur die erste eine Zahlgleichung, die folgenden enthalten, da dp_1 mit p_1 von gleicher Grössengattung ist, u. f. w. jedesmal fo viel Zahlgleichungen als in den Grössen $p_1, \cdots p_{m-1}$ veränderliche Zahlgrössen enthalten find. Die Anzahl der fämmtlichen Zahlgleichungen, welche in den obigen Gleichungen (**) enthalten find, fei s, fo ist s kleiner als r (nämlich um fo viel als die Anzahl der veränderlichen Zahlgrössen

beträgt, welche in y und p_m zusammen enthalten sind). Man bringe diese Zahlgleichungen auf die Form, dass die rechte Seite null ist, und multiplicire sie nach der Reihe mit den Einheiten $e_1, \cdots e_s$; so werden sie die Form haben $e_1X_1dx = 0$, $e_2X_2dx = 0, \cdots, e_sX_sdx = 0$. Dann sind diese Gleichungen gleichbedeutend der einen Gleichung $e_1X_1dx + e_2X_2dx + \cdots + e_sX_sdx = 0$, d. h. $(e_1X_1 + e_2X_2 + \cdots e_sX_s)dx = 0$; setzt man also $e_1X_1 + e_2X_2 + \cdots e_sX_s = X$, so werden jene Gleichungen (**) gleichbedeutend der Gleichung

$$Xdx = 0,$$

auf deren Integration es also allein ankommt.

Anm. 1. Es ergiebt sich leicht, dass die Zahlen r und s von n und m auf die Weise abhängen, dass

$$r = n + \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots m}, \quad s = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots m-1}$$

ist, ferner dass in dx, wie es in der Gleichung Xdx hervortritt, nicht die Differenziale aller r Unbekannten enthalten sind, sondern die Differenziale der zu p_m gehörigen veränderlichen Zahlgrössen in dx nicht erscheinen, die Zahl der numerischen Differenziale, die in dx hervortreten, ist $s + n$. Als Beispiel sei die partielle Differenzialgleichung 2-ter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln gewählt. Man erhält damit, indem wir die Bezeichnung der Unbekannten ändern, drei Gleichungen der Form

$$dz = pdx + qdy$$
$$dp = rdx + sdy$$
$$dq = sdx + tdy,$$

welche die acht Variabeln z, x, y, p, q, r, s, t enthalten, von denen eine vermittelst der gegebenen partiellen Differenzialgleichung durch die übrigen ausgedrückt werden kann; ferner kommen in ihr fünf Differenziale vor (dx, dy, dz, dp, dq).

Anm. 2. Man sieht, dass die Integration der Gleichung Xdx, wenn dx und Xdx extensive Grössen darstellen, die allgemeinste, ja man kann sagen, die einzige Aufgabe der Integralrechnung ist, indem auch die in den früheren Abschnitten behandelten Aufgaben der Integralrechnung sich hierauf zurückführen lassen, und auch, da jede Zahlgrösse zugleich als specielle Gattung der extensiven Grössen erscheint, die vorher (in 500) behandelte Aufgabe in ihr enthalten ist. Mit der Lösung dieser Aufgabe wäre man also am Ziele der Integralrechnung angelangt. Allein die Pfaff'sche Methode ist für den Fall, wo auch Xdx eine extensive Grösse ist, d. h. wo mehrere numerische Differenzialgleichungen hervortreten, nicht mehr anwendbar, und die Methoden, welche man für die Auflösung der partiellen Differenzial-

gleichungen höherer Ordnungen anwendet, und welche auch für die Lösung dieser allgemeineren Aufgabe förderlich sein würden, haben nur eine äusserst beschränkte Sphäre. Daher werde ich nur den Fall ins Auge fassen, wo Xdx eine Zahlgrösse ist, und werde auf den allgemeineren Fall nur gelegentlich hindeuten.

502. Wenn die Gleichung

$$Xdx = 0,$$

(in welcher, wie im Folgenden überall, Xdx eine Zahlgrösse, X eine Funktion von x, und x aus einem Systeme von m Einheiten $e_1, \cdots e_m$ numerisch ableitbar ist) durch einen Verein von n Zahlgleichungen $u_1 = c_1, \cdots u_n = c_n$, wo $c_1, \cdots c_n$ konstant sind, integrirt wird, so lässt sich Xdx auf die Form

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$$

bringen.

Beweis 1. Es sei $x = x_1 e_1 + \cdots x_m e_m$, so sind $u_1, \cdots u_n$ als Funktionen von $x_1, \cdots x_m$ aufzufassen. Da nun die Gleichungen $u_1 = c_1, \cdots u_n = c_n$ einen die Gleichung $Xdx = 0$ integrirenden Verein bilden, so heisst das (nach 491), es muss sich aus jenen Gleichungen die letztere ableiten lassen, d. h. wenn man aus den Gleichungen $du_1 = 0, \cdots du_h = 0$, welche in Bezug auf die m Differenziale $dx_1, \cdots dx_m$ homogen vom ersten Grade sind, n dieser letzteren Grössen durch die übrigen ausdrückt, und diese Ausdrücke in Xdx einführt, so muss dadurch Xdx identisch gleich null werden, oder, was nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen dasselbe ist, es müssen sich Grössen $U_1, U_2, \cdots U_n$ finden lassen, welche die Gleichung

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$$

erfüllen.

2. (Ich füge einen zweiten Beweis hinzu, um zugleich die Grössen $U_1, \cdots U_n$ finden zu lehren.) Die Funktionen $u_1, \cdots u_n$ können als von einander unabhängig aufgefasst werden, weil sonst die gegebene Gleichung schon durch einen Theil derselben integrirt werden würde. Sind aber $u_1, \cdots u_n$ von einander unabhängige Funktionen von $x_1, \cdots x_m$, so lassen sich n dieser letzteren Grössen, z. B. $x_1, \cdots x_n$, als Funktionen der übrigen und der Grössen $u_1, \cdots u_n$ darstellen. Es sei $x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = y$, und $x_{n+1} e_{n+1} + \cdots + x_m e_m = z$ ge-

ſetzt, und ſeien die auf den Verein der Variabeln $u_1, \cdots u_n, z$ bezüglichen partiellen Differenzialquotienten erster Ordnung nach der Reihe mit $\delta_1, \cdots \delta_n, \delta$ bezeichnet, von denen alſo der letzte nach der extenſiven Grösse z genommen ist, ſo wird

$$dy = \delta_1 y \cdot du_1 + \cdots + \delta_n y \cdot du_n + \delta y \cdot dz,$$

und alſo

$$Xdx = X(dy + dz)$$
$$= X\delta_1 y \cdot du_1 + \cdots + X\delta_n y \cdot du_n + (X\delta y + X)dz,$$

oder wenn wir

$$X\delta_1 y = U_1, \cdots X\delta_n y = U_n$$

ſetzen, ſo wird

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n + (X\delta y + X)dz.$$

Da nun, wenn man $u_1, \cdots u_n$ als konstant ſetzt, Xdx identisch gleich null werden muss, und da dann $du_1, \cdots du_n = 0$ ſind, ſo hat man $(X\delta y + X)dz = 0$, und alſo

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n.$$

Anm. Es gilt dieſer Satz auch, wenn Xdx eine extenſive Grösse ist, und namentlich gilt der zweite der oben mitgetheilten Beweiſe unmittelbar auch für dieſen Fall.

503. Wenn ſich der Ausdruck Xdx (in dem Sinne von 502) auf n Glieder, nämlich auf $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$ zurückführen lässt, aber nicht auf weniger als n ſolche Glieder, ſo wird die Gleichung

(a) $Xdx = 0$

integrirt durch Vereine von je n von einander unabhängigen Gleichungen, und zwar bilden die folgenden Vereine von je n Gleichungen:

$$\text{(b)} \begin{cases} u_1 = \varphi_1(u_{r+1}, \cdots u_n), \cdots, u_r = \varphi_r(u_{r+1}, \cdots u_n) \\ U_1 \frac{d}{du_{r+1}} \varphi_1 + \cdots + U_r \frac{d}{du_{r+1}} \varphi_r + U_{r+1} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ U_1 \frac{d}{du_n} \varphi_1 + \cdots + U_r \frac{d}{du_n} \varphi_r + U_n = 0, \end{cases}$$

wo r jeden der Werthe 0, 1, 2, $\cdots$ n annehmen kann, und $\varphi_1, \cdots \varphi_r$ willkürliche Funktionen bezeichnen, das vollständige System der integrirenden Vereine. Wenn ins Beſondere $r = 0$ ist, ſo hat man den Verein

(c) $U_1 = U_2 = \cdots = U_n = 0$,

und wenn $r = n$ ist, den Verein

(d) $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2, \cdots, u_n = c_n$,

wo $c_1, \cdots c_n$ willkürliche Konstanten sind.

Beweis. Die Gleichung Xdx kann nicht durch einen Verein von weniger als n Zahlgleichungen integrirt werden, weil sonst (nach 502) Xdx auf weniger als n Glieder der Form Udu zurückgeführt werden könnte, was mit der Voraussetzung streitet. Es kommt also darauf an, Vereine von n Gleichungen zu finden, welche die Gleichung $Xdx = 0$ integriren und zwar die sämmtlichen möglichen Vereine dieser Art. Es mögen die n von einander unabhängigen Gleichungen $v_1 = 0$, $v_2 = 0, \cdots$, $v_n = 0$ einen die Gleichung $Xdx = 0$ integrirenden Verein bilden, so lassen sich die Funktionen $v_1, \cdots, v_n$, welche ursprünglich als Funktionen der m Varibeln $x_1, \cdots x_m$ angenommen sein mögen, zugleich darstellen als Funktionen von $u_1, \cdots u_n$ und von $n - m$ der Grössen $x_1, \cdots x_m$, z. B. als Funktionen von $u_1, \cdots u_n, x_{n+1}, \cdots x_m$. Wenn alle jene Funktionen $v_1, \cdots v_n$ dann nur $u_1, \cdots u_n$ enthalten, aber von $x_{n+1}, \cdots x_m$ unabhängig sind, so ergeben sich $u_1, \cdots u_n$ als konstant, und es tritt der besondere Fall (d) ein. Wenn aber mindestens eine der Funktionen $v_1, \cdots v_n$, z. B. v_n, noch mindestens eine der Variabeln $x_{n+1}, \cdots x_m$, z. B. x_m, enthält, so lässt sich, vermittelst der Gleichung $v_n = 0$, x_m durch die übrigen $(u_1, \cdots u_n, x_{n+1}, \cdots x_{m-1})$ ausdrücken. Führt man diesen Ausdruck in die übrigen Gleichungen $v_1 = 0, \cdots v_{n-1} = 0$ ein, so ist es möglich, dass in den so erhaltenen Gleichungen noch mindestens eine der Variabeln $x_{n+1}, \cdots x_{m-1}$ vorkommt, z. B. x_{m-1} in $v_{n-1} = 0$; in diesem Falle drücke man x_{m-1} vermittelst dieser Gleichung durch die noch übrigen Variabeln $u_1, \cdots u_n, x_{n+1}, \cdots x_{m-2}$ aus, und setze diesen Ausdruck in die übrigen Gleichungen ein; und so fahre man fort, bis man endlich entweder alle Gleichungen $v_1 = 0, \cdots v_n = 0$ erschöpft hat, oder bis nur noch solche Gleichungen übrig bleiben, die nur $u_1, \cdots u_n$ enthalten. Im ersteren Falle muss (nach 491) der Ausdruck $U_1 du_1 + \cdots U_n du_n$ identisch $= 0$ werden, also $U_1 = 0, \cdots U_n = 0$, was den besonderen Fall (c) liefert. Im letzteren Falle mögen zu-

letzter Gleichungen $v_1 = 0, \cdots v_r = 0$ übrig geblieben ſein, welche nur die Variabeln $u_1, \cdots u_n$ enthalten, ſo können wir vermittelst dieſer Gleichungen r der Grössen $u_1, \cdots u_n$ als Funktionen der übrigen darstellen, z. B. $u_1, \cdots u_r$ als Funktionen von $u_{r+1}, \cdots u_n$. Der Verein wird in dieſem Falle stets ein integrirender ſein, wenn nur, von welcher Art auch jene r Funktionen ſein mögen, durch ſie der Ausdruck $U_1 du_1 + \cdots U_n du_n$ identisch gleich null gemacht wird. Da wir $u_1, \cdots u_r$ als Funktionen von $u_{r+1}, \cdots u_n$ dargestellt haben, ſo erhalten wir

$$\begin{cases} U_1 \frac{d}{du_{r+1}} u_1 + \cdots U_r \frac{d}{du_{r+1}} u_r + U_{r+1} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ U_1 \frac{d}{du_n} u_1 + \cdots U_r \frac{d}{du_n} u_r + U_n = 0, \end{cases}$$

als die nothwendigen, aber ausreichenden Bedingungen, damit in dieſem Falle $U_1 du_1 + \cdots U_n du_n$ identisch gleich null werde. Somit haben ſich die Vereine b (von welchen (c) und (d) nur specielle Fälle darstellen) als die ſämmtlichen möglichen Vereine ergeben, welche die Gleichung $Xdx = 0$ unter der Vorausſetzung des Satzes integriren.

Anm. Es ist dieſer Satz nach ſeiner einen Seite hin in der angeführten Abhandlung Jacobi's (Crelle Journal B. 2 p. 348) nachgewieſen. Aber es ist dort die wichtigste Seite unſeres Satzes, dass es nämlich ausser den Gleichungsvereinen (b) keinen Verein integrirender Gleichungen gebe, nicht nachgewieſen. Auch ist dort nicht gezeigt, worin der verschiedene Charakter der integrirenden Vereine (b) je nach dem Werthe des Index r bestehe, obgleich Jacobi mehrfach auf die Verschiedenheit dieſes Charakters hinweist. Offenbar war Jacobi auch mit dieſer Seite unſeres Satzes vollkommen vertraut, und es lag nur in dem beſonderen Zwecke jener Abhandlungen, dass er ſich darüber nicht weiter ausspricht. — Man ſieht aus dieſem und dem vorhergehenden Satze, dass es dasſelbe ist, zu ſagen, es lasse ſich $Xdx = 0$ durch Vereine von je n (und nicht weniger als n) Gleichungen integriren, oder zu ſagen, es lasse ſich Xdx (in dem Sinne von 502) auf eine Summe von n (und nicht weniger als n) Glieder der Form Udu zurückführen. Alſo kommt es darauf an, die Bedingungen aufzufinden, unter denen dieſe Reduktion möglich ist, und wenn dieſe Bedingungen erfüllt ſind, die Methode der Reduktion anzugeben. Um beides auf eine leichte Weiſe zu erreichen, wird es

zweckmässig sein, die folgenden Bestimmungen und Sätze über Lückenausdrücke mit nicht vertauschbaren Lücken aufzustellen. Noch bemerke ich, dass der vorstehende Satz nicht mehr gilt, wenn Xdx eine extensive Grösse ist; und dass, wenn die Reduktion von Xdx auf die möglichst geringste Anzahl von Gliedern der Form Udu vollzogen ist, doch damit noch keineswegs die Integration der Gleichung $Xdx = 0$ gegeben ist. Aber aus 502 folgt, dass, wenn man die sämmtlichen möglichen Reduktionen dieser Art kennt, man auch die Gleichung $Xdx = 0$ zugleich vollständig integrirt habe. Und diese Betrachtung scheint mir den Weg anzugeben, auf welchem man hoffen kann, zu diesem letzten Ziele der Integralrechnung zu gelangen.

504. Erklärung. Wenn L einen Ausdruck mit n Lücken gleicher Gattung darstellt, für welche jedoch nicht Vertauschbarkeit der Lücken vorausgesetzt ist, so verstehe ich unter $[La_1a_2\cdots a_n]$ den Ausdruck, welcher hervorgeht, wenn man $a_1, \cdots a_n$ in allen möglichen Ordnungen in die n Lücken von L eintreten lässt, den erhaltenen Ausdrücken das Zeichen + oder − vorsetzt, je nachdem das kombinatorische Produkt der Grössen, welche nach der Reihe in die n Lücken von L eintreten, dem Produkte $[a_1a_2\cdots a_n]$ gleich oder entgegengesetzt ist, und dann die Summe der so erhaltenen Glieder durch deren Anzahl dividirt. Wenn L weniger als n, z. B. nur n − r Lücken enthält, so verstehe ich unter $[La_1a_2\cdots a_n]$ den Ausdruck, welcher hieraus hervorgeht, indem man dem L noch r Faktoren 1 voranstellt, von denen man jeden als Ausdruck mit einer Lücke betrachtet, indem nämlich, wenn man diese Lücke durch eine Grösse a ausgefüllt denkt, aus 1 die Grösse $1 \cdot a$, d. h. a, hervorgeht. Hierdurch ist dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt. Wenn ins Besondere L ein Ausdruck mit n − 1 Lücken ist, der durch Ausfüllung dieser Lücken eine Zahlgrösse wird, so wird

$$[La_1\cdots a_n] = \frac{1}{n}(a_1[LA_1] + \cdots a_n[LA_n]),$$

wo A_r (für jeden Index r) alle Grössen $a_1, \cdots a_n$, mit Ausschluss von a_r, als Faktoren enthält und $[a_rA_r] = [a_1a_2\cdots a_n]$ ist. Ich nenne auch diese Produkte (wie überhaupt alle welche durch die scharfe Klammer umschlossen sind, s. 94) bezügliche Produkte, und zwar setze ich als das Hauptgebiet, auf welches sie sich beziehen, das Gebiet der Einheiten, aus

welchen die sämmtlichen Grössen, welche in die Lücken einzutreten fähig sind, abgeleitet werden können.

505. Wenn L einen Ausdruck mit n Lücken bezeichnet, und

1) $[a_1 \cdots a_n] = [b_1 \cdots b_n]$

ist, so ist auch

$$[La_1 \cdots a_n] = [Lb_1 \cdots b_n],$$

und wenn

2) $[a_1 \cdots a_n] = 0$

ist, so ist auch

$$[La_1 \cdots a_n] = 0.$$

Beweis. Wenn zwei der Grössen $a_1, \cdots a_n$, z. B. a_r und a_s, einander gleich werden, so ordne man die Ausdrücke, welche (nach 504) bei der Entwickelung von $[La_1 \cdots a_n]$ dadurch hervorgehen, dass man $a_1, \cdots a_n$ in allen möglichen Folgen in die Lücken von L eintreten lässt, paarweise so, dass je zwei derselben, bei denen sich die Reihenfolge jener Grössen nur durch die gegenseitige Stellung von a_r und a_s unterscheiden, ein Paar bilden. Dann werden die Ausdrücke jedes Paares (nach 504) entgegengesetztes Vorzeichen haben; wenn nun a_r und a_s einander gleich werden, so werden diese Ausdrücke, abgesehen von dem entgegengesetzten Vorzeichen, identisch; also wird ihre Summe null, also in diesem Falle auch $[La_1 \cdots a_n] = 0$.

2. Wenn $[a_1 \cdots a_n] = 0$ ist, so heisst das (nach 66), es stehen die Faktoren $a_1, \cdots a_n$ in einer Zahlbeziehung, d. h. (nach 2) eine derselben, z. B. a_n, wird sich als Vielfachensumme der übrigen $a_1, \cdots a_{n-1}$ ausdrücken lassen. Führt man diesen Ausdruck für a_n in $[La_1 \cdots a_{n-1}a_n]$ ein, und löst die diesen Ausdruck umschliessende Klammer auf, so stellt sich $[La_1 \cdots a_{n-1}a_n]$ als eine Vielfachensumme von Ausdrücken dar, deren jeder zwei gleiche unter den Grössen $a_1, \cdots a_{n-1}$ enthält, also (nach Bew. 1) null ist. Also ist auch jene Vielfachensumme, d. h. $[La_1 \cdots a_n]$, gleich null.

3. Wenn die Reihe der Grössen $a_1, \cdots a_n$ eine einfache lineale Aenderung erleidet (vergl. 71), z. B. a_r sich in $a_r + \alpha a_s$ verwandelt, wo α eine Zahlgrösse ist, und r und s von ein-

ander verschieden sind, so verwandelt sich $[La_1 \cdots a_r a_{r+1} \cdots a_n]$ in $[La_1 \cdots a_r a_{r+1} \cdots a_n] + \alpha[La_1 \cdots a_{r-1} a_s a_{r+1} \cdots a_n]$; der zweite dieser Ausdrücke enthält, da s von r verschieden ist, a_s zweimal, ist also (nach Bew. 1) gleich null, also bleibt der Ausdruck $[La_1 \cdots a_n]$ von unverändertem Werthe, wenn die Reihe der Grössen $a_1 \cdots a_n$ eine einfache lineale Aenderung erfährt, also auch, wenn sie wiederholt eine einfache lineale Aenderung erfährt, d. h. (nach 71) wenn jene Reihe sich überhaupt lineal ändert. Wenn nun $[a_1 a_2 \cdots a_n] = [b_1 b_2 \cdots b_n] \gtrless 0$ ist, so lässt sich (nach 76) die Reihe $b_1, b_2, \cdots b_n$ aus der Reihe $a_1, a_2, \cdots a_n$ durch lineale Aenderung ableiten, wobei, wie eben bewiesen, der Werth von $[La_1 \cdots a_n]$ unverändert bleibt, d. h. es ist dann $[La_1 \cdots a_n] = [Lb_1 \cdots b_n]$.

506. Erklärung. Wenn ein Ausdruck L mit n Lücken die Eigenschaft hat, dass er mit je n Grössen $a_1 \cdots a_n$, die in die Lücken eintreten können, ein Produkt $[La_1 \cdots a_n]$ liefert, welches null ist, so setze ich $[L] = 0$. Wenn ferner ein Produkt $[a_1 \cdots a_n] = 1$ ist, und L n Lücken enthält, so setze ich $[L] = [La_1 \cdots a_n]$.

Anm. Es ist schon früher bei der Behandlung des Potenzwerthes eines Bruches Q (No. 383), obwohl nur gelegentlich, die hier gewählte Bezeichnung angewandt, indem, wenn $e_1, \cdots e_n$ die n Nenner sind, deren Produkt $[e_1 \cdots e_n] = 1$ ist, und $a_1, \cdots a_n$ die zugehörigen Zähler, unter $[Q^n]$ das Produkt $[a_1 \cdots a_n]$ verstanden war. Da nun Q als Lückenausdruck mit einer Lücke aufgefasst werden kann, indem nämlich (für jeden Index r) $Qe_r = a_r$ ist, so wird Q^n ein Ausdruck mit n Lücken, und gehört also $[Q^n]$ zu den hier (in 506) definirten Ausdrücken. Man überzeugt sich leicht, dass auch nach dieser Definition (506) der Ausdruck $[Q_n] = [a_1 \cdot a_2 \cdots a_n]$ wird, und also beide Definitionen in vollkommener Uebereinstimmung stehen. Es hat sich mir die Allgemeinheit der hier (in 504 und 506) aufgestellten Begriffe, und ihre wesentliche Bedeutung für die Analysis erst während der Arbeit ergeben. Sonst würde ich diese Begriffe und die daraus fliessenden Sätze sogleich an ihrer Stelle (im ersten Kapitel dieses Theiles) behandelt haben. Da hier diese Sätze den Gang der Entwickelung unterbrechen, so beschränke ich mich auf diejenigen Sätze, welche für die folgende Darstellung unentbehrlich erscheinen.

507. Wenn L zwei oder mehrere vertauschbare Lücken enthält, so ist $[L] = 0$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass wenn von den n Lücken

von L auch nur zwei mit einander vertauschbar sind, allemal $[La_1 \cdots a_n]$ null ist, was auch $a_1, \cdots a_n$ für Grössen sein mögen. Denn es seien die übrigen Lücken durch beliebige jener Grössen ausgefüllt, so geht ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken hervor, dieser Ausdruck sei P. Sind nun b und c zwei beliebige Grössen, welche in diese zwei Lücken eintreten können, so ist, da die Lücken vertauschbar sind, $Pbc = Pcb$; aber $[Pbc] = \frac{1}{2}(Pbc - Pcb)$, also $= 0$, also auch $[La_1 \cdots a_n] = 0$, für beliebige Grössen $a_1, \cdots a_n$, d. h. (nach 506) $[L] = 0$.

508. Wenn $A_1, \cdots A_n$ Grössen mit je einer Lücke derselben Gattung sind, welche entweder alle, oder doch alle bis auf eine derselben, nach Ausfüllung dieser Lücken Zahlgrössen werden, und P ein Ausdruck mit beliebig vielen Lücken ist, so ist das Produkt

$$[A_1 \cdots A_n P]$$

ganz den Gesetzen der kombinatorischen Multiplikation (52 ff.) unterworfen und zwar in dem Sinne, dass $A_1, \cdots A_n$ als einfache kombinatorische Faktoren betrachtet werden, namentlich sind zwei Produkte, welche sich nur durch die gegenseitige Stellung zweier dieser Faktoren unterscheiden, einander entgegengesetzt, d. h.

(a) $[A_1 \cdots A_r \cdots A_s \cdots A_n P] = [A_1 \cdots A_s \cdots A_r \cdots A_n P]$,

wo beide Seiten der Gleichung sich nur durch die gegenseitige Stellung der Faktoren A_r und A_s unterscheiden, und wenn zwei jener Faktoren gleich werden, so ist das Produkt null, d. h.

(b) $[A_1 \cdots A_r \cdots A_r \cdots A_n P] = 0$.

Beweis. Betrachtet man z. B. nur die beiden ersten Faktoren A_1 und A_2 und nennt das Produkt der übrigen Q, und setzt $e_1, \cdots e_n$ als Einheiten, deren kombinatorisches Produkt 1 ist, so ist

$$[A_1 A_2 Q] = [A_1 A_2 Q e_1 e_2 e_3 \cdots e_n].$$

Hier sollen (nach 504) die Faktoren $e_1 e_2 e_3 \cdots e_n$ in allen möglichen Ordnungen in die Lücken von $A_1 A_2 Q$ eintreten, und das Vorzeichen wird positiv, wenn $e_1, e_2, e_3, \cdots e_n$ entweder in dieser Ordnung, also e_1 in A_1, e_2 in A_2 und die übrigen

$e_3 \cdots e_n$ nach der Reihe in Q, eintreten, oder in irgend einer andern Ordnung, welche durch eine gerade Anzahl von Verfetzungen aus jener Ordnung hervorgeht; ganz diefelbe Bedeutung hat aber $[A_2A_1Qe_2e_1e_3 \cdots e_n]$, indem auch hier das Zeichen pofitiv wird wenn e_1 in A_1, e_2 in A_2, und $e_3, \cdots e_n$ in diefer Reihe in Q eintreten u. f. w., alfo ist $[A_1A_2Qe_1e_2e_3 \cdots e_n] = [A_2A_1Qe_2e_1e_3 \cdots e_n]$, letzteres ist aber, da (nach 55) $[e_2e_1e_3 \cdots e_n] = -[e_1e_2e_3 \cdots e_n]$ ist, (nach 505) gleich $-[A_2A_1Qe_1e_2e_3 \cdots e_n]$, alfo $[A_1A_2Q] = -[A_2A_1Q]$. Werden A_1 und A_2 einander gleich, fo folgt aus diefer letzten Formel, dass dann $[A_1A_2Q]$ null wird. Dasfelbe gilt nun aus demfelben Grunde, wenn man statt der beiden ersten Faktoren des Ausdruckes $[A_1A_2 \cdots A_nP]$ irgend zwei andere, A_r und A_s, betrachtet. Somit gelten die Formeln (a) und (b) und auf ihnen beruhen die übrigen Gefetze der kombinatorischen Multiplikation.

509. Wenn A ein Ausdruck mit einer Lücke und B ein Ausdruck mit $m-1$ Lücken derfelben Gattung ist, und $a_1, \cdots a_m$ Grössen diefer Gattung find, fo ist

$$[ABa_1 \cdots a_m] = A[Ba_1 \cdots a_m]$$
$$= \frac{1}{m} \sum \overline{Aa_\alpha}[BA_\alpha],$$

wo A_α alle Faktoren $a_1, \cdots a_m$, mit Ausnahme des Faktors a_α, enthält, und zwar fo, dass $[a_\alpha A_\alpha] = [a_1a_2 \cdots a_m]$ ist, und wo die Summe fich auf die Werthe $\alpha = 1, \cdots m$ bezieht.

Beweis 1. Um den Ausdruck $[ABa_1 \cdots a_m]$ zu entwickeln, muss man in die Lücken von AB nach und nach alle möglichen Anordnungen der Faktoren $a_1, \cdots a_m$ eintreten lassen; dabei muss alfo in A nach und nach jede der Grössen $a_1, \cdots a_m$ eintreten. Wenn nun zuerst in A die Grösse a_1 eintritt, fo müssen in B die übrigen Faktoren, alfo die Faktoren von A_1 in allen möglichen Folgen und zwar gleichfalls mit dem Zeichengefetz eintreten, dass zwei fo hervorgehende Ausdrücke gleiches oder entgegengefetztes Vorzeichen haben, je nachdem die beiden Reihenfolgen ein gleiches oder entgegengefetztes kombinatorisches Produkt liefern. Die fo hervorgehenden Glieder werden alfo $\mp Aa_1[BA_1]$ liefern. Hier ist jedoch das $+$-Zeichen zu wählen, weil $[a_1A_1] = [a_1a_2 \cdots a_m]$ ist. Aus gleichem Grunde

ist die Summe der Glieder, bei denen in A die Grösse a_α eintritt, $= + Aa_\alpha[BA_\alpha]$ u. f. w.; alſo wird, da man dieſe Summe noch durch die Anzahl ihrer Glieder dividiren muss,

$$[ABa_1 \cdots a_m] = \frac{1}{m}\sum \overline{Aa_\alpha[BA_\alpha]}.$$

2. Ferner ist (nach 504)

$$A[Ba_1 \cdots a_m] = \frac{1}{m}A\sum \overline{a_\alpha[BA_\alpha]}$$

$$= \frac{1}{m}\sum \overline{Aa_\alpha[BA_\alpha]} \qquad [39]$$

$$= [ABa_1 \cdots a_m] \qquad [\text{Bew. } 1].$$

510. Wenn C ein Ausdruck mit zwei Lücken gleicher Gattung ist, welcher durch Ausfüllung ſeiner Lücken eine Zahlgrösse wird, und a eine Grösse jener Gattung, B aber ein Produkt von $2n-1$ ſolchen Grössen, und $2n$ die Anzahl der Einheiten ist, aus welchen die Grössen dieſer Gattung ableitbar ſind, ſo ist

$$[Ca[C^{n-1}B]] = [C^naB]$$
$$[C[C^{n-1}B]a] = [C^nBa].$$

Beweis. $[C^naB]$ drückt, da die n Faktoren C alle einander gleich ſind, und nach Ausfüllung ihrer Lücken Zahlfaktoren werden, alſo untereinander vertauschbar ſind, aus, dass a in eine Lücke eines der Faktoren, z. B. des ersten Faktors C, eintritt, während die $2n-1$ Faktoren von B in die andere Lücke jenes Faktors und in die übrigen Faktoren eintreten. Dasſelbe drückt aber die Formel $[Ca[C^{n-1}B]]$ aus, alſo ſind beide gleich. Auf gleiche Weiſe ergiebt ſich die zweite Formel.

511. Wenn Xdx (in dem Sinne von 502) auf n Glieder der Form Udu zurückführbar ſein ſoll, d. h.

$$Xdx = U_1du_1 + \cdots U_ndu_n$$

ſein ſoll, ſo muss nothwendig

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ſein.

Beweis. Es ſei $U_1du_1 + \cdots U_ndu_n$ der Kürze wegen mit $\sum \overline{U_\alpha du_\alpha}$ bezeichnet, ſo ist

$$\sum U_a du_a = \sum U_a \frac{d}{dx} u_a dx,$$

alſo

$$X = \sum U_a \frac{d}{dx} u_a.$$

Somit

$$\frac{d}{dx} X = \frac{d}{dx} \sum U_a \frac{d}{dx} u_a$$
$$= \sum \frac{d}{dx} U_a \cdot \frac{d}{dx} u_a + \sum U_a \frac{d^2}{dx^2} u_a.$$

Da $\frac{d^2}{dx^2} u_a$ ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken ist (451), ſo können wir bei der Substitution von $\frac{d}{dx} X$ in den Ausdruck $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ (nach 507) die Glieder $\sum U_a \frac{d^2}{dx^2} u_a$ weglaſſen, und erhalten

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = \left[\sum U_a \frac{d}{dx} u_a \left(\sum \frac{d}{dx} U_a \frac{d}{dx} u_a\right)^n\right]$$
$$= \sum \left[U_a \frac{d}{dx} u_a \cdot \frac{d}{dx} U_b \frac{d}{dx} u_b \cdot \frac{d}{dx} U_c \frac{d}{dx} u_c \cdots\right],$$

wo die Anzahl der Indices $a, b, c, \cdots$ gleich $n + 1$ iſt. Da aber u nur n verſchiedene Indices hat, ſo müſſen unter den Indices $a, b, \cdots$ nothwendig mindeſtens zwei gleiche vorkommen; alſo werden auch unter den Grössen $\frac{d}{dx} u_a$, $\frac{d}{dx} u_b$, $\frac{d}{dx} u_c, \cdots$ nothwendig zwei gleiche vorkommen, alſo iſt (nach 508) jedes Glied der obigen Summe null, alſo die Summe ſelbſt, d. h.

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0.$$

Anm. Ich werde im Folgenden zeigen, daſs dieſe Bedingungsgleichung zugleich die vollkommen ausreichende iſt, ſo daſs, wenn ſie erfüllt wird, auch allemal die Reduktion auf n Glieder der Form Udu, alſo auch (nach 503) die Integration durch Vereine von n Gleichungen möglich iſt. Es iſt daher dieſe in der That wunderbar ein-

fache Formel von sehr weitreichender Bedeutung. Der Beweis derselben ist oben so geführt, dass auch die Art, wie dieselbe gefunden ist, unmittelbar hindurchleuchtet. Auch hält es nicht schwer, die entsprechenden Formeln für den Fall zu entwickeln, dass Xdx eine extensive Grösse ist; und ich habe diese letzteren Formeln hier nur deshalb nicht aufgestellt, weil, wie schon oben angedeutet, die Behandlung dieses allgemeinen, die ganze Integralrechnung abschliessenden Falles hier unterbleiben musste. Dagegen werde ich die oben mitgetheilte Formel in der folgenden Nummer in die gewöhnliche Analysis kleiden.

512. Aufgabe. Die Bedingungsgleichung aus 511, nämlich

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$$

durch Zahlgleichungen zu ersetzen.

Auflösung. Es sei $x=x_1e_1+\cdots x_me_m$, wo $e_1,\cdots e_m$ das System der Einheiten bilden. Dann ist $dx=e_1dx_1+\cdots e_mdx_m$; und es wird $Xdx=Xe_1\cdot dx_1+\cdots Xe_mdx_m=X_1dx_1+\cdots X_mdx_m$, wenn wir die Zahlgrössen $Xe_1,\cdots Xe_m$ beziehlich mit $X_1,\cdots X_m$ bezeichnen. Die obige Bedingungsgleichung sagt dann (nach 506), da X eine und $\frac{d}{dx}X$ zwei Lücken enthält, aus, dass

$$(*)\quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_1e_2\cdots e_{2n+1}\right]=0$$

sei, und auch bleibe, wenn man statt $e_1, e_2,\cdots e_{2n+1}$ beliebige $2n+1$ unter den m Einheiten $e_1,\cdots e_m$ setzt. Ist $m=2n+1$, so tritt keine andere numerische Bedingungsgleichung als die Gleichung (*) hervor; ist $m<2n+1$, so tritt gar keine hervor, weil dann je $2n+1$ Grössen, mit denen $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ multiplicirt werden mag, in einer Zahlbeziehung stehen, also $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ dann mit ihnen multiplicirt (nach 505) null liefert, also (nach 506) selbst null ist. Wir nehmen daher jetzt an, dass $m=>2n+1$ sei; und suchen unter dieser Voraussetzung in der Gleichung *, X und x durch die Zahlgrössen $X_1,\cdots X_m$, $x_1,\cdots x_m$ zu ersetzen. Nun ist nach dem Obigen

$Xe_r = X_r$, alſo $\frac{d}{dx} Xe_r e_s = \frac{d}{dx} X_r e_s = \frac{d}{dx_s} X_r$ (nach 451), folglich verwandelt ſich die obige Formel (*) in

$$0 = \sum \overline{\mp X_1 \cdot \frac{d}{dx_3} X_2 \cdot \frac{d}{dx_5} x_4 \cdot \cdots \frac{d}{dx_{2n+1}} X_{2n}},$$

wo man die Indices auf alle möglichen Arten zu vertauſchen und dem jedesmaligen Gliede das Zeichen + oder — vorzuſetzen hat, je nachdem die Anzahl der Vertauſchungen, durch die es hervorging, eine gerade oder ungerade war. Bezeichnen wir nach Jacobi's Vorgange (Crelle Journal 2, 351) $\frac{d}{dx_3} X_2 - \frac{d}{dx_2} X_3$ mit (2, 3) u. ſ. w., oder allgemein ſetzen wir

$$\frac{d}{dx_s} X_r - \frac{d}{dx_r} X_s = (r, s),$$

ſo können wir die vorige Formel auch ſchreiben

$$0 = \sum \overline{\mp X_1 (2, 3)(4, 5) \cdots (2n, 2n+1)},$$

wobei die Vertauſchungen je zweier in einer Klammer ſtehenden Indices ausgeſchloſſen bleiben. Ebenſo können wir, ohne die Bedeutung der Gleichung zu ändern, feſtſetzen, daſs der erſte der beiden in Klammern geſchloſſenen Indices von einem Faktor zum nächſtfolgenden nur wachſe, nie abnehme. Denn da die Ordnung der Zahlfaktoren (2, 3) u. ſ. w. gleichgültig iſt, ſo können wir ihnen immer jene Anordnung geben. Wir bezeichnen in dieſem Sinne (mit Jacobi a. a. O. p. 355) die Summe $\sum \overline{\mp (2, 3) \cdot (4, 5) \cdots (2n, 2n+1)}$ mit (2, 3, 4, 5, $\cdots$, 2n, 2n + 1), ſo verwandelt ſich die obige Gleichung in

$$0 = \sum \overline{\mp X_1 (2, 3, \cdots 2n+1)}, \text{ d. h.}$$

$$0 = X_1(2, 3, \cdots 2n+1) - X_2(1, 3, \cdots 2n+1) + X_3(1, 2, 4, \cdots 2n+1) - \cdots,$$

was Jacobi (a. a. O. p. 356) ſchreibt

$$(**) \quad 0 = \sum \overline{X_1, (2, 3, \cdots, 2n+1)}.$$

Solcher Gleichungen giebt es ſo viele, als es Kombinationen ohne Wiederholung aus m Elementen zur (2n + 1)-ten Klaſſe giebt. Aber dieſe Gleichungen ſind, wenn $m > 2n+1$ iſt, nicht unabhängig von einander. In der That können wir zeigen, daſs wenn die Gleichung (*), deren Transformirte die

Gleichung (**) ist, für alle Kombinationen aus $e_1, \cdots e_m$ zur $(2n+1)$-ten Klasse, in denen eine Einheit e_r vorkommt, deren zugehöriges $Xe_r = X_r$ nicht null ist, als geltend angenommen wird, sie auch für alle übrigen Kombinationen (in denen e_r nicht vorkommt) gelten muss. In der That, es sei $X_1 \gtrless 0$, und gelte die Gleichung * für alle Kombinationen, in denen e_1 vorkommt, d. h. es sei allemal

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_1 E_r\right] = 0,$$

wenn E_r eine beliebige Kombination ohne Wiederholung aus $e_2, \cdots e_m$ zur 2n-ten Klasse ist, so ist zu zeigen, es sei auch allemal

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0,$$

auch wenn e_s eine beliebige in E_r nicht vorkommende Einheit bezeichnet. In der That ist (nach 508) $\left[X^2\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ allemal null, also ist (nach 506) auch $\left[X^2\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_1 e_s E_r\right] = 0$, d. h. es ist

$$\sum \mp Xe_1\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0,$$

wo die Summe sich auf die verschiedenen Glieder bezieht, welche aus dem unter dem Summenzeichen stehenden dadurch hervorgehen, dass man e_1 nach und nach mit jeder in $e_s E_r$ vorkommenden Einheit vertauscht (und das Vorzeichen ändert); allein alle diese Glieder sind null, weil dann $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ mit einer Kombination von Einheiten multiplicirt ist, unter denen e_1 vorkommt, und diese Produkte nach der Voraussetzung null sind, also bleibt das unter dem Summenzeichen stehende Glied allein übrig, d. h. es ist

$$Xe_1\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0.$$

Nun ist gleichfalls vorausgesetzt, dass die Zahlgrösse $Xe_1 = X_1$ von Null verschieden sei, also erhält man

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0,$$

was zu zeigen war. Wir fassen nun das Resultat in einen Satz zusammen:

513. Wenn der Ausdruck $X_1dx_1 + \cdots X_mdx_m$, in welchem $X_1, \cdots X_m$ Funktionen der Variabeln $x_1, \cdots x_m$ sind, sich auf n Glieder, nämlich auf $U_1du_1 + \cdots U_ndu_n$, soll reduciren lassen können, oder, anders ausgedrückt, wenn die Gleichung $X_1dx_1 + \cdots X_mdx_m = 0$, sich soll durch Vereine von je n Gleichungen integriren lassen können, so muss erstens, wenn $m = 2n + 1$ ist, die eine Bedingungsgleichung

$$\sum X_1(2, 3, \cdots, 2n + 1) = 0,$$

welche die in 512 beschriebene Bedeutung hat, erfüllt werden; wenn aber zweitens $m > 2n + 1$ ist, so treten so viele solcher Gleichungen hervor, als es Kombinationen aus m Elementen zur $(2n + 1)$-ten Klasse giebt, indem man nämlich statt der Indices $1, 2, \cdots, 2n + 1$ in obiger Gleichung jede andere Gruppe von ebenso vielen Indices setzen kann; doch reicht unter diesen Gleichungen schon eine geringere Anzahl aus, indem, wenn z. B. X_1 ungleich null ist, es ausreichend ist, wenn man in der obigen Gleichung statt der Gruppe der Indices $2, 3, \cdots 2n + 1$, jede andere Kombination aus den Indices $2, 3 \cdots m$ zur 2n-ten Klasse setzt. So bleiben nur soviel Bedingungsgleichungen übrig, als es Kombinationen ohne Wiederholung aus $m - 1$ Elementen zur 2n-ten Klasse giebt.

Anm. Für den einfachsten Fall, wo $m = 2n + 1$ ist, hat Jacobi (a. a. O. p. 356) die Bedingungsgleichung aufgestellt. Für den Fall, wo $n = 1$ ist, erhält man die bekannten Bedingungsgleichungen der Integrabilität, welche (nach 511) in der Gleichung $\left[X\frac{d}{dx}X\right] = 0$ zusammengefasst erscheinen. Es kommt nun darauf an, die Zurückführung von Xdx auf n Glieder der Form Udu, sobald nur die Bedingungsgleichung (511) für die Möglichkeit dieser Zurückführung erfüllt ist, auch wirklich zu vollziehen. Zu diesem Ende lösen wir nach Pfaff's Vorgange die folgende Aufgabe:

514. Aufgabe. Die Zahlgleichung

(a) $Xdx = 0,$

in welcher X eine Funktion von x, und $x = x_1e_1 + \cdots x_me_m$ aus einem Systeme von m Einheiten abgeleitet ist, auf die Form zu bringen, dass die hervorgehende Gleichung nur $m - 1$ veränderliche Zahlgrössen enthalte.

Auflöſung. Es kommt zu dem Ende nur darauf an, x als Funktion einer aus m — 1 Einheiten ableitbaren Veränderlichen a, und einer veränderlichen Zahlgröſse t in der Art darzuſtellen, daſs, wenn man dieſe Ausdrücke für x in die gegebene Gleichung einführt, dann der Koefficient von dt in der entwickelten Gleichung null wird, und der Koefficient von da entweder t gar nicht mehr enthält, oder nur in einem Zahlfaktor N, ſo daſs, wenn man die Gleichung mit N dividirt, die ſo hervorgehende Gleichung t nicht mehr enthält. Bezeichnet man mit δ' das Differenzial nach a, wobei t konstant geſetzt ist, und mit δ den Differenzialquotienten nach t, wobei a konstant geſetzt ist, ſo erhält man $dx = \delta' x + \delta x \cdot dt$; folglich müssen, wenn die verlangte Aufgabe gelöst ſein ſoll, die beiden Gleichungen erfüllt werden

$$(b)\quad X\delta x = 0$$

$$(c)\quad \delta\frac{X\delta' x}{N} = 0,$$

indem die letztere ausdrückt, daſs $X\delta' x : N$ nicht mehr von t abhängig ist. Die letzte dieſer Gleichung giebt, wenn man

$$(d)\quad \frac{\delta N}{N} = \lambda$$

ſetzt,

$$(e)\quad \lambda X\delta' x = \delta(X\delta' x) = \delta X \cdot \delta' x + X\delta\delta' x.$$

Differenziirt man auch die Gleichung (b) nach a, ſo erhält man

$$(f)\qquad 0 = \delta' X \cdot \delta x + X\delta'\delta x.$$

Subtrahirt man die zweite dieſer Gleichungen von der ersten, ſo erhält man

$$(g)\quad \lambda X\delta' x = \delta X \cdot \delta' x - \delta' X \cdot \delta x$$
$$= \frac{d}{dx}X \cdot \delta' x \cdot \delta x - \frac{d}{dx}X \cdot \delta x \cdot \delta' x$$

$$(h)\quad \lambda X\delta' x = \left[\frac{d}{dx}X \cdot \delta' x \cdot \delta x\right].$$

Hier ist $\frac{d}{dx}X$ ein Ausdruck mit zwei Lücken; und zwar ist hier als erste Lücke, d. h. als diejenige Lücke, in welche der zuerst gestellte Faktor (im ersten Gliede $\delta' x$) eintreten

soll, diejenige Lücke aufgefasst, welche in X enthalten ist, und als zweite die durch die Differenziation nach x und Division mit dx hinzutretende. Die Gleichung (h) wird nun offenbar erfüllt sein, wenn für jede Grösse c, die mit x (also auch mit $\delta' x$) von gleicher Gattung ist,

$$\text{(i)} \quad \lambda X c = \left[\frac{d}{dx} X \cdot c \cdot \delta x\right]$$

ist. Ich zeige nun, dass, sobald diese Gleichung (i) (für jede Grösse c) erfüllt ist, auch die beiden Gleichungen (b) und (c) erfüllt sind, und also die verlangte Aufgabe gelöst ist, vorausgesetzt, dass λ von Null verschieden ist. Es ist $\delta' x$ mit x von gleicher Grössengattung, muss also, wenn die Gleichung (i) allgemein gilt, in dieser Gleichung statt c eingesetzt werden können, wodurch man die Gleichung (h) erhält; also gilt auch die Gleichung (g), da sie mit (h) gleichbedeutend ist. Ferner ist auch δx von gleicher Gattung mit x, kann also statt c in Gleichung (i) eingesetzt werden. Dann wird aber die rechte Seite derselben (nach 505) null, also erhält man $\lambda X \delta x = 0$, also da $\lambda \gtrless 0$ (nach Voraussetzung), so ergiebt sich $X \delta x = 0$, d. h. die Gleichung (b) gilt. Dann aber gilt auch die daraus abgeleitete (f). Durch Addition der Gleichungen (f) und (g) geht aber die Gleichung (e) hervor. Setzt man nun log. $N = \int^{-1} \lambda dt$, so wird auch die Gleichung (d) erfüllt, und indem man den daraus fliessenden Werth von λ in (e) einsetzt, auch die Gleichung (c), und es wird dann $\frac{X \delta' x}{N} = 0$ die aus $X dx = 0$ transformirte Gleichung, welche nur noch a, also eine aus $m - 1$ Einheiten ableitbare Grösse als Variable enthält, und die Aufgabe ist gelöst. Dies in einem Satze dargestellt:

„Wenn die Zahlgleichung

$$\text{(a)} \quad X dx = 0,$$

in welcher X eine Funktion von x, und x aus m Einheiten ableitbar ist, angenommen wird, und man x als Funktion einer aus $m - 1$ ableitbaren Variabeln a und einer veränderlichen Zahl t so bestimmt, dass, wenn δ' das Differenzial nach a, wobei t konstant gesetzt ist, und δ den Differenzialquotienten

nach t, wobei a konstant gefetzt ist, bezeichnen, und c eine beliebige mit x gleichgattige Grösse, λ aber eine noch unbekannte jedoch von Null verschiedene Zahlgrösse darstellt, die Gleichung

$$\text{(i)}\quad \lambda X c = \left[\frac{d}{dx}X \cdot c \cdot \delta x\right]$$

erfüllt fei, fo wird die Gleichung (a) erfetzt durch die Gleichung

$$\text{(k)}\quad \frac{X\delta' x}{N} = 0,$$

in welcher $\frac{X\delta' x}{N}$ nicht mehr von t abhängt, und

$$\text{(l)}\quad \log. N = \int^{-1}\lambda dt$$

ist."

515. Fortfetzung. Es kommt zunächst darauf an, aus der gefundenen Gleichung 514 i die Grösse δx auf eine Seite allein zu schaffen. Wir thun dies zunächst unter der Vorausfetzung, dass $m = 2n$ fei. Jene Gleichung enthält, wenn man statt c nach und nach die Einheiten $e_1, \cdots e_{2n}$ fetzt, 2n Zahlgleichungen, durch welche fich die Grössen $\delta x_1, \cdots \delta x_{2n}$, welche in $\delta x = e_1\delta x_1 + \cdots e_{2n}\delta x_{2n}$ enthalten find, im Allgemeinen ausdrücken lassen. Es gelingt dies auf eine fehr einfache Weife, fobald vorausgefetzt wird, dass

$$\text{(a)}\quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0$$

$$\text{(b)}\quad \left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right] \gtrless 0$$

feien. In der That hat man dann, um δx_r zu finden, nur in 514 i statt c den Werth $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]$ zu fetzen, wo $[e_r E_r] = 1$ ist und E_r als Faktoren die $2n-1$ von e_r verschiedenen Einheiten enthält. Da nämlich $\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}$ im Ganzen $2n-2$ Lücken enthält und E_r ein Produkt von $2n-1$ Einheiten ist, fo wird (nach 504) $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]$ eine Vielfachenfumme der Einheiten, aus denen x abgeleitet ist, alfo mit x von gleicher Gattung und kann alfo statt c in die Gleichung 514 i eingefetzt werden. Dann verwandelt fich diefe in

$$\lambda X\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]=\left[\frac{d}{dx}X\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]\delta x\right].$$

Wandelt man die linke Seite dieſer Gleichung (nach 509) und die rechte (nach 510) um, indem man bedenkt, dass $\frac{d}{dx}X$ ein Ausdruck mit zwei Lücken ist, und ſowohl X als $\frac{d}{dx}X$ nach Ausfüllung ihrer Lücken Zahlgrössen werden, ſo verwandelt ſich jene Gleichung in

$$\lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]=\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}E_r\delta x\right].$$

Setzen wir hierin statt δx ſeinen Werth $e_1\delta x_1+\cdots e_{2n}\delta x_{2n}$, ſo bleibt, da $[E_re_s]$, wenn r von s verschieden ist, gleiche Faktoren enthält, alſo das Produkt $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}E_re_s\right]$ null wird, und da (nach 58) $[E_re_r]=-[e_rE_r]=-1$ ist,

$$\text{(c)}\quad \lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]=-\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right]\delta x_r.$$

Wenn nun die Vergleichungen (a) und (b) erfüllt ſind, und man

$$\text{(d)}\quad -2n\lambda:\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right]=\mu$$

ſetzt, ſo erhält man

$$\text{(d*)}\quad \delta x_r=\frac{\mu}{2n}\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right];$$

alſo wird

$$\delta x=\sum\overline{e_a\delta x_a}=\frac{\mu}{2n}\sum\overline{e_a\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_a\right]},$$

d. h. (nach 509)

$$\text{(e)}\quad \delta x=\mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right],$$

oder (nach 2)

$$\text{(f)}\quad \delta x\equiv\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right].$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Werth δx aus der Gleichung (e), in welcher μ die durch (d) ausgedrückte Bedeutung hat, in die Gleichung 514 i eingeſetzt, dieſe für jeden beliebigen Werth c identisch macht. Setzt man zunächst statt

c eine der Einheiten, z. B. e_r, so wird die rechte Seite der Gleichung 514 i

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_r\delta x\right] = \mu\left[\frac{d}{dx}Xe_r\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]\right].$$

Da $X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}$ nach Ausfüllung seiner $2n-1$ Lücken eine Zahlgrösse wird, so können wir, ohne die Bedeutung desselben zu ändern, ihm noch eine Lücke l hinzufügen (nach 504). Diese Lücke sei mit den übrigen von gleicher Gattung, so wird (nach 504) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] = \left[lX\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$

$= -\left[Xl\frac{d}{dx}X^{n-1}\right]$ (nach 508), und dies wieder (nach 509)

$= -\frac{1}{2n}\sum Xe_\alpha\left[l\frac{d}{dx}X^{n-1}E_\alpha\right]$, wo E_α die von e_α verschiedenen Einheiten zu Faktoren hat, und $[e_\alpha E_\alpha] = 1$ ist; also erhält man, da Xe_α eine Zahlgrösse ist, also in dem Produkte beliebig gestellt werden darf,

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_r\delta x\right] = -\frac{\mu}{2n}\sum Xe_\alpha\left[\frac{d}{dx}Xe_r\left[l\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_\alpha\right]\right]$$

$$= -\frac{\mu}{2n}\sum Xe_\alpha\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}e_rE_\alpha\right] \quad [510].$$

Da nun E_α alle von e_α verschiedenen Einheiten als Faktoren enthält, so enthält es, wenn α von r verschieden ist, auch e_r; dann aber ist $[e_rE_\alpha]$ (nach 60) null, also auch (nach 505) der ganze Ausdruck, in welchem e_rE_α vorkommt, also reducirt sich die obige Summe auf das Glied, für welches $\alpha = r$ wird; da aber $[e_rE_r] = 1$ ist, so erhält man dann den obigen Ausdruck

$$= -\frac{\mu}{2n}Xe_r\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right].$$

Setzt man hierin statt μ seinen Werth aus (d), so wird der letzte Ausdruck

$$= \lambda Xe_r.$$

Somit gilt die Gleichung 514 i für jede Einheit e_r, die statt c gesetzt werden mag, also auch für jede Vielfachensumme dieser Einheiten, d. h. für jede Grösse c, die mit x

von gleicher Gattung ist. Alſo ist bewieſen, dass der Ausdruck (e) für δx unter den gemachten Vorausſetzungen die Gleichung 514 i allgemein löst.

Anm. In der erwähnten Abhandlung hat Jacobi (Crelle 2, 354) die hier gemachten, durch die Vergleichungen (a) und (b) ausgedrückten Vorausſetzungen stillschweigend gleichfalls angenommen, und die übrigen Fälle, wo dieſe Vorausſetzungen nicht eintreten, gar nicht behandelt. Die reſultirenden Formeln (e) oder (f) liefern in Form der gewöhnlichen Analyſis gekleidet, dieſelben Gleichungen, welche Jacobi dort (p. 354 ff.) aufstellt, ohne jedoch den Beweis mitzutheilen. Die Determinante, welche aus den in 514 i enthaltenen 2n Zahlgleichungen direkt abgeleitet wird, enthält doppelt ſo viel Faktoren, als die zur Löſung der Gleichungen dienenden Ausdrücke erfordern; es lässt ſich dieſe Determinante aber als Produkt eines Quadrates und einer neuen Determinante, welche nur die einfache Anzahl der erforderlichen Faktoren enthält, darstellen; jenes Quadrat fällt dann schliesslich aus den Ausdrücken für $\delta x_1, \cdots \delta x_{2n}$ hinweg, und dieſe neue Determinante stimmt mit dem oben mitgetheilten Ausdrucke $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ überein. Alle dieſe Umgestaltungen ſind durch die oben angewandte Methode, welche ſich von ſelbst darbietet, vermieden. Der Ausdruck für δx steht in einer merkwürdigen Beziehung zu der Bedingungsgleichung von No. 511, wofür ſich der Grund weiterhin ergeben wird. Es bleibt noch übrig, die Methode für den Fall zu ergänzen, dass die durch die obigen Vergleichungen (a) und (b) dargestellten Vorausſetzungen nicht erfüllt werden.

516. Fortſetzung. Wenn zwar, wie in der vorigen Nummer,

$$\text{(a)} \quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0,$$

aber $$\text{(b)} \quad \left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ist, ſo liefert die Gleichung 516 c, welche von den Vorausſetzungen 516 a und b unabhängig ist, für λ den Werth null. Alſo haben wir nicht mehr auf die Gleichung 514 i zurückzugehen, da dieſe nur für den Fall, dass $\lambda \gtrless 0$ ſei, zu einer Löſung der Aufgabe führte. Es zeigt ſich aber, dass dann die Gleichung

$$\text{(c)} \quad \delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right],$$

wofür man auch die Kongruenz

$$\delta x \equiv \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

ſetzen kann, die Auflöſung der Aufgabe 514 ergiebt, d. h. die Gleichungen 514 b und c identisch macht. Denn dann wird

$$X\delta x = \mu X\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

$$= \mu\left[X^2\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \qquad [509]$$

(d) $X\delta x = 0$ [508].

Ferner wird aus gleichem Grunde, wie in 515,

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_r\delta x\right] = -\frac{\mu}{2n}Xe_r\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

nach der ersten Vorausſetzung (a). Dieſe Gleichung gilt für jede Einheit $e_r = e_1, \cdots e_{2n}$, alſo auch für eine beliebige Vielfachenſumme dieſer Einheiten, alſo auch für $\delta' x$, da dies mit x von gleicher Gattung, alſo auch aus den Einheiten $e_1, \cdots e_{2n}$ numeriſch ableitbar iſt. Es wird alſo

$$\left[\frac{d}{dx}X\delta' x\delta x\right] = 0, \text{ d h.}$$

$$\frac{d}{dx}X\delta' x\delta x - \frac{d}{dx}X\delta x\delta' x = 0.$$

Es iſt aber $\frac{d}{dx}X\delta x = \delta X$ und $\frac{d}{dx}X\delta' x = \delta' X$; alſo hat man

$$\delta X \cdot \delta' x - \delta' X \cdot \delta x = 0.$$

Differenziirt man nun die Gleichung (d) nach a, während t als konſtant geſetzt iſt, ſo erhält man, da δ' das zu dieſer Differenziation gehörige Zeichen war,

$$\delta' X \cdot \delta x + X\delta\delta' x = 0.$$

Addirt man dieſe Gleichung zu der vorigen, ſo hat man

$$\delta X \cdot \delta' x + X\delta\delta' x = 0, \text{ d. h.}$$

(e) $\delta(X\delta' x) = 0$, d. h.

es iſt $X\delta' x$ von t unabhängig, und alſo, da (nach 504) $Xdx = X\delta' x + X\delta x$ war, und $X\delta x = 0$ iſt,

$$Xdx = X\delta' x,$$

wo der letzte Ausdruck von t unabhängig iſt, alſo nur von $2n - 1$ Variabeln abhängt.

Anm. Die Gleichung (b) iſt alſo (unter der Vorausſetzung a) die Bedingungsgleichung dafür, daſs der Ausdruck Xdx ſich unmittel-

bar (ohne Hinzutreten eines Faktors) in einen Ausdruck transformiren lasse, der nur noch $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen enthält; wenn dagegen die Gleichung (b) nicht erfüllt ist, so gelang diese Transformation nur vermittelst eines veränderlichen Faktors, dessen reciproker Werth oben mit N bezeichnet war. Wenn ins Besondere $n=1$ ist, d. h. Xdx die Form $X_1dx_1+X_2dx_2$ hat, so ergiebt sich die Gleichung $\left[\frac{d}{dx}X\right]=0$, als Bedingungsgleichung dafür, dass sich $X_1dx_1+X_2dx_2$ in einen Differenzialausdruck Udu mit nur einer veränderlichen Zahlgrösse (u) verwandeln, also sich allseitig integriren lässt. Die Gleichung $\left[\frac{d}{dx}X\right]=0$ sagt aber aus, dass $\frac{d}{dx}X$ zwei vertauschbare Lücken enthält, was mit No. 486 stimmt. Ehe ich nun zeige, wie die Aufgabe zu lösen ist, wenn die Bedingungsgleichung (a) wegfällt, will ich noch durch Integration der Gleichung 515e die angedeutete Transformation wirklich vollziehen, wobei ich mich der Methode Jacobi's (in Crelle 17 p. 138) bediene.

517. Fortsetzung. Die Kongruenz oder Gleichung

$$\text{(a)}\quad \delta x\equiv\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]\quad\text{oder}\quad \delta x=\mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

bestimmt nur das Verhältniss der Differenzialquotienten $\delta x_1,\cdots\delta x_{2n}$; wir können also einen derselben willkürlich annehmen, d. h. wir können t beliebig wählen. Setzen wir $t=x_{2n}$, so wird $\delta x_{2n}=1$. Setzen wir dann für den Augenblick $x_1e_1+\cdots x_{2n-1}e_{2n-1}=y$, so wird $x=y+te_{2n}$ und $\delta x=\delta y+e_{2n}$, dann erhält man

$$\delta y=\mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]-e_{2n}.$$

Hier bestimmt sich μ aus der Voraussetzung $\delta x_{2n}=1$; setzt man hierin statt δx_{2n} seinen Werth aus 515d*, so erhält man zur Bestimmung von μ die Gleichung

$$1=\frac{\mu}{2n}\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_{2n}\right],$$

wo $E_{2n}=-[e_1e_2\cdots e_{2n-1}]$ ist; somit erhalten wir

$$\delta y=2n\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]:\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_{2n}\right]-e_{2n}.$$

Hier ist die rechte Seite eine Funktion von x, also von y und t; und es kann daher diese Gleichung nach der Methode 494 integrirt werden. Es ergab sich y (nach 494c) in der Form

$$y = a + t\varphi,$$

wo φ noch wieder eine Funktion von y und t, d. h. von x ist, und wo a der Werth ist, den y, und alſo auch x, für $t = 0$ annimmt. Die Formel 494 d lehrte zugleich a als Funktion von y und t, d. h. hier als Funktion von x finden. Dann wird $\delta' x$, da δ' die Differenziation nach a, wobei t konstant war, bedeutet, gleich $\delta' y = da + t\delta'\varphi$. Alſo wird $X\delta' x : N$, was, wie gezeigt, von t unabhängig ist, gleich $X(da + t\delta'\varphi) : N$. Wenn wir daher statt X und N, um ſie als Funktionen von x zu bezeichnen, $X(x)$, $N(x)$ schreiben, ſo erhalten wir

$$\frac{X\delta' x}{N} = \frac{X(x)(da + t\delta'\varphi)}{N(x)}.$$

Da aber der Ausdruck links von t unabhängig ist, ſo muss es auch der Ausdruck rechts ſein, alſo muss er denſelben Werth behalten, den er für $t = 0$ hat. Da in dieſem Falle $y = a$ wird, und alſo auch x $(= y + te_{2n})$ gleich a wird, ſo erhält man

$$\frac{X\delta' x}{N} = \frac{X(a)da}{N(a)}.$$

Nun war, da $X\delta x = 0$ ist, $Xdx = X\delta' x = 0$, alſo erhält man

$$X(a)da = 0,$$

als die Transformirte von $Xdx = 0$; und zwar ist in jener a aus den Einheiten $e_1, \cdots e_{2n-1}$ ableitbar, alſo nur von $2n - 1$ veränderlichen Zahlgrössen abhängig, was verlangt war.

Anm. Wir hätten dem Satze in 494, den wir hier benutzten, für den hier vorliegenden Zweck auch die Form geben können: Wenn x aus mehreren (m) Einheiten ableitbar ist, und $dx \equiv f(x)$ gegeben ist, ſo wird dieſe Kongruenz integrirt durch eine Funktion (Fx) von x, welche einer aus $m - 1$ Einheiten ableitbaren Konstanten a gleich geſetzt ist; und ins Beſondere kann man dieſer integrirenden Gleichung $Fx = a$ (welche $m - 1$ Zahlgleichungen enthält) die Form geben, dass a derjenige Werth wird, welchen x für den Fall annimmt, dass eine der Ableitzahlen von x, z. B. x_m, null wird. In dieſer Form werde ich den Satz in der Folge benutzen, indem ja der Beweis des Satzes in dieſer veränderten Form, ganz in dem oben Geſagten enthalten ist. Um nun die vorliegende Aufgabe auch für den bisher ausgeschlossenen Fall löſen zu können, will ich noch einen Hülfsſatz voranstellen, welcher auch an ſich von Interesse ist.

518. Wenn $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$ ist, so ist auch $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1}\right]=0$.

Beweis 1. Die Lücken des ersteren dieser Ausdrücke werden durch $2n+1$, die des letzteren durch $2n+2$ Faktoren ausgefüllt. Ich zeige nun zuerst, dass der zweite Ausdruck nach Ausfüllung seiner Lücken durch beliebige $2n+2$ Faktoren $a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}$ sich als Vielfachensumme von Ausdrücken der ersten Art darstellen lässt. Ich gehe, um beide Arten von Ausdrücken zu vermitteln, von dem Ausdrucke

$$Xa_1\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}\right]$$

aus. Ich will zu dem Ende mit F_r das Produkt der von a_r verschiedenen Grössen $a_1, \cdots a_{2n+2}$ bezeichnen, und zwar dies Produkt so genommen, dass $[a_r F_r] = [a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$ sei, und ebenso mit $F_{r,s}$ das Produkt der von a_r und a_s verschiedenen unter jenen Grössen und zwar so, dass $[a_r a_s F_{r,s}] = [a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$ sei. Dann wird der obige Ausdruck

$$= Xa_1\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 F_1\right].$$

Hierzu können wir, da $[a_1 F_b]$, wenn $b \gtrless 1$ ist, nothwendig den Faktor a_1 zweimal enthält, also in diesem Falle (nach 505) der obige Ausdruck null wird, sobald wir $a_1 F_b$ statt $a_1 F_1$ und gleichzeitig Xa_b statt Xa_1 schreiben würden, noch beliebig viele Ausdrücke dieser Art hinzufügen; und wir erhalten den obigen Ausdruck

$$= \sum Xa_b\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 F_b\right],$$

wo sich die Summe auf alle Werthe $b = 1, \cdots 2n+2$ beziehen soll. Dieser Ausdruck ist aber (nach 509)

$$= \frac{1}{2n+1}\sum Xa_b\left[\frac{d}{dx}Xa_1 a_a\right]\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_{b,a}\right],$$

wenn $F_{b,a}$ die oben angegebene Bedeutung hat, d. h. $[a_b a_a F_{b,a}] = [a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$, also $[a_a F_{b,a}] = F_b$ ist, und also a von b verschieden ist und daher nur $2n+1$ verschiedene Werthe annehmen kann. Fassen wir jetzt (nach 509) den ersten und dritten der unter dem Summenzeichen stehenden Faktoren zusammen, so erhalten wir den gefundenen Ausdruck (nach 509)

$$= -\sum\left[\frac{d}{dx}Xa_1a_\alpha\right]\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_\alpha\right],$$

wo das Minus-Zeichen zu ſetzen ist, weil aus $[a_\beta a_\alpha F_{\beta,\alpha}] = [a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$ folgt, dass $[a_\alpha a_\beta F_{\beta,\alpha}] = -[a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$ ist, und alſo nach dem Princip der obigen Bezeichnung $F_\alpha = -[a_\beta F_{\beta,\alpha}]$ ſein muss. Die gewonnene Formel ist, alſo

(a) $$Xa_1\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 F_1\right] = -\sum\left[\frac{d}{dx}Xa_1a_\alpha\right]\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_\alpha\right],$$

wo nach dem Obigen F_α ein Produkt ist, deſſen Faktoren aus einer beliebig gewählten Faktorenreihe $a_1, a_2, \cdots a_{2n+2}$ genommen ſind, und zwar ſo, dass ausser a_α alle Faktoren dieſer Reihe darin vorkommen und $[a_\alpha F_\alpha] = [a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$ ist.

2. Wenn nun $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$ ist, ſo ist auch die rechte Seite der Formel (a) null, alſo auch die linke. Alſo müsste entweder Xa_1 oder $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 F_1\right]$, d. h. $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}\right]$ null ſein. Sollte das erstere der Fall ſein, ſo könnte man statt a_1 irgend eine andere der Grössen $a_1, a_2, \cdots a_{2n+2}$ ſetzen; und wenn auch nur für eine derſelben a_r das Produkt $Xa_r \gtrless 0$ wird, ſo ergiebt ſich schon der zweite Faktor $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 \cdots a_{2n+2}\right]$ gleich null. Sollten aber $Xa_1, Xa_2, \cdots Xa_{2n+2}$ ſämmtlich null ſein, ſo würde auch $\frac{d}{dx}Xa_r$ für jeden Index r null, alſo auch $\left[\frac{d}{dx}Xa_r a_s\right]$, alſo auch $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 \cdots a_{2n+2}\right]$ gleich null. Dieſer Ausdruck ist alſo für jede Faktorenreihe $a_1, \cdots a_{2n+2}$ gleich null, alſo (nach 506) $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1}\right]$ ſelbst gleich null.

519. Fortſetzung der Aufgaben 514—517. Es ſei, wie in 514, die Zahlgleichung

(a) $Xdx = 0$

betrachtet, in welcher, wie dort, x aus einem Syſteme von m Einheiten ableitbar ist. Immer wird ſich ein Werth n von der Art angeben lassen, dass

$$(b)\quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$$

$$(c)\quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]\gtrless 0$$

sei. Denn die Vergleichung (c) wird immer erfüllt, wenn $n=1$ ist, wo sie sich auf $X\gtrless 0$ reducirt; und die Gleichung (b) wird immer erfüllt wenn $2n+1>m$ ist; denn dann wird zwischen jeden $2n+1$ Grössen, welche die Lücken des Ausdruckes $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ auszufüllen vermögen, eine Zahlbeziehung herrschen, weil sie aus weniger als $2n+1$, nämlich aus m Einheiten numerisch ableitbar wären, folglich giebt jener Ausdruck mit jeden $2n+1$ Grössen, die seine Lücken füllen, multiplicirt (nach 505) null; also ist er selbst null (nach 506). Dies tritt also stets ein, wenn $2n+1>m$, d. h. $n>\frac{m-1}{2}$ ist, folglich muss es zwischen 1 und $\frac{m-1}{2}$ einen Werth n geben, für welchen die obigen Vergleichungen b und c erfüllt sind. Dieser Werth sei für n angenommen. Nun kommt es (nach 514) darauf an, die Gleichung

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_s\delta x\right]-\lambda Xe_s=0$$

für jedes s von 1 bis m zu erfüllen; indem, sobald diese erfüllt ist, und λ nicht null ist, die Gleichung (a) durch die Gleichung $\frac{X\delta' x}{N}=0$, ersetzt wird, in welcher die linke Seite nicht mehr von t abhängt und N durch die Formel 514 (l) bestimmt ist. Bezeichnen wir der Kürze wegen mit G_s den Ausdruck

$$G_s=\left[\frac{d}{dx}Xe_s\delta x\right]-\lambda Xe_s,$$

so können wir die obigen Gleichungen schreiben

$$0=G_1=G_2=\cdots=G_m.$$

Nun zeige ich, dass, wenn $m>2n$ ist, zwischen jeden $2n+1$ der Grössen $G_1\cdots G_m$ eine Zahlbeziehung herrscht. Angenommen, es herrsche zwischen den $2n$ Grössen $G_1,\cdots G_{2n}$

noch keine Zahlbeziehung, ſo zeige ich, dass jede der übrigen Grössen, z. B. G_m ſich als Vielfachenſumme von $G_1, \cdots G_{2n}$ darstellen lasse. Bezeichnen wir mit E das Produkt $[e_1 e_2 \cdots e_{2n} e_m]$ und mit F_a das Produkt aller von e_a verschiedener Faktoren des Produktes E, und zwar in dem Sinne, dass $[e_a F_a] = E$ ſei, und bezeichnen wir endlich mit α_a den Ausdruck $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_a\right]$, ſo wird, wenn man die folgenden Summen auf die Werthe $1, 2 \cdots 2n$, und m, welche a nach und nach annehmen ſoll, bezieht,

$$\sum \alpha_a G_a = -\sum \left[\frac{d}{dx}X \delta x e_a\right]\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_a\right] - \lambda \sum X e_a \left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_a\right],$$

was nach dem Begriffe der durch die scharfen Klammern bezeichneten Produkte

$$= -(2n+1)\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} E\right] - \lambda(2n+1)\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n E\right]$$

ist. Nun ist (nach b) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$, und alſo (nach 518) auch $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1}\right] = 0$, alſo wird die ganze rechte Seite gleich null, alſo auch

$$\sum \alpha_a G_a = 0,$$

d. h. zwischen den Grössen $G_1, \cdots G_{2n}$ und G_m und überhaupt zwischen jeden $2n+1$ der Grössen $G_1, \cdots G_m$ herrscht eine Zahlbeziehung. Es werden alſo unter ihnen 2n angenommen werden können, etwa $G_1, \cdots G_{2n}$, aus denen die übrigen numerisch ableitbar ſind. Wenn alſo die Gleichungen $G_1, G_2, \cdots G_{2n} = 0$ erfüllt ſind, ſo werden auch die übrigen bis $G_m = 0$ erfüllt. Alſo können wir auch von den Grössen $\delta x_1, \cdots \delta x_m$, deren Verhältnisse durch die Gleichungen $G_1, \cdots G_m = 0$ bestimmt ſind, die Grössen $\delta x_{2n+1}, \cdots \delta x_m$ willkürlich annehmen, z. B. alle gleich 0, d. h. wir können $x_{2n+1}, \cdots x_m$ in Bezug auf die durch δ ausgedrückte Differenziation als konstant anſehen. Dann haben wir alſo, immer unter der Vorausſetzung dass $\lambda \gtrless 0$ ſei, die Gleichungen $G_1 = 0, \cdots G_{2n} = 0$ mit nur 2n Variabeln (indem wir $x_{2n+1}, \cdots x_m$ noch als konstant ſetzen)

und mit der Bedingung $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0$. Dann erhalten wir alſo (nach 515)

$$\text{(d)}\quad \delta x \equiv \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} e_1 \cdots e_{2n}\right] \text{ oder}$$

$$\delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} e_1 \cdots e_{2n}\right]$$

als eine Grösse, die die Gleichungen $G_1, \cdots G_{2n} = 0$, und alſo auch (wie ſo eben gezeigt) die Gleichungen $G_1, \cdots G_m = 0$ erfüllt, und alſo auch den Ausdruck $X\delta' x : N$ von t unabhängig, und $X\delta x$ null werden lässt. Integrirt man dieſe Kongruenz nach der Methode von No. 517 (vergl. Anm.) durch eine Gleichung von der Form $Fx = b$, wo b den Werth bezeichnet, welchen $x_1 e_1 + \cdots + x_{2n-1} e_{2n-1}$ für $t = x_{2n} = 0$ annimmt, und ſetzt $a = b + x_{2n+1} e_{2n+1} + \cdots + x_m e_m$, ſo wird, da $x_{2n+1}, \cdots x_m$ von t unabhängig ſind, a der Werth den x für $t = 0$ annimmt; und da dann vermöge der Gleichungen $G_1 = \cdots = G_m = 0$, die Grösse $X\delta' x : N$ von t unabhängig wird, ſo erhält man aus demſelben Grunde, wie in 517, $X(a)da = 0$ als die Gleichung, welche die Gleichung $X \cdot dx = 0$ oder $X(x)dx = 0$ erſetzt, und welche nur noch von $m - 1$ veränderlichen Zahlgrössen, nämlich von den Zahlgrössen, durch welche a aus den Einheiten $e_1, \cdots e_{2n-1}, e_{2n+1}, \cdots e_m$ ableitbar ist, abhängt. Es war auch hier noch vorausgeſetzt, dass $\lambda \gtrless 0$ war. Dieſe Vorausſetzung können wir erſetzen durch die Vorausſetzung, dass $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] \gtrless 0$ ſei. Nämlich, man kann aus den Gleichungen $G_1 = G_2 = \cdots G_{2n} = 0$, ganz wie in 515, die Gleichung (die dort mit c bezeichnet war nämlich)

$$\lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} E_r\right] = -\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]\delta x_r$$

ableiten; ſetzt man ins Beſondere $r = 2n$, ſo wird $\delta x_r = \delta x_{2n} = 1$, und man erhält

$$\lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} E_{2n}\right] = -\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right].$$

Ist alſo $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)\right]^n$ von null verſchieden, ſo muss auch λ von

null verschieden ſein. Es iſt alſo nur noch der Fall zu berückſichtigen, wo $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$ iſt. Iſt aber dieſe Gleichung erfüllt, ſo ergiebt ſich leicht, dass die Gleichung (d) gleichfalls der Aufgabe genügt. Denn es ergiebt ſich dann, wie in 516d, dass $X\delta x=0$ ſei, ebenſo ergiebt ſich:

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_s\delta x\right]=\mu\left[\frac{d}{dx}Xe_s\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}e_1\cdots e_{2n}\right]\right],$$

was ſich ganz, wie der entſprechende Ausdruck in 515, umwandelt in

$$=-\frac{\mu}{2n}\sum\overline{Xe_a\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_a\right]},$$

wo $[e_aE_a]=[e_1\cdots e_{2n}]$ und s jede der Zahlen $1\cdots m$ ſein kann. Die rechte Seite iſt nach der gemachten Vorausſetzung null. Alſo

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_s\delta x\right]=0,$$

wo ſtatt e_s jede der Einheiten $e_1,\cdots e_m$, alſo auch jede Vielfachenſumme derſelben, alſo auch $\delta' x$ geſetzt werden kann, ſomit erhält man

$$\left[\frac{d}{dx}X\delta' x\delta x\right]=0,$$

und hieraus ergiebt ſich, wie in 516, $\delta(X\delta' x)=0$ und $Xdx=X\delta' x$. Alſo hat ſich der Satz ergeben:

„Wenn in der Zahlgleichung

(a) $Xdx=0$,

in welcher X eine Funktion von x, und x aus den Einheiten $e_1,\cdots e_m$ durch die Zahlen $x_1,\cdots x_m$ ableitbar iſt, die Grösse X die Eigenſchaft hat, dass für irgend einen Werth n, der kleiner als $\frac{m}{2}$ iſt,

(b) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$

und (c) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]\gtrless 0$,

iſt, ſo lässt ſich jene Gleichung (a) erſetzen durch eine Gleichung

(e) $Ada = 0$,

in welcher a aus $m-1$ Einheiten ableitbar ist, d. h. nur $m-1$ veränderliche Zahlen einschliesst, und A dieselbe Funktion von a, wie X von x ist. Und zwar findet man die Grösse a durch Integration der Gleichung

(d) $\delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} e_1 \cdots e_{2n}\right]$,

in welcher δ den Differenzialquotienten nach einer der Variabeln $x_1, \cdots x_{2n}$, z. B. nach x_{2n}, bedeutet, und also $\delta x_{2n} = 1$ ist, wodurch sich μ bestimmt, und in welcher $x_{2n+1}, x_{2n+1}, \cdots x_m$ als konstante Grössen behandelt werden. Wenn nun in diesem Sinne die Gleichung (d) durch eine Gleichung von der Form

(f) $Fx = b$

integrirt wird, wo b den Werth bezeichnet, den $x_1e_1 + \cdots x_{2n-1}e_{2n-1}$ für $x_{2n} = 0$ annimmt, so ist

(g) $a = Fx + x_{2n+1}e_{2n+1} + \cdots x_me_m$,

also a aus den Einheiten $e_1, \cdots e_{2n-1}, e_{2n+1}, \cdots e_m$ ableitbar.

520. Zusatz 1. Wenn in der vorigen Nummer nur die Gleichungen (a) und (b) erfüllt sind, aber nicht die Vergleichung (c), so lässt sich, mag nun $m = 2n$ oder $> 2n$ sein, gleichfalls die Gleichung (a) auf $m-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen und zwar auf eine Gleichung der Form $Ada = 0$, wo A dieselbe Funktion von a, wie X von x, und a aus $m-1$ Einheiten ableitbar ist.

Beweis. Denn wenn auch $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] = 0$ sein sollte, so muss, da doch schliesslich $X \gtrless 0$ ist, sich ein Zahlwerth $n' > n$ finden lassen von der Art, dass die Vergleichungen (b) und (c) gelten, sobald man n' statt n setzt, da nun $m >$ oder $= 2n$ war, so ist m stets $> 2n'$, also kann man dann nach dem vorigen Satze die Gleichung $Xdx = 0$ gleichfalls auf $m-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen u. s. w.

521. Zusatz 2. Ins Besondere kann man, wenn $m = 2n$ ist, stets die Gleichung $Xdx = 0$ auf $m-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen.

Beweis. Denn dann gilt die Gleichung (b) stets (nach 519); und wenn dann auch die Vergleichung (c) gilt, so findet

die Zurückführung (nach 517) statt; wenn jene Vergleichung aber nicht gilt, so geschieht sie nach 520.

522. Wenn die Gleichungen (a) und (b) in demselben Sinne wie in 519 gelten, so kann man die Gleichung

$$Xdx = 0$$

allemal auf $2n - 1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen, und zwar auf die Form

$$Ada = 0,$$

wo A dieselbe Funktion von a, wie X von x ist, und a aus $2n - 1$ Einheiten ableitbar ist, d. h. nur noch $2n - 1$ veränderliche Zahlgrössen einschliesst.

Beweis. Es soll hier nicht bloss der Satz erwiesen, sondern auch gezeigt werden, wie die neue Variable a als Funktion von x gefunden werden kann. Nach 520 kann man $Xdx = 0$ durch eine Gleichung von der Form $A_1 da_1 = 0$ ersetzen, wo a_1, was aus $m - 1$ Einheiten ableitbar ist, eine bekannte Funktion von x, und A_1 dieselbe Funktion von a_1 ist, wie X von x. Da nun die Gleichung (b) für jeden Werth von x gilt, also auch wenn man a_1 statt x setzt, so erhält man

$$\left[A_1\left(\frac{d}{da_1}A_1\right)^n\right] = 0.$$

Wenn also noch $m - 1$ (die Anzahl der Einheiten aus denen a_1 ableitbar ist) grösser als $2n$ ist, so kann man abermals die Methode in 519 oder 520 anwenden, und erhält dann eine Gleichung der Form $A_2 da_2 = 0$, wo a_2, was aus $m - 2$ Einheiten ableitbar ist, eine bekannte Funktion von a_1, also auch von x ist, und A_2 dieselbe Funktion von a_2, wie A_1 von a_1, also auch wie X von x ist. Auf diese Weise kann man fortfahren, so lange noch die Anzahl der übrig bleibenden veränderlichen Zahlgrössen grösser als $2n$ ist; ja (nach 521) auch noch, wenn diese Anzahl $= 2n$ ist. Wendet man dann dies Verfahren noch einmal an, so reducirt sich die Anzahl der veränderlichen Zahlgrössen auf $2n - 1$. Wenn dann die so resultirende Gleichung, die Gleichung $Ada = 0$ ist, so ist also a aus $2n - 1$ Einheiten ableitbar, und eine bekannte Funktion von x, und A ist dieselbe Funktion von a, wie X von x.

Anm. Dieſer Satz enthält die allgemeinſte Löſung der in 514 begonnenen Aufgabe der Zurückführung auf eine möglichſt geringſte Anzahl veränderlicher Zahlgrössen. Dass, wenn $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$ ungleich null (519c) ist, ſich auch Xdx nicht auf weniger als $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen lässt, werde ich unten gelegentlich beweiſen. Noch bemerke ich, dass man, ſtatt $t=x_{2n}$ zu ſetzen, es auch gleich irgend einer Funktion der veränderlichen Zahlgrössen hätte ſetzen können. Dann hätte man nur eine der letzteren, z. B. x_{2n}, durch t und die übrigen Variabeln auszudrücken und dieſen Ausdruck in die gegebene Gleichung einzuführen, und dann ganz die vorher angegebene Methode zu befolgen. Ins Beſondere kann man, wenn die Integration eine Funktion ergeben würde, die für $x_{2n}=0$ unſtetig wäre, $t=x_{2n}-c$ ſetzen, wo c eine Konſtante bezeichnet; indem dann für $t=0$, $x_{2n}=c$ wird und c ſo gewählt werden kann, dass jene Funktion in $t=0$, d. h. in $x_{2n}=c$, ſtetig ſei.

523. Aufgabe. Den numeriſchen Ausdruck Xdx, in welchem X eine Funktion der extenſiven Grösse x ist, unter der Vorausſetzung, dass

$$\text{(a)}\quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right]=0$$

ist, auf die Form

$$Xdx=U_1du_1+\cdots U_ndu_n,$$

wo $U_1,\cdots U_n$, $u_1,\cdots u_n$ Zahlgrössen ſind, zurückzuführen.

Auflöſung. Man kann (nach 522) die Gleichung $Xdx=0$ auf $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen, welche bekannte Funktionen von x ſind. Eine beliebige dieſer veränderlichen Zahlgrössen ſei mit u_1 bezeichnet, ſo ist u_1 gleichfalls eine bekannte Funktion von x. Nun ſei u_1 konſtant geſetzt, ſo bleiben nur noch $2n-2$ veränderliche Zahlgrössen übrig. Folglich können wir (nach 521) die erhaltene Gleichung (welche nach den obigen Sätzen ſtets die Form Ada hat) auf $2n-3$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen, welche bekannte Funktionen der obigen $2n-1$ Veränderlichen, und alſo auch bekannte Funktionen von x ſind; eine derſelben ſei mit u_2 bezeichnet, und ſei u_2 konſtant geſetzt, ſo hat man nur noch $2n-4$ veränderliche Zahlgrössen, welche ſich auf $2n-5$ ſolche zurückführen lassen, u. ſ. w. Hat man dieſe Methode r mal angewandt, ſo nämlich, dass man nach und nach die Grössen $u_1, u_2,\cdots u_r$, welche ſämmtlich bekannte

Funktionen von x ſind, konstant geſetzt hatte, ſo bleiben nur noch $2(n-r)-1$ veränderliche Zahlgrössen übrig. Setzt man alſo $r=n-1$, ſo bleibt nur noch eine veränderliche Zahlgrösse übrig und die reſultirende Gleichung hat die Form $U_n du_n = 0$, wo U_n nur von der variabeln Zahlgrösse u_n abhängt. Setzt man alſo auch u_n gleich einer Konstanten, ſo werden jetzt alle Differenzialgleichungen, alſo namentlich auch die erste $Xdx=0$ erfüllt, wenn die Funktionen $u_1, u_2, \cdots u_n$ Konstanten gleich geſetzt werden, alſo lässt ſich nach der Methode 502 Xdx in der Form

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots U_n du_n$$

darſtellen, und die Aufgabe ist gelöst.

524. Der numeriſche Ausdruck Xdx, in welchem X eine Funktion der extenſiven Grösse x ist, ist dann und nur dann auf eine Summe von n Gliedern der Form Udu, wo U und u Zahlgrössen vorſtellen, zurückführbar, wenn

$$\text{(a)} \quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ist.

Beweis. Wenn die Gleichung (a) erfüllt ist, ſo ist die genannte Zurückführung von Xdx auf n Gliedern der Form Udu (nach 523) ausführbar, und wenn umgekehrt dieſe Zurückführung möglich ist, ſo wird (nach 511) die Gleichung (a) erfüllt.

525. Zuſatz. Wenn x aus 2n Einheiten ableitbar ist, ſo lässt ſich Xdx allemal auf n Glieder der Form Udu, wo U und u Zahlen ſind, zurückführen.

Beweis. Denn wenn x aus 2n Einheiten ableitbar ist, ſo ist die Gleichung $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$ (nach 519) stets erfüllt, und alſo Xdx (nach 524) auf n Glieder der Form Udu zurückführbar.

Anm. Es folgt aus dieſen Sätzen ſogleich, dass wenn $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$ von null verſchieden ist, ſich auch die Gleichung $Xdx=0$ nicht auf weniger als $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen lasse. Denn liesse ſie ſich auch nur auf $2n-2$ ſolche zurückführen, und ſei Ada $=0$ die ſo erhaltene Gleichung, ſo liesse ſich (nach 525) Ada auf

$n-1$ Glieder der Form Udu zurückführen. Aber da die Gleichungen $Xdx=0$ und $Ada=0$ sich gegenseitig ersetzen, so können sie sich nur durch einen Zahlfaktor unterscheiden. Es sei $Xdx=NAda$, so wird nun auch Xdx auf $n-1$ Glieder der Form Udu zurückgeführt sein; also (nach 511) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]=0$ sein, was mit der Voraussetzung streitet. Also lässt sich unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung $Xdx=0$ nicht auf weniger als $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen. Es bildet diese Bemerkung eine schon oben angedeutete Ergänzung zu dem Satze 522.

526. Aufgabe. Die Zahlgleichung $Xdx=0$, in welcher X Funktion der extensiven Grösse x ist, vollständig zu integriren.

Auflösung. Es lässt sich (nach 519) stets ein Werth n von der Art angeben, dass

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right]=0,\ \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]\gtrless 0$$

sei. Dann lässt sich (nach 523, 524) Xdx stets auf n (aber nicht auf weniger als n) Glieder der Form Udu (wo U und u Zahlen sind) zurückführen. Es sei

$$Xdx=U_1du_1+\cdots U_ndu_n=0,$$

so suche man zu der Gleichung $U_1du_1+\cdots U_ndu_n=0$ (nach 503) die sämmtlichen integrirenden Vereine von je n Gleichungen, so integriren diese Vereine also die mit jener identische Gleichung $Xdx=0$.

527. Zusatz. Die Gleichung $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right]=0$ ist die nothwendige aber auch ausreichende Bedingungsgleichung dafür, dass sich die Gleichung $Xdx=0$ durch Vereine von je n Gleichungen integriren lasse.

Anm. Nach 500 ist mit der vollständigen Integration der Zahlgleichung $Xdx=0$ zugleich die der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung vollendet; während die Integration der partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung (nach 501) auf die Integration der extensiven Gleichung $Xdx=0$ zurückführte, welche wir hier ausgeschlossen haben.

Alphabetisches Verzeichniss der gebrauchten Kunstausdrücke mit Angabe der Nummer, in welcher sie erklärt sind.

Abgeleitete Funktion 435
Ableitung, numerische 1
„ von Funktionen .. 392
Ableitungszahlen 5
Abfolute Einheit 3
Abfurde Reihen 456
Aechte Reihen 454
Addition extenfiver Grössen. 6
Algebraische Multiplikation .. 364
Allfeitig normal 152
„ integrirbar 483
Aeussere Multiplikation 78
Bestimmungsgleichungen 48
Bezügliches Produkt 94
„ „ von Lücken-ausdrücken 504, 506
Bruch mit n Nennern 377
Circuläre Aenderung 154
Determinante 62
Differenz einer Funktion 428
„ höherer Ordnung .. 444
Differenzial 429
„ höherer Ordnung .. 444
Differenzialquotient 435
„ particller 436
„ höherer Ordnung .. 450, 452
Divifion mit Zahlen 11
„ mit Funktionen 427
Doppelabstand 345
Ebenen-Gebilde 393
Einfache Faktoren 52
„ Grössen 77
„ Normalsysteme 153
„ Punkte 216
Einheiten 3
„ m-ter Stufe 77
Entgegengefetzt geordnet ... 56
Entsprechende Produkte 43
„ Faktoren 43
Ergänzung der Einheiten 89
„ der Grössen 90
Erfetzende Gleichungen 27
Extenfive Funktionen 349
„ Grössen 5
Flächengebilde 393
Flächentheil 257
Funktion 348
„ Zahl-, extenfive ... 349
Funktionaldeterminante 441
Gebiet einer Grösse 77
„ n-ter Stufe 14
„ gemeinschaftliches etc. 15
Gebilde 393
Gemeinschaftliches Gebiet ... 15
Gemischtes Produkt 114
Gleichgeordnet 56
Grösse 5

Grösse erster Stufe 5
„ n-ter Stufe 77
Grössengattung 413
Hauptgebiet 86
„ des Bruches 387
Hauptzahl des Bruches 387
Identische Gebiete 15
Incidente Gebiete 15
Innere Multiplikation ... 137. 330
Integrabilität 483
Integral von ftdt 477
„ eines bel. Ausdrucks 483
Integration einer Funktion .. 477, 483
„ eines Systemes von Differenzialgleichungen 491
Kombinationen (multiplikat.) 64
Kongruent 2
Konst. Glied einer Funktion . 462, 468
Konvergente Reihe 456
Konvergiren nach c 432
Körpertheil 257
Kreisfunktion 394
Kreisverwandtschaft 409
Kurvengebilde 393
Lineale Aenderung 71
„ Multiplikation 51
Liniengebilde 393
Linientheil 249
Lückenausdrücke 353. 357
Multiplikation 37. 48
„ algebraische 364
„ äussere 78
„ bezügliche 94. 504
„ innere 137. 330
„ kombinatorische ... 53
„ lineale 51
„ mit Zahlen 10
„ planimetrische 288
„ progressive 94. 114
„ regressive 94. 114
„ stereometrische 288
Multiplikative, kombinat. ... 64
Normal 152
Normale Einheiten .... 410—413
„ Zurückleitung 164
Normalsystem 153
Null werden mit q 420
Numerische Ableitung 1
Numerischer (pof.) Werth 151. 153, 414
Numerisch gleich 151
„ grösser, kleiner .. 416
Parallelepipedum 240. 242
Parallelogramm ABC 239, 242
„ ab
Partielle Differenzialquot. ... 436
Planimetrische Multiplikation 288
Potenzwerth des Bruches 383
„ des Differenzialquotient. 441
Produkt, reines 114
„ gemischtes 114
„ mit n Lücken 353
„ siehe Multiplikation.
Progressive Multiplikation 94. 114
„ Zurückleitung ... 127
Punkte 229
„ vielfache 216
Quotient mit n Nennern 377
Regressive Multiplikation 97. 114
„ Zurückleitung 127
Reines Produkt 114
Relative Einheiten 3
finus (abc...) 195
Spat ABCD, abc 240. 242
Stereometrische Multiplikat. . 288
Stetig in x 426
Stetigkeit des Differenzials .. 429
Strecke 216
Stufe, Gebiet n-ter 14
„ Grösse erster 5
„ Grösse n-ter 79
Stufenzahl 14. 79
Subtraktion extenf. Grössen . 7
Syncyclische Verwandtschaft. 406
System von Bestimmungsgl. . 48
„ von Einheiten 4. 153
Uebergangsreihe 456
Uebergeordnet 15. 77

Unkehrbarer Bruch 377
Unendlich entfernt 228
Unendliche Reihe 454
Untergeordnet 15. 77
Ursprüngliche Einheiten 3
Verbindendes Gebiet 15
Verschwinden mit q 420
Vertauschbare Lücken 485A
Verwandtschaft 401
Vielfache Punkte 216
Vollständig integriren 491
Winkel AB 137
Zahlbeziehung 2
Zahlfunktion 349
Zurückleitung 33. 127
„ normale 164
„ progressive 127
„ regressive 127
Zusammengesetzte Grösse ... 77

Druck von R. Grassmann in Stettin.